

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КОЕФІЦІЄНТА НАДМІРНОСТІ НА ПОКАЗНИКИ НАДІЙНОСТІ РЕЗЕРВОВАНИХ СИСТЕМ З ДРОБОВОЮ КРАТНІСТЮ

\*Національний авіаційний університет, Київ, Україна

***Анотація.** Розглянуто вплив коефіцієнта надмірності на показники надійності резервованої системи з дробовою кратністю за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи.*

***Ключові слова:** надійність, резервована система, дробова кратність, закон розподілу, час безвідмовної роботи, коефіцієнт надмірності, раптові відмови, поступові відмови.*

***Аннотация.** Рассмотрено влияние коэффициента избыточности на показатели надежности резервированной системы с дробной кратностью при различных законах распределения времени безотказной работы элементов системы.*

***Ключевые слова:** надежность, резервированная система, дробная кратность, закон распределения, время безотказной работы, коэффициент избыточности, внезапные отказы, постепенные отказы.*

***Abstract.** The influence of redundancy coefficient for reliability redundant system with fractional multiplicity for different distribution laws of no-failure operation time of system elements was regarded.*

***Keywords:** reliability, redundant system, fractional multiplicity, distribution law, no-failure operation time, redundancy coefficient, sudden failures, degradation failure.*

### 1. Вступ. Постановка проблеми

Підвищення ефективності та надійності технічних систем за рахунок застосування резервування (додаткової надмірності) у структуру системи – важлива та актуальна проблема. Одним із широко застосованих методів резервування систем є резервування систем із загальним навантаженим резервуванням з дробовою кратністю [1].

Дослідження впливу надмірності на резервовані системи з дробовою кратністю представляє технічний інтерес і має велику практичну значимість.

### 2. Аналіз досліджень та публікацій

Рішенню цієї проблеми присвячена велика кількість праць [1–3]. Незважаючи на цей вплив коефіцієнта надмірності на показники надійності, дослідження були проведені тільки в резервованій системі елементів з експоненціальним законом розподілу часу безвідмовної роботи.

### 3. Мета роботи та постановка завдання

Мета роботи – дослідження впливу коефіцієнта надмірності на показники надійності резервованих систем з дробовою кратністю за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи: експоненціальним, Вейбула, дифузійним немонотонним, узагальненим показовим та суміші розподілів (експоненціальним і Вейбула).

### 4. Вирішення проблеми

**4.1.** Під час застосування теореми складання несумісних подій, для випадку однакових елементів системи із загальним навантаженим резервуванням з дробовою кратністю, маємо такий вираз для ймовірності безвідмовної роботи:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{N \times K_{надм}} C_N^i (P(t))^{N-i} (1 - P(t))^i, \quad (1)$$

де  $P(t)$  – імовірність безвідмовної роботи одного елемента;

$C_N^i$  – число поєднання із  $N$  елементів за  $i$ ;

$N = n + m$  – загальне число елементів у резервованій системі;

$n$  – число основних елементів;

$m$  – число резервних елементів;

$K_{надм.} = m/N$  – коефіцієнтом надмірності резервованої системи (під час загального резервування системи з дробовою кратністю) розуміється відношення числа резервованих (надмірних) елементів системи  $m$  до загальної кількості елементів у системі  $N$ .

**4.2.** Дослідження залежності надійності систем із загальним навантаженим резервуванням з дробовою кратністю від коефіцієнта надмірності системи за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів, що ураховують випадкові та поступові відмови елементів: експоненціального, Вейбула, дифузійного немонотонного, узагальненого показового та суміші розподілів (експоненціального і Вейбула).

Експоненціальний розподіл часу безвідмовної роботи (однопараметричний – параметр  $\lambda$ ) ураховує випадкові відмови системи у період нормальної експлуатації системи. Інтенсивність відмов елемента  $\lambda$  – стала, не ураховує зношення та старіння у процесі експлуатації.

Розподіл Вейбула часу безвідмовної роботи (двопараметричний – параметри  $\lambda$  та  $k$ ) застосовується під час опису працездатності систем у процесі зношення та старіння.

