ГОРБАНЬ ИГОРЬ ИЛЬИЧ
доктор технических наук
профессор

Научные интересы:

- теория вероятностей и математическая статистика
- гидроакустика и радиолокация
- пространственно-временная обработка сигналов

НАУКОВА ДУМКА

И. И. ГОРБАНЬ СЛУЧАЙНОСТЬ И ГИПЕРСЛУЧАЙНОСТЬ

И.И. ГОРБАНЬ

СЛУЧАЙНОСТЬ И ГИПЕРСЛУЧАЙНОСТЬ

НАУКОВА
ДУМКА

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН И СИСТЕМ

И. И. ГОРБАНЬ

СЛУЧАЙНОСТЬ И ГИПЕРСЛУЧАЙНОСТЬ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 2016

УДК 53.01:53.05 + 519.2

Монография посвящена исследованию физического феномена статистической устойчивости и сравнению двух теорий, описывающих его: теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

Для научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также для студентов университетов физических, технических и математических специальностей.

Монографія присвячена дослідженню фізичного феномену статистичної стійкості і порівнянню двох теорій, що описують його: теорії ймовірностей і теорії гіпервипадкових явищ.

Для науковців, інженерів і аспірантів, які досліджують статистичні закономірності реальних фізичних явищ, розробляють і використовують статистичні методи високоточних вимірювань, прогнозування та обробки сигналів на великих інтервалах спостереження, а також для студентів університетів фізичних, технічних і математичних спеціальностей.

The monograph is dedicated to study of the physical phenomenon of statistical stability, and also to the comparing of two theories that describe it: the probability theory and the theory of hyper-random phenomena.

It is oriented on scientists, engineers, and post-graduate students researching in statistical laws of natural physical phenomena as well as developing and using statistical methods for high-precision measuring, prediction and signal processing on long observation intervals. The book may also be useful for university students majoring in physical, engineering, and mathematical fields.

Р е ц е н з е н т ы:

чл.-кор. НАН Украины, д-р техн. наук, проф. *В.Ф. Губарев*
д-р техн. наук, проф. *Ю.Ф. Зиньковский*
д-р физ.-мат. наук, проф. *А.С. Мазманишвили*
д-р техн. наук *А.М. Резник*

Рекомендована к изданию ученым советом
Института проблем математических машин и систем НАН Украины
(*протокол № 10 от 17.09.2014 г.*)

Научно-издательский отдел
физико-математической и технической литературы

Редактор *В.В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1561-6

Предисловие

Одним из удивительных *физических феноменов* является **феномен статистической устойчивости** массовых явлений, проявляющийся в стабильности *статистик* (функций выборки).

В настоящее время известно две теории, описывающие этот феномен: классическая *теория вероятностей*, имеющая многовековую историю развития, и *теория гиперслучайных явлений*, разрабатываемая в последние десятилетия.

Теория вероятностей зарекомендовала себя как мощнейший инструмент решения различных статистических задач. Сложилось даже мнение, что любая задача статистики может быть эффективно решена в рамках парадигмы теории вероятностей. Однако, как выяснилось, это не так.

Некоторые выводы теории вероятностей не согласуются с опытными данными. Типичный пример касается потенциальной точности измерений. Согласно теории вероятностей при увеличении объема обрабатываемых данных случайная погрешность измерения физических величин стремится к нулю. Но реальная точность измерений всегда ограничена. Как показывает практика, преодолеть существующий предел точности путем статистической обработки данных невозможно.

Исследование причин расхождений между теорией и практикой привело к пониманию, что проблема связана с *необоснованной идеализацией феномена статистической устойчивости*.

Теория вероятностей, по сути, — *физико-математическая дисциплина*. Современная математическая ее часть базируется на аксиоматике А.Н. Колмогорова, а физическая — на *физической гипотезе идеальной статистической устойчивости реальных физических явлений*, предполагающей *наличие сходимости статистик* при неограниченном увеличении объема выборки.

Однако результаты многочисленных экспериментальных исследований различных реальных физических процессов на больших интервалах наблюдения показывают, что *реальные статистики свойством сходимости не обладают*.

При относительно небольшом объеме выборки увеличение числа отсчетов приводит к уменьшению флуктуации средних величин. Но при большом объеме эта тенденция не наблюдается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не изменяется или даже растет.

Отсутствие сходимости статистик практически не сказывается на результатах, если объем обрабатываемых данных невелик, но весьма существенно при обработке большого объема данных.

