УДК 517.5:618.5:518.62

Г.С. ТЕСЛЕР

БАЛАНСНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Светлой памяти моего друга
и соратника проф. Б.А. Попова

Abstract: *In the paper the essence and meanings of balance approximation in the theory of approximation of functions and their role in modern information technologies are stated these approximations include theory of minimax approximations, spline approximation and so on. The distinction of the discussed approach is balancing the numbers of the links, approached accuracy of approximation, setting of the knots, type of the approximated expression, type of the kernels of error and also the coefficient of balancing. Balance approaching allows to decrease the complexity of computing, to increase their stability and effective using computers algebra as the base of the information technology.*
Key words: *approximation, balance, information technology, spline, kernel of the approaching.*

Анотація: *У статті викладено суть та значення балансних наближень у теорії апроксимації функцій та їх роль у сучасних інформаційних технологіях. Ці наближення включають в себе теорію мінімаксних наближень, сплайн-апроксимацію тощо. Особливістю підходу, що розглядається, є збалансування кількості ланцюгів, досягнутої похибки наближень апроксимації, розміщення вузлів, вигляд апроксимуючих виразів, вигляд ядер похибки, а також коефіцієнт балансності. Балансні наближення дозволяють зменшити складність обчислень, підвищити їх стійкість, а також врахувати особливості апроксимуючої функції. Важливою особливістю такого підходу є ефективне використання комп'ютерної алгебри як основи інформаційної технології.*
Ключові слова: *апроксимація, баланс, мінімакс, інформаційна технологія, сплайн, ядро наближення.*

Аннотация: *В статье излагаются суть и значение балансных приближений в теории аппроксимации функций и их роль в современных информационных технологиях. Эти приближения включают в себя теорию минимаксных приближений, сплайн-аппроксимацию и т.п. Особенностью рассматриваемого подхода является сбалансирование количества звеньев, достигаемой точности аппроксимации, размещение узлов, вид аппроксимирующего выражения, вид ядер погрешности, а также коэффициент балансности. Балансные приближения позволяют уменьшить сложность вычислений, повысить их устойчивость и учесть особенности аппроксимирующей функции. Важной особенностью такого подхода является эффективное использование компьютерной алгебры как основы информационной технологии.*
Ключевые слова: *аппроксимация, баланс, минимакс, информационная технология, сплайн, ядро приближения.*

1. Введение

Баланс является основой стабильности и развития большинства процессов, протекающих в системах различной природы живой, искусственной и неживой. Об этом свидетельствуют законы сохранения, существующие в физике, химии, информатике и других науках [1].

Естественно, что математика как отображение реальных процессов в абстрактном виде, не могла остаться в стороне от этих процессов. Об этом свидетельствуют теория игр, математическое программирование, теория приближения и другие теории, использующие минимакс либо максимин, а также теория балансных приближений, предложенная впервые профессором Б.А. Поповым в конце прошлого века.

Что же такое балансные приближения? Эти приближения вобрали в себя большинство достижений современной науки о приближениях и информационных технологиях. Прежде всего, это минимаксные (чебышевские) приближения, сплайн-аппроксимации, методы оценки точности приближений и количества необходимых подынтервалов и вида приближающих функций на каждом из подынтервалов, изменения аргумента функции. Кроме того, это использование аналитических выражений для коэффициентов приближений и модифицированных методов Е.Я. Ремеза при отыскании точек альтернанса. В основе этого подхода используются как основы классической теории аппроксимации и их общения, так и новые теоретические положения, включающие сплайн-аппроксимации на основе ядер с использованием различных базисных функций (многочленных, рациональных, экспоненциальных, тригонометрических и их обратных, а также ортогональных многочленов) для приближения аналитических и таблично заданных функций. Прежде всего, эти приближения используются для вычисления элементарных и специальных функций, а также при моделировании различных процессов живой, неживой и искусственной природы. Наряду с прямыми функциями, данные методы могут быть использованы для вычисления обратных функций на основе итеративных процессов для получения эффективных начальных приближений и уточненных структур итерационных формул. Важную роль в балансных аппроксимациях играет решение проблемы устойчивости вычислений. Еще одним достоинством балансных аппроксимаций является возможность использования методов компьютерной алгебры (численно-аналитических преобразований и вычислений) на всех этапах их получения и использования. Это показывает их высокую компьютерную технологичность, демонстрируя гарантируемую точность, прозрачность, простоту и адаптивность к внутренним и внешним условиям применения и использования. Все вышесказанное показывает широту использования балансных приближений, а возможность использования методов компьютерной алгебры позволяет им быть основой современных информационных технологий.