Дифузійний немонотонний розподіл (ДНР) часу безвідмовної роботи (двопараметричний – параметри  $a$  та  $v$ ) застосовується для елементів, у яких відомі фізичні процеси деградації, що призводять до відмов у процесі експлуатування, та встановлені визначаючі параметри, що характеризують технічний стан об'єктів [4].

Узагальнений показовий розподіл (УПР) часу безвідмовної роботи – це розподіл тривалості будь-якого складного випадкового процесу, який у початковий момент часу з імовірністю  $P_i$  знаходиться на  $i$ -ій стадії, у своєму розвитку може проходити через одну, дві або  $n$  стадій, тривалості яких експоненціально розподілені [5].

Суміш розподілів експоненціального і Вейбула часу безвідмовної роботи дозволяє урахувати прояв випадкових відмов та явищ зношення і старіння у процесі експлуатації елементів [5].

### 4.3. Аналіз впливу коефіцієнта надмірності на показники надійності резервованих систем з дробовою кратністю

**4.3.1.** У табл. 1 представлені формули для розрахунку показників надійності п'яти різних розподілів часу до відмови елементів. У праці [6] отримані формули та алгоритми для визначення середнього наробітку до відмови систем із загальним навантаженим резервуванням із дробовою кратністю за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів.

Для визначення середнього наробітку до відмови систем із загальним навантаженим резервуванням із дробовою кратністю під час дифузійного немонотонного розподілу, узагальненого показового розподілу та суміші розподілів (експоненціального та Вейбула) часу до відмови елементів застосовується рішення трансцендентних рівнянь (2):

$$1 - K_{НАДМ} - \frac{1}{N} = P_M(T_{OC}), \quad (2)$$

де  $P_M(t_0)$  – імовірність безвідмовної роботи елементів:

- для експоненціального розподілу наробіток до відмови елементів:

$$\frac{T_{0C}}{T_{0M}} = -\ln\left(1 - K_{НАДМ} - \frac{1}{N}\right); \quad (3)$$

- для розподілу Вейбула наробіток до відмови елементів:

$$\frac{T_{0C}}{T_{0M}} = \frac{\left[-\ln\left(1 - K_{НАДМ} - \frac{1}{N}\right)\right]^{1/b}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}. \quad (4)$$

Таблиця 1. Формули для розрахунку показників надійності п'яти різних розподілів часу до відмови елементів

Тип розподілу часу до відмови елементів	Формули для ймовірності безвідмовної роботи, щільності розподілу часу до відмови і інтенсивності відмов елементів, $\Lambda_M(z_0) = \frac{f_M(z_0)}{P_M(z_0)}$	Примітка, $z_0 = \frac{t_0}{T_{0M}}$
Експоненціальний розподіл (ЕР)	$P_M(z_0) = \exp(-z_0),$ $f_M(z_0) = \lambda_M \exp(-z_0),$ $\Lambda_M(z_0) = \lambda_M$	$t_0$ – час оперативної роботи $T_{0M} = \frac{1}{\lambda_M}$ – середній наробіток до відмови
Розподіл Вейбула (РВ)	$P_M(z_0) = \exp\left[-(K_b z_0)^b\right],$ $f_M(z_0) = bK_b (K_b z_0)^{b-1} \exp\left[-(K_b z_0)^b\right],$ $\Lambda_M(z_0) = bK_b (K_b z_0)^{b-1}$	$T_{0M} = aK_b,$ $K_b = \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ – гамма-функція
Дифузійний немонотонний розподіл (ДНР)	$P_M(z_0) = \Phi\left(\frac{1-z_0}{\nu\sqrt{z_0}}\right) - \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{1+z_0}{\nu\sqrt{z_0}}\right),$ $f_M(z_0) = \frac{1}{\mu\nu z_0 \sqrt{2\pi z_0}} \exp\left[-\frac{(1-z_0)^2}{2\nu^2 z_0}\right],$	$T_{0M} = \mu,$ $\nu = 1$
Узагальнений показовий розподіл (УПР)	$P_M(z_0) = \left(1 - \frac{\eta}{\lambda}\right) \exp(-2z_0) + \frac{\eta}{\lambda} \exp\left(-\frac{2\eta}{\eta + \lambda} z_0\right),$ $f_M(z_0) = 2\left[\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right) \exp(-2z_0) - \frac{\eta^2}{\lambda(\eta + \lambda)} \exp\left(-\frac{2\eta}{\eta + \lambda} z_0\right)\right]$	$T_{0M} = \frac{2}{\eta + \lambda},$ $\eta = 4\lambda$
Суміш розподілів експоненціального та Вейбула (ЕР+РВ)	$P_M(z_0) = 0,5 \exp(-0,625z_0) + 0,5 \exp\left[-(2,5K_b z_0)^m\right],$ $f_M(z_0) = \lambda\left\{0,5 \exp(-0,625z_0) + 2bK_b (2,5K_b)^{b-1} \exp\left[-(2,5K_b z_0)^b\right]\right\}$	$T_{0M} = 0,5(T_{0EM} + T_{0WM}),$ $T_{0EM} = 1/\lambda,$ $T_{0WM} = 0,25/\lambda,$ $T_{0M} = 0,625/\lambda$

