

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ DN -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Abstract: The mathematical device is developed and expressions for confidential intervals (boundary estimations) probabilities of non-failure operation of objects are received on the basis of using DN -distribution.

Key words: reliability function, confidential interval, relative mistake.

Анотація: Розроблено математичний апарат і отримано вираз для довірчих інтервалів (граничних оцінок) імовірності безвідмовної роботи об'єктів на основі використання DN -розподілу.

Ключові слова: імовірність безвідмовної роботи, довірчий інтервал, відносна помилка.

Аннотация: Разработан математический аппарат и получены выражения для доверительных интервалов (граничных оценок) вероятности безотказной работы объектов на основе использования DN -распределения.

Ключевые слова: вероятность безотказной работы, доверительный интервал, относительная ошибка.

1. Введение

Экспериментальные методы основаны на использовании статистических данных, получаемых при испытаниях изделий на надежность или данных опытной или подконтрольной эксплуатации. Экспериментальная оценка показателей надежности является обязательным этапом и практически основным способом установления реальных количественных показателей надежности в процессе разработки и серийного производства изделий. В связи с этим вопросы планирования и обработки результатов испытаний на надежность являются весьма важными в общей проблеме обеспечения надежности изделий.

2. Анализ состояния проблемы

Оценки показателей надежности, определяемые по результатам испытаний или подконтрольной эксплуатации, получают в виде точечных оценок \tilde{A} и доверительных границ интервала A_n, A_g . Доверительные интервалы с заданной доверительной вероятностью q покрывают истинные значения A . Существующие наиболее распространенные нормативные материалы [1–3], устанавливающие параметрические методы оценки показателей надежности по результатам испытаний, основаны на использовании таких законов распределения наработки до отказа, как экспоненциальный, Вейбулла, нормальный и логарифмически нормальный. Как известно, принятие той или иной теоретической модели надежности может существенно повлиять как на оценку показателей надежности, так и на планы испытаний. Сравнительный анализ моделей отказов, выполненный в [4], свидетельствует о том, что диффузионные распределения по ряду требований (физичности, адекватности, универсальности, статистическим и формальным свойствам) превосходят традиционные модели. Из этого следует, что планы испытаний на их основе также должны быть эффективнее традиционных.

3. Построение функции распределения достаточной статистики для определения вероятности безотказной работы

Задачи планирования испытаний на надежность и оценки доверительных интервалов показателей надежности объектов решаются просто, если известны функции распределения достаточных

статистик (или оценок показателей надежности). Вид функции распределения достаточной статистики (или оцениваемого показателя надежности) зависит как от закона распределения первичной наблюдаемой статистики (наработки до отказа, числа отказов), так и от функциональных преобразований, которые производятся над первичной статистикой при вычислении оценки показателей надежности.

Достаточной статистикой для оценки показателей надежности типа вероятность безотказной работы $R(t)$ является статистика $\vartheta = \frac{r}{N}$, где r – число отказавших образцов за наработку t из N образцов, поставленных на испытание ($R(t) = 1 - \vartheta$).

В работах [4–6] показано, что наиболее адекватной моделью отказов изделий электронной техники представляется DN -распределение (диффузионное немонотонное распределение), которое и рекомендуется использовать в качестве теоретической функции распределения наработки до отказа систем, содержащих электронные элементы.

Интегральная функция DN -распределения имеет выражение

$$F(t) = DN(t; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\nu \sqrt{\mu t}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{t + \mu}{\nu \sqrt{\mu t}}\right), \quad (1)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция нормированного нормального распределения;

μ – параметр масштаба, совпадающий с математическим ожиданием наработки до отказа;

ν – параметр формы, совпадающий с коэффициентом вариации наработки до отказа.

Важнейшей функцией в теории планирования испытаний на надежность является функция распределения числа отказов, на основании которой можно определять доверительные оценки показателей надежности. Определим закон распределения числа отказов за фиксированное время (наработку) испытываемых объектов, для которых функция распределения наработки до отказа описывается DN -распределением. Если на испытание поставлено N образцов, то вероятность того, что откажет $r = s$ образцов, имеющих DN -распределение наработки до отказа, с учетом (1) можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Вер}(T \leq t | r = s) &= \Phi\left(\frac{t - s \mu_r}{\nu \sqrt{t \mu_r}}\right) + \exp\left(\frac{2s}{\nu^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{t + s \mu_r}{\nu \sqrt{t \mu_r}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{t}{\mu_r} - s}{\nu \sqrt{\frac{t}{\mu_r}}}\right) + \exp\left(\frac{2s}{\nu^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{\frac{t}{\mu_r} + s}{\nu \sqrt{\frac{t}{\mu_r}}}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu_r = \frac{t_r}{N \cdot DN(t_r; \mu, \nu)}$; t_r – значение наработки до появления r -го отказа.

Процессы наработки до отказа T и появления числа отказов r являются взаимно обратимыми процессами. Их взаимосвязь описывается функцией (2). При фиксированном r последнее выражение представляет функцию распределения T ($F(t)$), а при фиксации

наработки ($t = t_r$) это выражение представляется функцией распределения r ($F(r)$).