2. Немного истории

Методы сегментной аппроксимации восходят к древним временам и, в частности, связаны с определением числа π, как отношения длины окружности к ее диаметру, вычисления площадей и объемов фигур. Они непосредственно связаны с теорией отношений Евдокса (около 408 – 355 гг. до н.э.) и так называемым методом исчерпывания, который позволил строго проводить вычисление площадей и объемов, что позволило преодолеть кризис в древнегреческой математике [2]. Это означало, что небольшой участок кривой вблизи какой-либо точки можно считать прямолинейным и лежащим в одной плоскости, что заложило начало теории пределов [3].

Независимо от Архимеда (около 287 – 212 гг. до н.э.), китайский математик Лю Хуэй, составитель дошедшего до нас комментария к “Девяти книгам ” (263 г. н.э.), с помощью вписанных и описанных правильных многоугольников нашел [2], что $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$.

Таким образом, мы видим, что идеи сегментной аппроксимации восходят к середине тысячелетия до н.э. и началу н.э. Идея и теория наилучших (минимаксных) приближений связывают с именем П.Л. Чебышева (1821 – 1894), а аппарат их получения – с именем Е.Я. Ремеза (1896 – 1975) [4–6].

Понятие сплайна впервые было введено И.Дж. Шенбергом в работе [7]. Теория сплайнов и ее приложение начали широко применяться после появления монографии Дж. Альберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [8]. В основе этой теории лежат интерполяционные кубические сплайны. Метод конечных элементов приближенного вычисления сложных неполиномиальных сплайн–

функции, в частности, на хаотических сетках, а также развитие теории сплайнов как решение вариационной задачи были осуществлены В.А. Василенко [9].

Общие алгоритмы для построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов были предложены П.Ж. Лораном [10]. Важным моментом при нахождении сплайн-аппроксимаций являются устойчивость нахождения коэффициентов аппроксимирующих функций и уменьшение количества выполняемых операций. Для наилучших приближений этого можно достигнуть путем аналитического представления коэффициентов приближения через точки чебышевского альтернса. Такой подход, наверное, впервые, для постоянного и линейного приближения в случае получения наилучших приближений с абсолютной погрешностью приведен как пример в работе [11]. Более общий подход, включающий как относительные погрешности, так и расширение аппарата приближений (многочлены, дробно-рациональные приближения, экспоненциальные, логарифмические и другие), был предложен Г.С. Теслером и Б.А. Поповым [12, 13].

Благодаря явному представлению коэффициентов аппроксимирующей функции через точки чебышевского альтернанса и известные коэффициенты аппроксимирующего выражения, удалось сократить арифметическую сложность алгоритма получения минимаксных приближений и увеличить устойчивость вычислений. Помимо этого, для аналитически заданных функций появилась возможность нахождения точек альтернанса без дискретизации исходной функции и использования итеративного процесса нахождения точек альтернанса, восходящего к работе Е.Я. Ремеза [4] на основе решения соответствующего аналитического уравнения. Такой подход впервые предложил Г.С. Теслер [14], а затем его развили Б.А. Попов [12] и его ученики [14–23, 25–27]. В ряде случаев это позволяет не использовать интерполяционный многочлен, который используется в алгоритме Ремеза. Г.С. Теслером впервые была решена задача нахождения чисто аналитическими методами наилучших полиномиальных приближений для ряда элементарных функций [14]. Этот подход был расширен Б.А. Поповым в работе [12] с использованием методов компьютерной алгебры [30, 31]. Повышению эффективности описанного выше подхода способствовали предложенные Б.А. Поповым и Г.С. Теслером [12–14] методы понижения, позволяющие при определенных условиях на порядок понизить степень многочлена наилучшего приближения, что уменьшит сложность его получения.

