

УДК 53.01:53.05 + 519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И МОДЕЛИ ЕГО ОПИСАНИЯ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Украина

Анотація. Представлено нову монографію, присвячену дослідженню фізичного феномена статистичної стійкості і порівнянню двох теорій, що описують його: теорії ймовірностей і теорії гіпервипадкових явищ. Книга розрахована на науковців, інженерів і аспірантів, які досліджують статистичні закономірності реальних фізичних явищ, розробляють і використовують статистичні методи високоточних вимірювань, прогнозування та обробки сигналів на великих інтервалах спостереження, а також для студентів університетів фізичних, технічних і математичних спеціальностей.

Ключові слова: феномен статистичної стійкості, теорія ймовірностей, теорія гіпервипадкових явищ, фізичний процес, порушення збіжності.

Аннотация. Представлена новая монография, посвященная исследованию физического феномена статистической устойчивости и сравнению двух теорий, описывающих его: теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Книга рассчитана на научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также для студентов университетов физических, технических и математических специальностей.

Ключевые слова: феномен статистической устойчивости, теория вероятностей, теория гиперслучайных явлений, физический процесс, нарушение сходимости.

Abstract. It is presented a new monograph dedicated to study of the physical phenomenon of statistical stability as well as the comparing of two theories that describe it: the probability theory and the theory of hyper-random phenomena. The book is oriented on scientists, engineers, and post-graduate students researching in statistical laws of natural physical phenomena as well as developing and using statistical methods for high-precision measuring, prediction and signal processing on long observation intervals. The book may also be useful for university students majoring in physical, engineering, and mathematical fields.

Keywords: phenomenon of statistical stability, probability theory, theory of hyper-random phenomena, physical process, violation of convergence.

1. Введение

Одним из удивительных физических феноменов является феномен статистической устойчивости массовых явлений, проявляющийся в стабильности статистик (функций выборки).

В настоящее время известны две теории, описывающие этот феномен: классическая теория вероятностей, имеющая многовековую историю развития, и теория гиперслучайных явлений, разрабатываемая в последние десятилетия¹.

Существует масса литературы по теории вероятностей. Да и по теории гиперслучайных явлений написано уже немало: одних только монографий, как минимум, пять [2–6].

¹ Хотя термин «гиперслучайное явление» вошло в научную литературу лишь в 2005 г. [1], однако основы теории гиперслучайных явлений начали формироваться еще на рубеже 70-х – 80-х годов прошлого столетия.

Однако не было среди них книг, описывающих обе теории с единых позиций, сравнивающих их между собой и раскрывающих на концептуальном уровне их физическую и математическую суть.

В 2016 г. на базе книг [7–9], касающихся теории вероятностей, и монографий [2–4], посвященных исследованию феномена статистической устойчивости и разработке теории гиперслучайных явлений, сформирована обобщающая монография [10], восполняющая имеющийся пробел. Кроме вопросов, изложенных в предыдущих книгах, в нее вошел ряд новых результатов, полученных за последние годы.

Целью настоящей статьи является краткий обзор материалов новой книги.

2. Круг вопросов, рассматриваемых в монографии

Физический феномен статистической устойчивости и его интерпретации. Рассматриваемые в книге вопросы касаются феномена статистической устойчивости и вариантов его описания.

Под феноменом статистической устойчивости понимается эффект стабильности (устойчивости) средних величин, а точнее, стабильности статистик – функций выборки.

Сравниваемые в монографии теории (теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений) по-разному интерпретируют этот феномен.

Обе эти теории, по сути, физико-математические. Каждая состоит из двух частей: математической и физической. Математическая часть оперирует с абстрактными математическими моделями, а физическая – с реальными объектами окружающего мира.

Обратим внимание, что физическая часть играет чрезвычайно важную роль, обеспечивая связь между реальным физическим миром и абстрактным миром математических моделей.

Теория вероятностей. Математическая составляющая теории вероятностей изучает различные случайные явления: случайные события, величины, процессы и поля.

Под случайным явлением подразумевается абстрактный математический объект (модель), удовлетворяющий определенным математическим аксиомам (аксиомам А.Н. Колмогорова).

Характерными признаками случайного явления являются его массовость (существование множества реализаций) и наличие у него вероятностной меры (вероятности), характеризующей частоту наступления любых возможных событий при бесконечно большом количестве реализаций.