Зафиксировав t_r , произведем следующие формальные замены:

$$r = N \cdot DN(t_r; \mu, \nu); \quad \frac{t}{\mu_r} = \frac{t_r}{\mu_r} = \frac{t_r N \cdot DN(t_r; \mu, \nu)}{t_r} = r.$$

Теперь можно записать:

$$F(r) = \text{Вер}(R \leq r | t = t_r) = \Phi\left(\frac{r-s}{\nu\sqrt{r}}\right) + \exp\left(\frac{2s}{\nu^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{r+s}{\nu\sqrt{r}}\right). \quad (3)$$

Последнее выражение можно переписать в DN -распределение следующего вида:

$$F(r) = DN(r; s, \nu_r), \quad (4)$$

где s – параметр масштаба, совпадающий с математическим ожиданием числа отказов;

$\nu_r = \frac{\nu}{\sqrt{s}}$ – параметр формы, совпадающий с коэффициентом вариации числа отказов (здесь

ν – коэффициент вариации распределения наработки до отказа испытываемых объектов предполагается известной величиной).

Установлено [6], что если t – случайная величина подчиняется DN -распределению вида $DN(t; \mu, \nu)$, то случайная величина $x = c \cdot t$ (где $c = const$) описывается DN -распределением вида $DN(x; c\mu, \nu)$. Таким образом, учитывая вышеприведенные результаты, можно

констатировать, что статистика ϑ имеет распределение вида $DN\left(\vartheta; \frac{s}{N}, \nu_r\right)$:

$$F(\vartheta) = \Phi\left(\frac{\vartheta - s/N}{\nu_r \sqrt{\vartheta s/N}}\right) + \exp\left(\frac{2s}{\nu_r^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{\vartheta + s/N}{\nu_r \sqrt{\vartheta s/N}}\right). \quad (5)$$

Граничные оценки статистики ϑ в таком случае определяются как квантили уровней $(1-q)$ или q :

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \frac{s}{N} x(1-q, \nu_r); \\ \vartheta_g &= \frac{s}{N} x(q, \nu_r), \end{aligned} \quad (6)$$

где s – количество зафиксированных отказов (среднее ожидаемое число отказов).

Значение $x(1-q, \nu_r)$, равное относительной величине $x = \frac{r}{s}$, определяют из таблиц функции DN -распределения по значениям $F = 1-q$ и ν_r или решая следующее уравнение:

$$\Phi\left(\frac{1-x}{\nu_r \sqrt{x}}\right) - \exp\left(\frac{2}{\nu_r^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{1+x}{\nu_r \sqrt{x}}\right) = q.$$

Аналогично определяют $x(q, \nu_r)$.

Доверительные интервалы и граничные оценки для вероятности безотказной работы определяют из следующих соотношений: $R_n(t) = 1 - \vartheta_n$; $R_g(t) = 1 - \vartheta_g$.

При планировании испытаний относительную ошибку принимают в соответствии с требованиями нормативных документов, а затем вычисляют экспериментальную (реальную) по формуле

$$\delta = \max \left\{ \frac{\vartheta_g - \vartheta_0}{\vartheta_0}; \frac{\vartheta_0 - \vartheta_n}{\vartheta_0} \right\},$$

где ϑ_0 – ожидаемое значение ($\vartheta_0 = 1 - R_0(t)$);

$R_0(t)$ – ожидаемое значение вероятности безотказной работы.

Число отказов r , необходимое для удовлетворения задаваемой точности (δ) и достоверности (q) при известном параметре ν , определяют по следующей формуле:

$$r = \left(\frac{\nu_r U_q}{\delta} \right)^2 \frac{(1 + \sqrt{1 + \delta^2})}{2}. \quad (7)$$

Необходимое число образцов N , которое нужно поставить на испытание, чтобы обеспечить появление r отказов за фиксированное время t , определяется из соотношения

$$N = \frac{r}{DN(t_r; \mu, \nu)}, \quad (8)$$

где μ , ν – соответственно, параметры масштаба и формы распределения наработки до отказа (1) исследуемых объектов.

4. Выводы

Разработан математический аппарат для планирования испытаний с целью оценки вероятности безотказной работы объектов (изделий электронной техники и систем, содержащих электронные элементы) на основе использования DN -распределения. Получены аналитические выражения для оценки доверительных интервалов. Определен объем испытаний (минимальное число отказов r и необходимое число образцов N) для удовлетворения требований по точности δ и достоверности q .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 23773-88. Машины вычислительные электронные цифровые общего назначения. Методы испытаний. – Введ. 01.07.89.
2. ГОСТ 27.410-87. Надежность в технике. Методы и планы контрольных испытаний на надежность. – Введ. 01.01.89.
3. ГОСТ 27.503-88. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по результатам испытаний. – 01.07.89.
4. ГОСТ 27.005-97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 01.01.99. – 43 с.
5. Погребинский С.Б., Стрельников В.П. Проектирование и надежность многопроцессорных ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.
6. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.