Как уже отмечалось выше, в работах Б.А. Попова сделана попытка объединить теорию наилучших приближений и теорию сплайнов. При этом сплайн строится на основе условия равномерного (в определенном смысле балансном) приближении с одинаковой максимальной погрешностью на каждом из отрезков полиномиальными либо нелинейными выражениями.

Первоначально Б.А. Попов использовал понятие равномерные приближения сплайнами, которое по многим параметрам совпадало с введенным позже понятием балансных приближений. Эти понятия более близко совпадают в английском переводе – «balanced approximation by splienes», где одно из значений слова «balanced» означает балансированный, уравновешиваемый. В данном случае речь идет о сбалансировании, уравновешивании и, наконец, оптимизации погрешностей аппроксимирующих выражений на заданных интервалах, узлов разбиения исходного интервала, точек альтернанса, сложности и вычислений с учетом особенностей аппроксимируемой, аналитических и табличных заданных функций (физических, математических и т.п.).

Б.А. Поповым разработаны теория и соответствующие вычислительные алгоритмы нахождения параметров равномерного приближения аналитически либо таблично заданных функций.

Заложены теоретические основы построения равномерных приближений сплайнами с разного вида аппроксимирующих функций. Это достигается благодаря получению формул погрешности и выражения для границ отрезков для различных видов аппроксимирующих функций и норм погрешности.

В основном в работах Б.А. Попова строятся разрывные сплайны, хотя в ряде случаев рассматриваются и непрерывные, т.е. гладкие сплайны, а также интерполяционные, эрмитовы и т.п. сплайны.

Еще одним из приложений сплайн-аппроксимаций есть получение начальных приближений для итеративных процессов. Хотя первые итеративные алгоритмы появились сравнительно давно (например, итерационная формула Герона была получена в середине первого века до н.э.), но сегментные аппроксимации появились в середине прошлого века, а балансные приближении в конце прошлого века.

Практика использования сплайнов при решении многих технических задач потребовала рассматривать не только гладкие функции, но и разрывные, используя при этом полиномиальные приближения и др. Хотя имелись некоторые подходы для решения этих задач, но общий подход для их решения был предложен профессором Б.А. Поповым в работе [15] с использованием разрывных сплайнов (сегментная аппроксимация), а также комбинированных (гладко-разрывных) сплайнов. В работе предложены эффективные алгоритмы общего вида для решения этой проблемы. Наряду с наилучшими приближениями, необходимо рассматривать задачи нахождения оптимальной сетки разбиения исходного интервала задания рассматриваемой функции, вида аппроксимируемой функции на подынтервалах, получаемой точности, нормы погрешности, устойчивости, алгоритмической, информационной и временной сложности и многих других задач. Важную роль при решении этих задач играют функциональные зависимости между видом аппроксимируемой и аппроксимирующей на подынтервалах функций, а также погрешностями приближения и количеством звеньев сплайна.

Такого типа зависимости впервые в наиболее общем виде получены Б.А. Поповым в работе [2]. Этого удалось достичь благодаря введению понятий ядер приближения функций в качестве конструктивного элемента.

Однако постановка задачи сегментной аппроксимации, в основном, сосредоточивалась на рассмотрении разбиения исходного интервала задания функции на равные либо переменные длины подынтервалов, но с одинаковым видом аппроксимирующих функций на подынтервалах.

Естественным обобщением подхода, потребовавшего соответствующего обобщения предыдущей теории, является допущение разных видов аппроксимирующих функций на разных интервалах. Это потребовало дополнительного изучения как аппроксимируемой, так и аппроксимирующих функций. В результате при заданной точности уменьшается количество узлов сплайна, появляется возможность сбалансировать алгоритмическую, информационную и временную сложности. Именно это и составило основу балансных сплайнов, предложенных Б.А. Поповым в работе [12] и получивших распространение в работах его учеников.