Последнее означает, что частота любого события имеет предел, который интерпретируется как вероятность наступления этого события.

Заметим, что массовые явления, которые не имеют вероятностной меры, случайными не считаются.

Объект и предмет исследования теории вероятностей. Объектом исследования математической части теории вероятностей являются случайные явления, а предметом исследования – связи между этими математическими моделями.

Объектом и предметом исследования физической части теории вероятностей также, как и всей теории в целом, являются соответственно физический феномен статистической устойчивости и способы описания его с помощью случайных моделей.

Проблема адекватного описания реальности. Случайные (стохастические или, иначе, вероятностные) модели, как и любые другие, дают приближенное описание реальности. Во многих случаях случайные модели обеспечивают приемлемую точность описания реальных явлений (реальных событий, величин, процессов и полей), благодаря чему они нашли столь широкое применение.

Однако не всегда случайные модели в достаточно полной мере отражают специфику реальных явлений окружающего мира. Особенно явно это проявляется при решении различных за-

дач, связанных с обработкой большого объема данных, получаемых на больших интервалах наблюдения, в частности, при высокоточных измерениях на основе статистической обработки большого числа результатов измерения, при прогнозировании развития событий на больших интервалах наблюдения и решении ряда других задач.

Гипотеза идеальной статистической устойчивости. Исследование причин неадекватности стохастических моделей реальным явлениям показало, что феномен статистической устойчивости проявляется не совсем так, как его описывают стохастические модели.

В основе стохастических моделей лежит физическая гипотеза идеальной статистической устойчивости, предполагающая сходимость любой реальной статистики, то есть наличие предела, к которому она стремится при неограниченном увеличении объема выборки.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости не вызывала сомнений, хотя некоторые ученые (среди них даже основоположник аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоров [11] и такие известные ученые, как А.А. Марков [12], А.В. Скороход [13], Э. Борель [14], В.Н. Тутубалин [15] и др.), обращали внимание на то, что в реальном мире эта гипотеза справедлива лишь с определенными оговорками.

Многочисленные исследования реальных процессов разной физической природы на больших интервалах наблюдения показали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости не находит экспериментального подтверждения.

На относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема данных приводит к уменьшению уровня флуктуаций реальных статистик. Однако при больших объемах эта тенденция не прослеживается: достигнув определенной величины, уровень флуктуаций практически не изменяется или возрастает. Это указывает на отсутствие сходимости реальных статистик (их несостоятельность).

Гипотеза ограниченной статистической устойчивости. Альтернативой гипотезе идеальной статистической устойчивости является гипотеза ограниченной статистической устойчивости, предполагающая отсутствие сходимости реальных статистик.

Разработка способов и методов описания реальных физических явлений с учетом нарушений сходимости статистик привела к формированию физико-математической теории гиперслучайных явлений.

Теория гиперслучайных явлений. Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений изучает различные гиперслучайные явления: гиперслучайные события, величины, процессы и поля.

Под гиперслучайным явлением понимается абстрактный математический объект, представляющий собой совокупность соответствующих случайных явлений (случайных событий, величин, процессов или полей).

Характерным признаком гиперслучайного явления, также как и случайного, является его массовость. Однако гиперслучайное явление, в отличие от случайного явления, описывается не одной мерой, а множеством мер. Используя множество мер, оказывается возможным описывать не только любое массовое событие, частота наступления которого имеет предел при бесконечно большом количестве реализаций, но также и любое событие, не имеющее предела.

Объект и предмет исследования теории гиперслучайных явлений. Объектом исследования математической части теории гиперслучайных явлений являются гиперслучайные явления, а предметом исследования – связи между этими математическими моделями.

Объектом и предметом исследования физической части теории гиперслучайных явлений, также как и всей теории в целом, являются соответственно физический феномен статистической устойчивости и способы адекватного его описания с помощью гиперслу-

чайных моделей (гиперслучайных явлений), учитывающих нарушения статистической устойчивости.

Общность и различие рассматриваемых теорий. Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений, как и теории вероятностей, базируется на аксиомах А.Н. Колмогорова и поэтому с точки зрения математики является ветвью последней.

Однако физические составляющие этих теорий существенно различаются. Физическая часть теории вероятностей основана на двух гипотезах:

- гипотезе идеальной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей;

- гипотезе адекватного описания этих физических явлений случайными моделями.