**4.3.2.** На рис. 1–4 представлені графіки залежності відносного середнього наробітку до відмови від коефіцієнта надмірності резервованої системи за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи (експоненціальним розподілом (ЕР), розподілом Вейбула (РВ), немонотонним дифузійним розподілом (НДР), узагальненим показовим розподілом (УПР) та сумішню розподілів експоненціального та Вейбула (ЕР+РВ)).

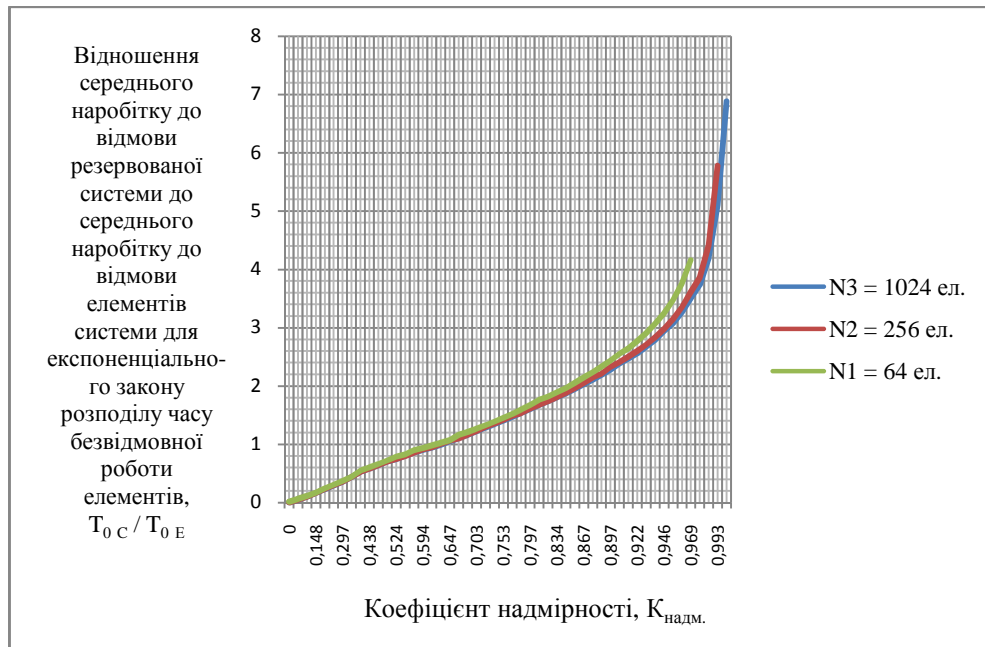


Рис. 1. Графіки залежності відношення середнього наробітку до відмови резервованої системи (під час загального резервування із дробовою кратністю) до середнього наробітку до відмови елементів системи  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}}$  (для експоненціального закону розподілу часу безвідмовної роботи елементів) від коефіцієнта надмірності системи  $K_{надм.}$

За графіками на рис. 1 видно, що відношення  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}}$  поступово зростає:

- від 0 до 1,0 під час збільшення  $K_{надм.}$  від 0 до 0,6 для всіх трьох резервованих систем;
- від 1,0 до 6,9 під час збільшення  $K_{надм.}$  від 0,6 до 0,998 для резервованої системи за  $N = 1024$  елементи;
- від 1,0 до 5,8 під час збільшення  $K_{надм.}$  від 0,6 до 0,993 для резервованої системи за  $N = 256$  елементів;
- від 1,0 до 4,16 під час збільшення  $K_{надм.}$  від 0,6 до 0,969 для резервованої системи за  $N = 64$  елементи.