Таким образом, балансные сплайны оказались на вершине пирамиды приближения функций и могут быть использованы как порождающая теория для получения более простых случаев, вырождающихся на приближении на одном интервале. Это особо важно при построении перспективных баз знаний конкретных предметных областей, основанных на порождающих алгоритмах.

Не менее важным является тот факт, что использование балансных аппроксимаций позволяет существенно уменьшить время вычисления и дает возможность приближать функции на сравнительно больших интервалах, используя разные виды аппроксимирующих выражений на подынтервалах. При этом можно добиться того, что узлы и сегменты могут иметь физический либо какой-нибудь другой смысл отображаемого процесса или явления.

Помимо этого, выбор аппроксимирующего выражения позволяет учитывать физические особенности реальных физических процессов, т.е. более адекватно отображать их при математическом моделировании, учитывая особые точки, производные, характеризующие динамику отображаемого процесса, и т.д. Последние аспекты при построении балансных аппроксимаций особо важны при их использовании для отображения реальных физических процессов и явлений различной природы [19 – 31]. Современное состояние теории сплайн-аппроксимаций можно найти в монографии [28].

3. Балансные сплайновые приближения

3.1. Ядро приближений

Хорошо известно, что для функции $f(x), x \in [a,b]$, которая есть непрерывной вместе со своей $m+1$-ой производной и $f^{(m+1)}(x) \neq 0$, максимальная погрешность наилучшего минимаксного приближения многочленом степени m на отрезке $[a,b]$ имеет вид

$$\mu = \frac{\left| f^{(m+1)}(\xi) \right| (b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \quad , \qquad \text{где } a \le \xi \le b .$$

Логически допустить, что при определенных условиях для произвольного приближающего выражения

$$F(A,x) = F(a_0, a_1, \ldots a_m, x) ,$$

которое является наилучшим минимаксным приближением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, верно следующее [15]:

$$\mu = \frac{\left| \eta(f(\xi), F) \right| (b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} .$$

В тех случаях, когда это равенство справедливо, то функция $\eta(f,F) = \eta(f(\xi),F)$ в работе [15] названа ядром приближения функции $f(x)$ на основе выражения $F(A,x)$. В общем случае выражение для ядра приближения зависит от функции и ее $(m+1)$-ой производной.

3.2. Сравнение ядер и порядок обращения к процедуре балансных приближений

Сравнение ядер учитывает следующие факторы [30]:

а) использование ядра погрешности приближения в виде аналитического выражения (для заданного множества выражений) с фиксированным количеством параметров позволяет получить наименьшую погрешность на заданном интервале. В некоторых случаях оптимальное приближающее выражение можно определить, сравнивая аналитические выражения для ядер;

б) вид аппроксимирующей функции;

в) точность приближения и выбор нормы погрешности;

г) количество подынтервалов;

д) особые условия (физические, математические и т.п.), включая весовую функцию;

е) временная и информационная сложности.

Порядок обращения к процедуре балансных приближений требует следующей информации:

а) приближаемая функция $f(x)$;

б) общий отрезок задания аргумента $x \in [a,b]$;

в) количество подынтервалов r, на который разбивается отрезок;

г) класс аппроксимируемых функций;

д) задание параметров аппроксимирующей функции (например, степени знаменателя и числителя и т.д.);

е) максимальное значение погрешности на отрезке $[a,b]$;

ж) последовательность максимальных значений погрешности на каждом подынтервале;

з) узлы сплайна;

и) вид сплайна на каждом из подынтервалов.

Внутренние процедуры для нахождения минимаксных приближений определяют [30]: точки альтернанса внутри подынтервалов, коэффициент балансности приближения в численном либо аналитическом виде, выражения коэффициентов.

Б.А. Поповым рассматриваются асимптотические балансные приближения, балансные приближения с заданной погрешностью, балансные приближения с заданным количеством интервалов. В целом нахождение балансного приближения является достаточно сложной оптимизационной задачей.