Теория гиперслучайных явлений также *физико-математическая теория*. Математическая ее составляющая базируется на аксиоматике и положениях математической части теории вероятностей и поэтому может рассматриваться как *ветвь теории вероятностей*. Физическая же часть основана на гипотезе, существенно отличающейся от физической гипотезы теории вероятностей, а именно: на *гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений*, предполагающей отсутствие сходимости статистик при неограниченном увеличении объема выборки.

Существует масса литературы по теории вероятностей. Да и по теории гиперслучайных явлений написано уже немало — одних только монографий, как минимум, пять [Горбань 2007 (1), 2011 (1), 2014 (1), Уваров, Зіньковський 2011 (1, 2)].

Однако среди них *нет книг, описывающих обе теории с единых позиций, сравнивающих их между собой и раскрывающих на концептуальном уровне их физическую и математическую суть*. Предлагаемая *обобщающая монография* призвана восполнить имеющийся пробел.

* * *

Книга имеет физико-технический уклон и ориентирована на научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также на студентов университетов физических, технических и математических специальностей.

Для понимания материала книги достаточно знания высшей математики в объеме первого курса технических университетов.

* * *

Книга логически разделена на пять частей. *Первая часть* посвящена описанию физического феномена статистической устойчивости, *вторая* — изложению основ теории вероятностей, *третья* — описанию методики оценки нарушений статистической устойчивости и результатам исследования статистической устойчивости процессов разной физической природы, *четвертая* — изложению основ теории гиперслучайных явлений и *пятая* — обсуждению проблемы адекватного описания мира.

Читатели, знакомые с теорией вероятностей в объеме типового курса технических университетов, могут пропустить вторую часть и после вводной первой части (ознакомление с которой желательно) сразу приступить к чтению третьей части.

* * *

Рассматриваемые в книге вопросы лежат на стыке физики, математики и технических приложений. Поэтому к рецензированию были привлечены ученые разных специальностей.

Автор признателен всем, кто прочитал рукопись, высказал свои критические замечания и принял участие в конструктивном ее обсуждении.

Особую благодарность автор хотел бы выразить официальным рецензентам: чл.-кор. НАН Украины, д.т.н., проф. В.Ф. Губареву, д.т.н., проф. Ю.Ф. Зиньковскому, д.ф.-м.н., проф. А.С. Мазманишвили и д.т.н. А.М. Living Резнику, детально ознакомившихся с рукописью и высказавших ряд критических замечаний, способствовавших улучшению содержания книги.

Автор благодарен чл.-кор. НАН Украины П.М. Томчуку, чл.-кор. АН Молдавии К.В. Гаиндрику, д.ф.-м.н., проф. О.Г. Сарбею, д.т.н., проф. В.И. Иваненко, д.т.н., проф. В.А. Касьянову и д.т.н., проф. М.И. Шлезингеру за предоставленные возможности выступить на руководимых ими семинарах, а также всем участникам этих семинаров за плодотворное обсуждение материалов настоящей и предыдущих монографий, касающихся феномена статистической устойчивости.

Автор признателен акад. НАН Украины И.Н. Коваленко, акад. НАН Украины В.Т. Гринченко, акад. РАН В.А. Акуличеву, акад. РАН Р.И. Нигматулину, акад. РАН Ю.И. Шокину, чл.-кор. НАН Украины П.С. Кнопову, чл.-кор. НАН Украины Н.Ю. Кузнецову, чл.-кор. НАН Украины В.С. Лысенко, д.ф.-м.н., проф. В.Н. Тутубалину, д.ф.-м.н., проф. Г.П. Буцану, д.т.н., проф. А.В. Харченко, д.ф.-м.н., проф. С.П. Шарому, д.ф.-м.н. И.О. Ярощуку и многим другим, проявляющим устойчивый интерес к проводимым им исследованиям, в частности в области теории гиперслучайных явлений.

Автор благодарен директору ИПММС НАН Украины акад. НАН Украины д.т.н., проф. А.А. Морозову и заместителю директора по научной работе д.ф.-м.н., проф. В.П. Клименко за поддержку, оказанную ими при подготовке монографии.

* * *

Замечания и рекомендации можно направлять автору по адресу:
Институт проблем математических машин и систем
НАН Украины
пр. Глушкова, 42, Киев, 03680, Украина,
адрес электронной почты: igor.gorban@yahoo.com.

Введение

Физический феномен статистической устойчивости. Едва ли найдется человек, который, подбрасывая монету, не пытался угадать, что выпадет: орел или решка. Невозможно безошибочно предугадать результат броска. Однако, *многократно* повторяя опыты, можно установить удивительную закономерность: частота выпадения орла (или решки) практически не зависит от количества опытов. Обнаруживаемая в этой игре устойчивость частоты событий является проявлением фундаментального *физического закона природы — феномена статистической устойчивости.*

Проводя многократно измерения физических величин, можно установить, что разброс усредненных величин оказывается меньше, чем разброс результатов одиночных измерений. Это тоже проявление феномена статистической устойчивости.