Физическая часть теории гиперслучайных явлений основана на других гипотезах:

- гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей;

- гипотезе адекватного описания этих физических явлений гиперслучайными моделями.

Фактически теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений представляют две разные парадигмы, по-разному интерпретирующие окружающий мир. Первая базируется из концепции устройства мира на случайных (вероятностных), а вторая – на гиперслучайных принципах.

Области использования теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Хотя и теория вероятностей, и теория гиперслучайных явлений описывают один и тот же феномен статистической устойчивости, области их практического применения разные.

Теория вероятностей, опирающаяся на гипотезу идеальной статистической устойчивости, применима при обработке небольших объемов статистических данных, когда можно считать, что статистические условия практически неизменны.

Теория гиперслучайных явлений, учитывающая неидеальный характер феномена статистической устойчивости, ограничений в части объема данных не имеет. Теоретически она может использоваться как при небольших, так и больших объемах данных, как при отсутствии, так и при наличии нарушений статистической устойчивости.

Однако гиперслучайные модели, как правило, сложнее случайных моделей. Поэтому методы теории гиперслучайных явлений целесообразно использовать тогда, когда теория вероятностей не обеспечивает требуемой адекватности описания физических явлений. Это имеет место в первую очередь при обработке больших объемов реальных данных, получаемых в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях.

Заметим, что гиперслучайные модели могут быть эффективно использованы не только в случае больших, но и малых выборок, в частности, для моделирования разнообразных физических явлений при наличии небольшого объема статистического материала, не позволяющего получить качественные оценки параметров и характеристик.

3. Специфика книги и целевая аудитория

Книга имеет физико-технический уклон и ориентирована на научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также на студентов университетов физических, технических и математических специальностей.

Автор стремился излагать материал как можно проще и доступнее. Старался избегать редко используемых и специальных понятий, терминов и формул и ограничился изложением вопросов, которые

- раскрывают физическую и математическую суть теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений;

- позволяют понять на физическом и математическом уровнях отличие этих теорий друг от друга;
- определяют место, занимаемое этими теориями среди других теорий;
- представляют наибольший практический интерес.

Учитывая, что не все читатели могут иметь требуемую математическую и инженерную подготовку, в книгу включен ряд вопросов вспомогательного плана. К таковым, в частности, относятся базовые понятия теории множеств и теории меры, понятия обычного и обобщенного пределов, обычного и обобщенного преобразований Винера–Хинчина и др.

В итоге для понимания материала книги достаточно знания высшей математики в объеме первого курса технических университетов.

4. Структура книги

Книга логически разделена на пять частей.

Первая часть под названием «Феномен статистической устойчивости», состоящая из вступительной главы, посвящена описанию рассматриваемого физического феномена.

Вторая часть под названием «Теория вероятностей», включающая главы 2–5, содержит описание основ теории вероятностей.

Третья часть под названием «Статистическая устойчивость процессов», состоящая из одной главы 6, посвящена описанию методики оценки нарушений статистической устойчивости и результатам исследований процессов разного типа на предмет нарушения статистической устойчивости.

Четвертая часть под названием «Теория гиперслучайных явлений», включающая главы 7–10, посвящена описанию основ теории гиперслучайных явлений.

Пятая часть под названием «Проблема адекватного описания мира», включающая главу 11, посвящена обсуждению принципов мироустройства.

Ниже приведены аннотации глав.

Глава 1. Описаны различные проявления физического феномена статистической устойчивости. Рассмотрены варианты интерпретации феномена статистической устойчивости на основе гипотезы идеальной статистической устойчивости и гипотезы ограниченной статистической устойчивости. Обсуждены понятия «одинаковые статистические условия» и «статистически непрогнозируемые условия». Обращено внимание на то, что вероятность представляет собой математическую абстракцию, которая не имеет физической интерпретации. Описана шестая проблема Д. Гильберта и намечен путь ее решения. Сформулированы физические гипотезы (аксиомы адекватности) теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

Глава 2. Обсуждено понятие «случайное явление». Описаны классический и статистический варианты формализации понятия вероятности. Приведены основные положения теории множеств и теории меры. Представлен вариант аксиоматизации теории вероятностей, предложенный А.Н. Колмогоровым. Введено понятие вероятностного пространства. Приведены аксиомы теории вероятностей, а также теоремы сложения и умножения. Формализовано понятие скалярной случайной величины. Представлены способы описания случайной величины с помощью функции распределения, плотности распределения и моментов, в частности, математического ожидания и дисперсии. Приведены примеры скалярных случайных величин с разными законами распределения. Способы описания скалярной случайной величины обобщены на случай векторной случайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании случайных величин и арифметических операциях над ними.