Графіки відношення  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}}$  для резервованих систем із дробовою кратністю та числом елементів у системі  $N_1 = 64$ ,  $N_2 = 256$ ,  $N_3 = 1024$  практично співпадають один з одним на інтервалі зміни  $K_{надм.}$  від 0 до 0,834.

З рис. 2 видно, що під час  $K_{надм.} \approx 0,80$  всі графіки нормованого наробітку до відмови резервованих систем для п'яти різних законів розподілу часу безвідмовної роботи елементів практично співпадають:  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}} (K_{надм.} = 0,80) = 1,427 - 1,600$ .

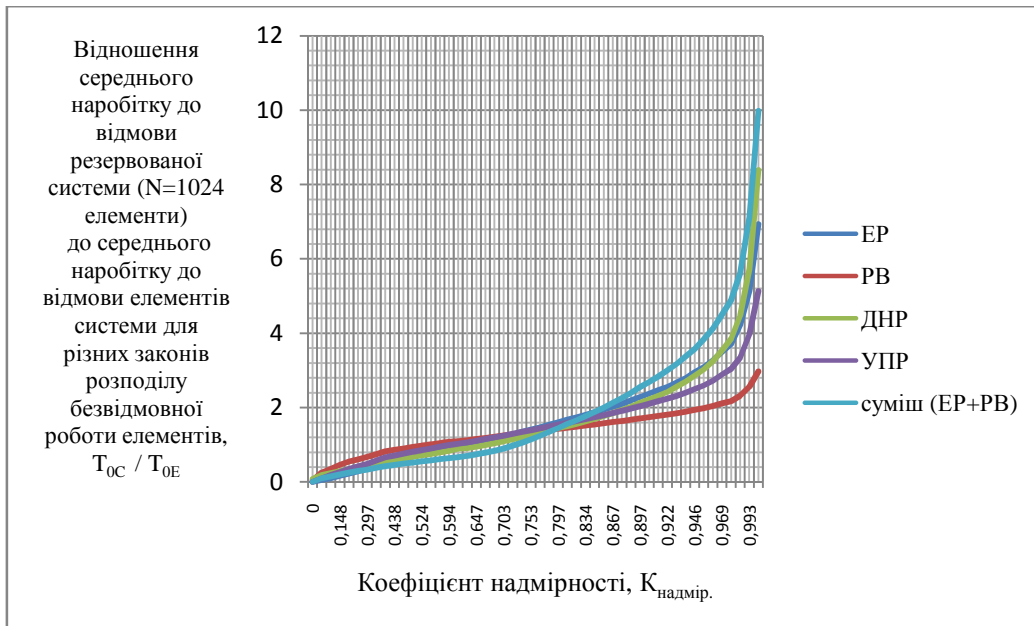


Рис. 2. Графіки залежності відношення середнього наробітку до відмови резервованої системи (під час загального резервування із дробовою кратністю) до середнього наробітку до відмови елементів системи для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи елементів (ЕР, РВ, ДНР, УПР, суміш розподілів експоненціального та Вейбула (ЕР та РВ) від коефіцієнта надмірності системи ( $K_{надм.}$  від 0 до 0,997)

На інтервалі зміни  $K_{надм.}$  від 0,80 до 0,997 графіки для відносного середнього наробітку до відмови резервованих систем за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів взагалі не співпадають між собою. Нижче всіх проходить графік для  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}}$  резервованої системи, в якій розподіл часу безвідмовної роботи елементів визначається законом Вейбула ( $\frac{T_{0C}}{T_{0E}} (K_{надм.} = 0,997) = 2,97$ ). Вище всіх проходить графік для  $\frac{T_{0C}}{T_{0E}}$  резервованої системи, в якій розподіл часу безвідмовної роботи елементів визначається сумішшю розподілів експоненціального та Вейбула ( $\frac{T_{0C}}{T_{0E}} (K_{надм.} = 0,997) = 9,98$ ).