3.3. Балансные приближения сплайнами на основе дробно-рациональных приближений

Ниже приведена одна из теорем, лежащая в основе получения балансных приближений сплайнами [29].

Теорема: Пусть $f(x) \in C^{m+2}[a,b]$ и весовая функция $W(x) \in C^{1}[a,b]$ и $W(x) \neq 0$, а также ядро приближения $\eta_{k,e}^{(p,s)}(f) \neq 0$ при $x \in [a,b]$, тогда ошибка μ балансного приближения на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ с помощью сплайна $S(V,x)$ со звеньями – наилучшими с весом

$W(x)$ чебышевскими приближениями на основе рациональных выражений $V_{k,e}^{(p,s)}$ с заданным числом звеньев r при $r \to \infty$ определяется выражением

$$\mu = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left[\int_a^b \left|\frac{\eta_{k,e}^{(p,s)}(f)}{W(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}} dx\right]^{m+1} \left[1+O[\frac{b-a}{r}\right],$$

где рациональное выражение

$$V_{k,e}^{(p,s)}(x) = x^s R_{k,e} = \frac{x^s \sum_{i=0}^{k} a_i x^{ip}}{\sum_{i=0}^{c} b_i x^{ip}},$$

s и p целые числа, $k + c = m$.

Ядро приближения

$$\eta_{k,e}^{(p,s)} = \eta(f, V_{k,e}^{(p,s)}) = x^{(p-1)m+s}\,\frac{(m+1)!\Delta_{k+1,c+1}(f)}{\Delta_{k,c}(f)};$$

$$\Delta_{e,s}(f) = \begin{cases} 1 \text{ при } s \le 0 \\ \begin{vmatrix} c_{e+1-s} & c_{e+2-s} & \dots & c_e \\ c_{e+2-s} & c_{e+3-s} & \dots & c_{e+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ c_e & c_{e+1} & \dots & c_{e+s-1} \end{vmatrix} \text{ при } s > 0; \end{cases}$$

$$C_\nu = C_\nu(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \nu < 0 \\ x_\nu(f)/\nu! \text{ при } \nu = 0,1,2,3..., \end{cases}$$

а коэффициенты $x_\nu(f)$ отвечают рекуррентной формуле

$$\chi_\nu(f) = (\chi_{\nu-1}(f)x^{1-p})'_x\ ;\quad \nu = 1,2,...,\text{m};\quad \chi_0(f) = f(x)x^{p-1-s}.$$

Близость сплайн–приближения к балансному достаточно полно характеризуется коэффициентом балансности B, который равен отношению максимальной ошибки к средней на звеньях и он больше либо равен единице. При $B = 1$ имеет место балансное приближение.

Коэффициент балансности приближения B таким образом имеет вид

$$B = r \max_{i=\overline{1,r}} \mu_i \Big/ \sum_{i=1}^{r} \mu_i .$$

Приведем некоторые оптимальные минимаксные балансные приближения функций рациональными сплайнами [15, 22, 24–25, 29–30].

3.4. Примеры балансных приближений сплайнами

1. Для функции $f(x) = \cos(x)$ при $x \in [0, \pi]$ имеем

$$R_{4,2}=\begin{cases}\dfrac{27,41993+(-12,713104+0,64849373x^2)x^2}{27,419699+x^2} & |x|\le 1,6749539\\ \dfrac{22,087762+(-10,128870+0,47735669)x^2}{21,928898+x^2} & |x|\le 2,7381869\\ \dfrac{17,304642+(-7,7841161+0,34518208x^2)x^2}{16,045927+x^2} & |x|\le 2,9217566\\ \dfrac{14,370266+(-5,8784603+0,24715132x^2)x^2}{9,7036134+x^2} & |x|\le 3,3789841\\ 0 & |x|\ge 3,3789841\end{cases}.$$

Абсолютная погрешность $\Delta=10^{-5}$.

Результат можно значительно улучшить, если воспользоваться формулами приведения к интервалу $x\in[0,\pi/2]$ либо $x\in[0,\pi/4]$, приведенными в работе [13].