Глава 3. Формализовано понятие случайной функции. Приведена классификация случайных функций. Представлены способы описания случайного процесса с помощью функции распределения, плотности распределения и моментных функций, в частности,

математического ожидания, дисперсии, корреляционной и ковариационной функций. Рассмотрены стационарные процессы в узком и широком смыслах. Описаны преобразование Винера–Хинчина и обобщенное преобразование Винера–Хинчина. Рассмотрен спектральный способ описания случайного процесса на основе преобразования Винера–Хинчина. Рассмотрены эргодический и фрагментарно-эргодический процессы.

Глава 4. Введены понятия случайной выборки и статистики случайной величины. Рассмотрены оценки вероятностных характеристик и моментов. Приведены сведения об используемых в теории вероятностей типах сходимости, в частности, сходимости последовательности случайных величин по вероятности и сходимости по распределению. Рассмотрены в классической интерпретации закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены сведения о статистиках случайных процессов. Обсуждена специфика выборки случайных величин и случайных процессов.

Глава 5. Рассмотрены современные концепции оценки точности измерения. Описаны различные виды погрешности. Рассмотрена классическая детерминированно-случайная модель измерения, допускающая разложение погрешности на систематическую и случайную составляющие. Описаны точечная и интервальная оценки. Применительно к случайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема выборки.

Глава 6. Формализовано понятие статистической устойчивости. Рассмотрены параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению. Введены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Формализовано понятие интервала статистической устойчивости. Установлена зависимость статистической устойчивости процесса от его спектрально-корреляционных характеристик. Приведены результаты теоретических и модельных исследований зависимости статистической устойчивости процесса, описываемого степенной спектральной плотностью мощности, от параметра формы его спектра. Представлены результаты модельных исследований нарушений статистической устойчивости узкополосных процессов. Рассмотрены статистически неустойчивые стационарные процессы. Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости реальных процессов разной физической природы.

Глава 7. Формализовано понятие гиперслучайного события. Рассмотрены свойства гиперслучайных событий. Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Приведены три способа ее описания: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Способы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании гиперслучайных величин и об арифметических операциях над ними.

Глава 8. Формализовано понятие гиперслучайной функции. Приведена классификация гиперслучайных функций. Представлены три способа описания гиперслучайного процесса: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Дано определение стационарного гиперслучайного процесса. Представлен спектральный способ описания стационарных гиперслучайных процессов. Формализованы понятия эргодического гиперслучайного процесса и фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса. Приведены результаты анализа эффективности использования различных подходов к описанию гиперслучайных процессов.

Глава 9. Формализованы понятия гиперслучайной выборки и статистики гиперслучайной величины. Рассмотрены оценки характеристик гиперслучайных величин. Формализованы понятия обобщенного предела, сходимости в обобщенном смысле и спектра пре-

дельных точек. Определены понятия сходимости в обобщенном смысле последовательности гиперслучайных величин по вероятности и по функции распределения. Обобщены закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие справедливость обобщенного закона больших чисел и обобщенной центральной предельной теоремы.

Глава 10. Описаны различные модели измерения. Исследована точечная детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Показано, что в общем случае погрешность, соответствующая такой модели, носит гиперслучайный характер и не может быть представлена в виде суммы систематической и случайной составляющих. Применительно к гиперслучайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема гиперслучайной выборки. Описана методика измерения физических величин, соответствующая детерминированно-гиперслучайной модели измерения. Показано, что в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях классическая детерминированно-случайная модель измерения искаженно отражает реальную ситуацию, а детерминированно-гиперслучайная модель – представляет ее адекватно.

Глава 11. Рассмотрены различные подходы к адекватному описанию реального физического мира. Обсужден вопрос о причинах использования случайных и гиперслучайных моделей. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного описания различных математических моделей (детерминированных, случайных, интервальных и гиперслучайных) с помощью функции распределения. Предложена классификация этих моделей. Рассмотрены пути и причины формирования неопределенности. Очерчены области целесообразного использования на практике случайных и гиперслучайных моделей.