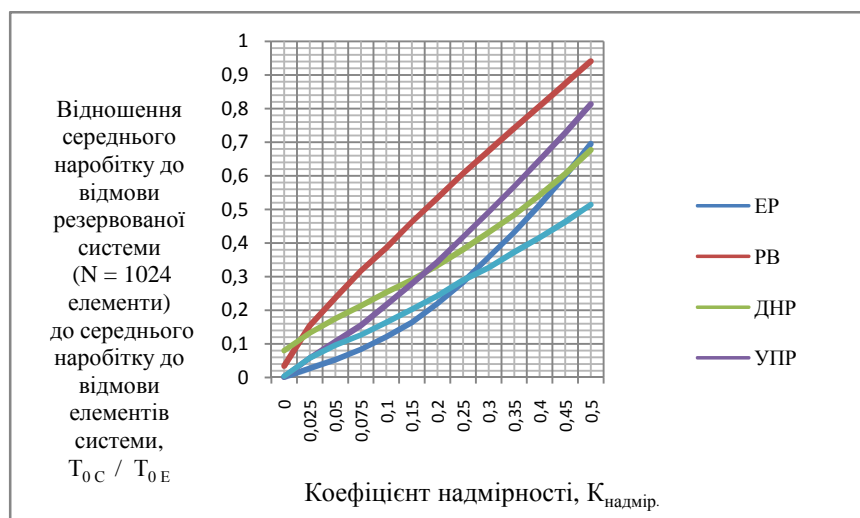


Рис. 3. Графіки залежності відношення середнього наробітку до відмови резервованої системи (під час загального резервування із дробовою кратністю) до середнього наробітку до відмови елементів системи (для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи елементів) (ЕР, РВ, ДНР, УПР, суміш ЕР та РВ) від коефіцієнта надмірності системи ( $K_{надм.}$  від 0 до 0,5)

Найбільшу цікавість для інженерних додатків мають резервовані системи з загальним резервуванням із дробовою кратністю, які мають коефіцієнт надмірності  $K_{надм.}$  у діапазоні від 0 до 0,25 (рис. 3).

З рис. 3 видно, що криві для ЕР, УПР та РВ розташовані паралельно під одним кутом на осі абсцис ( $K_{надм.}$ ). Крива для ЕР розташована нижче кривої для УПР та РВ, а крива для УПР розташована нижче кривої для РВ. Криві для ДНР та суміші (ЕР та РВ) є практично паралельними і розташовані під меншим кутом до осі абсцис ( $K_{надм.}$ ) і перетинають криві для ЕР, УПР та РВ.

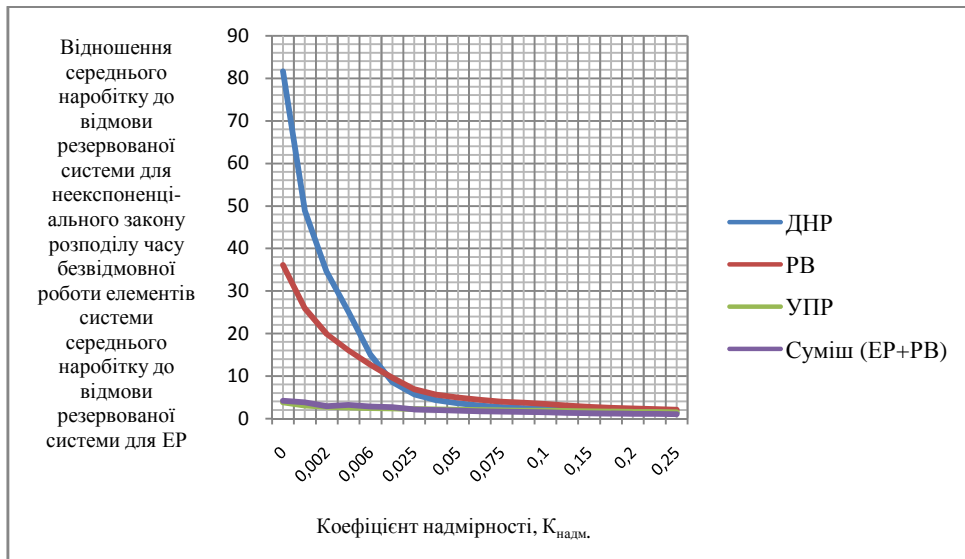


Рис. 4. Графіки кривих залежності відношення середнього наробітку до відмови резервованої системи (під час загального резервування з дробовою кратністю) для різних неекспоненціальних законів розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи (РВ, ДНР, УПР, суміш (ЕР+РВ) до середнього наробітку до відмови резервованої системи для експоненціального закону розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи від коефіцієнта надмірності