2. Для функции $y=\ln x$ для $x\in[1,2]$ приближение близко к балансному с коэффициентом балансности $B=1,0009$, имеем

$$R_{2,1}=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{-1,338535997+(1,116212803+0,2223241588x)x}{0,5609930592+x} & x\le 1,259965322\\ \dfrac{-1,523148545+(1,347269100+0,1764575697x)x}{0,7068123681+x} & x\le 1,58740001\\ \dfrac{-1,713277721+(1,578301646+0,1400568042x)x}{0,8905130950+x} & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}.$$

Абсолютная погрешность приближения $\mu=10^{-6}$.

3. Для функции $y=\sqrt{x}$ для $x\in[0,1]$ приближение близко к балансному с коэффициентом балансности $B=1,0287$, имеем

$$R_{1,1}=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{0,0000131156+0,11983x}{0,00335956+x} & x\le 0,00800258\\ \dfrac{0,0856805+0,691443x}{0,142264+x} & x\le 0,150849\\ \dfrac{0,271127+2,0473x}{1,32758+x} & x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}.$$

Абсолютная погрешность $\mu=10^{-2}$.

Этот результат можно значительно улучшить, если воспользоваться формулами приведения к более меньшему интервалу, приведенными в работах [13, 14], и вместо абсолютной погрешности рассматривать относительную погрешность.

4. Для W – функция Ламберта $y = W(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению $x = ye^{y}$, либо

$$F(x, y) = \frac{(xe^{-y} - y)}{y+1} = 0$$

и, положив в этом уравнении невязку как

$z_0 = (xe^{-y_0} - y_0)$, получим $x = (z_0(y_0 + 1) + y_0)e^{y_9}$,

и, положив $x = x_{i+1}; z_0 = z_i; y_0 = y_i$, легко получить соответствующие итерационные формулы [17, 25]:

$y_{i+1} = y_i(1 + z_i)$ с погрешностью $\Delta_{i+1} \approx -\dfrac{1}{2y_i(y_i + 1)} \Delta_i{}^2$

либо

$y_{i+1} = y_i \left(1 + z_i + \dfrac{z_i{}^2}{2(1+y_i)}\right)$ с погрешностью $\Delta_{i+1} \approx -\dfrac{2y_i - 1}{6y_i{}^2(y_i + 1)^2} \Delta_i{}^3$.

Балансное приближение начального приближения функции $y = W(x)$ для приведенных итерационных формул имеет вид

$$R_{1,1} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{0{,}013801 + 0{,}1883619x}{0{,}3186698 + 0{,}07391125x} & x \le 18{,}43644 \\ \dfrac{0{,}456003 + 0{,}01031164x}{0{,}2558242 + 0{,}001872511x} & x \le 776{,}4063 \\ 0 & x > 776{,}4063 \end{cases}, \qquad \delta_0 \le 0{,}0049 .$$

Другие примеры балансных приближений приведены в работах Б.А. Попова и его учеников, они представлены в списке литературы.

4. Выводы

В работе показана роль и определено значение балансных приближений, предложенных Б.А. Поповым и далее развитых его учениками. В основе этих приближений лежит замена погрешности приближения ядрами соответствующего вида. Благодаря такому подходу, удалось получить достаточно простые выражения для оценки погрешности, количества подынтервалов и узлов сплайн-аппроксимации для получения наилучших сплайн-аппроксимации. Описан критерий балансности для аппроксимации сплайнами заданных функций. Получение этих приближений вобрало в себя целый спектр методов, уменьшающих сложность получения таких приближений, устойчивость всех приближений, другие методы и средства, направленные на повышение эффективности их получения и использования.