5. Заключение

Подводя итоги вопросам, рассмотренным в монографии, хотелось бы обратить внимание на следующие ключевые моменты.

1. Феномен статистической устойчивости – физический феномен, проявляющийся в стабильности частоты реальных массовых событий, выборочных средних и других статистик.

2. В настоящее время известны две теории, описывающие феномен статистической устойчивости: теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений. Теория вероятностей основана на предположении, что феномен статистической устойчивости идеален (иначе: статистики обладают свойством сходимости (оценки состоятельные)). Теория гиперслучайных явлений базируется на предположении, что феномен статистической устойчивости неидеален (иначе: статистики свойством сходимости не обладают (оценки несостоятельные)).

3. Многочисленные экспериментальные исследования реальных явлений разной физической природы указывают на то, что статистики, сформированные по реальным выборкам, тенденции к сходимости не проявляют. Такая тенденция наблюдается лишь при не большом объеме выборки. При большом же объеме она не фиксируется.

4. Результаты этих экспериментальных исследований свидетельствуют об обоснованности осторожного отношения многих видных ученых к вопросу об адекватности описания физических явлений стохастическими (вероятностными) моделями. По всей видимости, физический мир действительно подчиняется трем видам законов:

- детерминированным;
- статистически прогнозируемым (случайным, стохастическим или, иначе, вероятностным);
- статистически непрогнозируемым.

Этим можно объяснить ограниченную точность любых статистических измерений физических величин и ограниченную точность прогнозирования развития реальных событий.

5. Поскольку гипотеза о сходимости частоты реальных событий не находит экспериментального подтверждения, базовое понятие теории вероятностей – вероятность – следует рассматривать как абстрактное математическое понятие, не имеющее физической интерпретации.

6. При небольшом объеме выборки действие статически непрогнозируемых законов практически не влияет на результаты измерения физических величин. В этом случае возможно эффективное применение классических моделей и статистических методов теории вероятностей. При больших же объемах выборки, когда нарушение статистической устойчивости проявляется явно, использование классических моделей и методов приводит к недопустимо большим погрешностям. В этом случае целесообразно применение подходов, предлагаемых теорией гиперслучайных явлений.

7. Максимальный интервал наблюдения, на котором еще допустимо использование классических моделей и методов, – интервал статистической устойчивости – зависит от особенностей процесса и вида статистики. Поэтому для обоснованного применения тех или иных методов статистической обработки (в особенности при больших объемах данных) необходима оценка величины интервала статистической устойчивости по отношению к рассматриваемой статистике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Гиперслучайные явления и их описание / И.И. Горбань // Акустический вестник. – 2005. – Т. 8, № 1–2. – С. 16 – 27.
2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007 – 184 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspapes/gorban_i_i/index.html.
3. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspapes/gorban_i_i/index.html.
4. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspapes/gorban_i_i/index.html.
5. Уваров Б.М. Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками / Б.М. Уваров, Ю.Ф. Зінковський. – Луганськ: ЛНПУ, 2011. – 180 с.
6. Уваров Б.М. Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками / Б.М. Уваров, Ю.Ф. Зінковський. – Луганськ: ЛНПУ, 2011. – 212 с.
7. Горбань И.И. Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров / Горбань И.И. – К.: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. – 150 с.
8. Горбань И.И. Основы теории выпадковых функций и математической статистики / Горбань И.И. – К.: КПС МЗС Украины, 2000. – 245 с.
9. Горбань И.И. Теория вероятностей и математическая статистика для научных работников та інженерів [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2003. – 245 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspapes/gorban_i_i/index.html.
10. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 288 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspapes/gorban_i_i/index.html.
11. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А.Н. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.; 1974. – 119 с.

12. Марков А.А. Исчисление вероятностей / Марков А.А. – М., 1924. – 385 с.
13. Иваненко В.И. Проблема неопределенности в задачах принятия решения / В.И. Иваненко, В.А. Лабковский. – К.: Наукова думка, 1990. – 135 с.
14. Борель Э. Вероятность и достоверность / Борель Э. – М.: Наука, 1961. – 120 с.
15. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей / Тутубалин В.Н. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. – 230 с.

Стаття надійшла до редакції 17.05.2014