Із графіків на рис. 2 і 3 видно, що крива середнього наробітку до відмови резервованих систем із загальним резервуванням та дробовою кратністю під час неекспоненціальних розподілів часу безвідмовної роботи елементів системи значно відрізняється від середнього наробітку до відмови резервованих систем із експоненціальних розподілів часу безвідмовної роботи. На рис. 4 показані графіки кривих відношення середнього наробітку до відмови резервованих систем із дробовою кратністю під час неекспоненціальних розподілів часу безвідмовної роботи елементів системи до середнього наробітку до відмови резервованих систем під час експоненціальних розподілів часу безвідмовної роботи за зміною коефіцієнта надмірності від 0 до 0,25. Графіки кривих мають гіперболічний характер із максимальними значеннями  $K_{надм.} = 0$ . Найбільше значення під час  $K_{надм.} = 0$  має крива для резервованих систем з часом безвідмовної роботи елементів, які розподілені відповідно дифузійному немонотонному розподілу:

$$\frac{T_{0\text{ ДНР}}}{T_{0\text{ ЕР}}}(K_{надм.} = 0) = 81,6.$$

Графік кривої для резервованих систем з часом безвідмовної роботи елементів, розподілених відповідно закону Вейбула, розташовується нижче (по осі ординат):

$$\frac{T_{0\text{ РВ}}}{T_{0\text{ ЕР}}}(K_{надм.} = 0) = 36,1.$$

Ще нижче по осі ординат розташовуються графіки кривих для резервованих систем з часом безвідмовної роботи елементів, розподілених відповідно закону для узагальненого показового розподілу:

$$\frac{T_{0\text{ УПП}}}{T_{0\text{ EP}}}(K_{\text{надм.}} = 0) = 3,79$$

та відповідно закону для суміші (EP та PB):

$$\frac{T_{0\text{ (EP+PB)}}}{T_{0\text{ EP}}}(K_{\text{надм.}} = 0) = 4,20.$$

## 5. Висновки

У статті було досліджено вплив коефіцієнта надмірності на показники надійності резервованих систем з дробовою кратністю за різними законами розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи: експоненціальним, Вейбула, дифузійним немонотонним, узагальненим показовим та суміші розподілів (експоненціальним і Вейбула). Були побудовані графіки залежностей відношення середнього наробітку до відмови резервованої системи до середнього наробітку до відмови елементів системи для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи від коефіцієнта надмірності системи.

Отримані у цій статті результати для резервованих систем з загальним резервуванням із дробовою кратністю можуть знайти широке застосування у технічних додатках під час досліджень надійності фазованих антенних решіток радіолокаційних і гідроакустичних станцій із будь-якою надмірністю для елементів розподільної структури, час безвідмовної роботи яких характеризується неекспоненціальними законами розподілу.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Половко А.М. Основы теории надежности: практикум / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 560 с.
2. Надежность технических систем: справочник / Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
3. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. / Под ред. В.И. Патрушева, А.Ю. Рембезы. – Москва: Машиностроение, 1990. – Т. 5: Проектный анализ надежности. – 316 с.
4. Азарсков В.Н. Надежность систем управления и автоматики: учебн. пособ. / В.Н. Азарсков, В.П. Стрельников. – К.: НАУ, 2002. – 164 с.
5. Игнатов В.А. Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем / Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Трайнев В.А.; под ред. Е.Г. Коновалова. – М.: Энергия, 1974. – 264 с.
6. Костановський В.В. Математичні моделі надійності типових апертур фазованих антенних решіток, які враховують раптові та поступові відмови модулів надвисоких частот / В.В. Костановський // Математичні машини і системи. – 2014. – № 2. – С. 142 – 150.

*Стаття надійшла до редакції 12.11.2014*