Для практики важным свойством описанных балансных сплайн-приближений является возможность приближать искомую функцию с использованием неравномерной сетки узлов различными аппроксимирующими выражениями на каждом из подынтервалов с учетом физических особенностей процессов, которые описывает приближаемая функция. Такой подход делает возможным использование балансного приближения как основы современных информационных технологий. Возможно развитие предлагаемого подхода на функции нескольких переменных и других норм погрешностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теслер Г.С. Новая кибернетика. – Киев: Логос, 2004. – 404 с.
2. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984. – 284 с.
3. Филинис Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Гостехиздат,1950.
4. Ремез Є.Я. Про методи найкращого в розумінні Чебишова наближеного представлення функцій. – Київ: Видавництво УАН, 1935. – 136 с.
5. Ремез Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. – Киев: Изд-во АН УССР, 1957. – 454 с.
6. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наукова думка, 1969. – 623 с.
7. Schoenberg I.J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart-Appl. Math. – 1946. – Vol. 4. – P. 45 – 99, 112 – 141.
8. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 320 с.
9. Василенко В.А. Сплайн функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с.
10. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 436 с.
11. Справочник программиста / Я.С. Дымарский, Н.Н. Лозинский, А.Т. Макушкин и др. – Ленинград: ГСИ Судостроительные промышленности, 1963. – Т.1. – 628 с.
12. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наукова думка, 1980. – 252 с.
13. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. – 1984. – 600 с.
14. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. – Киев: Техника, 1977. – 208 с.
15. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наукова думка, 1989. – 272 с.
16. Лаущник О.І, Попов Б.О. Алгоритми знаходження рівномірного наближення функцій сплайном с заданою похибкою // Вісник Львівського університету. Серія. мех.-мат. – 1997. – № 46. – С. 96–101.
17. Іскерка І. Математичні моделі фізичних явищ на основі апроксимаційних методів: Автореф. дис… канд. техн. наук. – Львів, 2000. – 17 с.
18. Попов Б.О., Лаущник О.І. Балансне наближення із заданою кількістю ланок // Вісник Державного університету “Львівська політехніка”. – 1998. – Вип. 348. – С.132 – 139.
19. Костенко С.Б., Попов Б.О. Рівномірне наближення модифікованої функції Бесселя // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 125 – 128.
20. Костенко С.Б., Попов Б.О. Рівномірне наближення математичних функцій многочленними сплайнами: задачі та методи прикладної математики // Вісник Львівського університету. – 1995. – Вип. 41. – С. 75 – 79.
21. Попов Б.О, Лаущник О.І. Наближення показникових функцій за допомогою спеціального виразу // Вісник львівського університету. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С.101 – 105.
22. Попов Б.О., Лаущник О.І. Знаходження оптимальної форми раціональних наближень // Відбір і обробка інформації. – 1997. – Вип.11 (87). – С.107 – 110.
23. Лаущник О.І., Попов Б.О. Наближення функцій сплайнами із заданою кількістю ланок // Вісник львівського університету. Серія мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С.153 – 156.
24. Попов Б.А. Використання комп’ютерної алгебри при побудові алгоритмів апроксимації // Математичні машини і системи. – 1999. – № 1. – С. 16 – 29.
25. Іскерка І., Попов В. Оптимальне початкове наближення для W-функції Ламберта // Математичні машини і системи. – 1999. – № 2. – С. 3 – 11.
26. Попов Б.О, Лаущник О.І. Побудова оптимального алгоритму для обчислення функції оберненої до інтегралу ймовірності // Волинський математичний вісник. – 1999. – Bun. 6. – С. 107 – 112.
27. Попов Б.О., Лаущник О.І., Сущик К.В. Нелінійні аппроксимаційні моделі // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2002. – Bun. 5. –С. 32 – 38.
28. Numberger G. Approximation by Spline Function. – N.Y.: Springer–Verbag, 1989. – 416 p.
29. Лаушник О.І. Застосування балансного наближення чебишовськими раціональними сплайнами для моделювання сенсорів фізичних величин: Авторефер. дис… канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2004. – 20 с.
30. Попов Б.О. Розв’язування задач у системі комп’ютерної алгебри Maple V. – Київ: VIP. – 312 с.
31. Popov B., Laushnyk O. A package of function approximation. – Waterloo Maple, 2001. – 40 p.