В общем случае под феноменом статистической устойчивости понимается *эффект стабильности* (*устойчивости*) *средних величин*, а точнее, *стабильности статистик* — функций выборки.

В настоящее время известно две теории, описывающие этот феномен: классическая *теория вероятностей*, имеющая многовековую историю развития, и относительно новая *теория гиперслучайных явлений.*

Хотя словосочетание «гиперслучайное явление» вошло в научную литературу лишь в 2005 г. [Горбань 2005(1)], однако основы теории гиперслучайных явлений начали формироваться еще на рубеже 70-х — 80-х годов прошлого столетия.

Предлагаемая книга посвящена исследованию феномена статистической устойчивости и сравнению описывающих его теорий.

Характер рассматриваемых теорий. Обе рассматриваемые теории — *физико-математические.* Каждая состоит из двух частей: *математической* и *физической.* Математическая часть оперирует с абстрактными математическими моделями, а физическая — с реальными объектами окружающего мира.

Обратим внимание, что физическая часть играет чрезвычайно важную роль, обеспечивая связь между реальным физическим миром и абстрактным миром математическим моделей.

Теория вероятностей. *Математическая составляющая теории вероятностей* изучает различные *случайные явления: случайные события, величины, процессы и поля.*

Под *случайным явлением* подразумевается *абстрактный математический объект* (*модель*), удовлетворяющий определенным математическим аксиомам (аксиомам А.Н. Колмогорова).

Характерными признаками случайного явления являются его *массовость* (существование *множества реализаций*) и наличие у него *вероятностной меры* (*вероятности*), характеризующей частоту наступления любых возможных событий *при бесконечно большом количестве реализаций*.

Последнее означает, что *частота любого события имеет предел*, который интерпретируется как *вероятность* наступления этого события.

Заметим, что массовые явления, которые не имеют вероятностной меры, *случайными не считаются*.

Объект и предмет исследования теории вероятностей. *Объектом исследования математической части теории вероятностей* являются случайные явления, а *предметом исследования — связи между этими математическими моделями*.

Объектом и предметом исследования физической части теории вероятностей, также как и *всей теории в целом*, являются соответственно *физический феномен статистической устойчивости* и *способы описания его с помощью случайных моделей*.

Проблема адекватного описания реальности. *Случайные* (*стохастические* или, иначе, *вероятностные*) *модели*, как и любые другие, дают приближенное описание реальности. Во многих случаях случайные модели обеспечивают приемлемую точность описания реальных явлений (реальных событий, величин, процессов и полей), благодаря чему они нашли столь широкое применение.

Однако не всегда случайные модели в достаточно полной мере отражают специфику реальных явлений. Особенно явно это проявляется при решении различных задач, связанных *с обработкой большого объема данных, получаемых на больших интервалах наблюдения*, в частности при высокоточных измерениях на основе статистической обработки большого числа результатов измерения, при прогнозировании развития событий на больших интервалах наблюдения и решении ряда других задач.

Гипотеза идеальной статистической устойчивости. Исследование причин неадекватности стохастических моделей реальным явлениям показало, что *феномен статистической устойчивости проявляется не совсем так, как его описывают стохастические модели*.

В основе стохастических моделей лежит *физическая гипотеза идеальной статистической устойчивости*, предполагающая сходимость любой реальной статистики, т. е. наличие предела, к которому она стремится при неограниченном увеличении объема выборки.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости не вызывала сомнений, хотя некоторые ученые (среди них даже основоположник аксиоматической теории вероятностей *А.Н. Колмогоров* [Колмогоров 1974, с. 12—14] и такие известные ученые как *А.А. Марков* [Марков 1924, с. 67], *А.В. Скороход* [Иваненко, Лабковский 1990, с. 4], *Э. Борель* [Борель 1961, с. 28, 29], *В.Н. Тутубалин* [Тутубалин, 1972 (2), с. 6, 7] и др.) обращали внимание на то, что в реальном мире эта гипотеза справедлива лишь с определенными оговорками.

Многочисленные исследования реальных процессов разной физической природы *на больших интервалах наблюдения* показали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости *не находит экспериментального подтверждения*.

На относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема данных приводит к уменьшению уровня флуктуаций реальных статистик. Однако при больших объемах эта тенденция *не прослеживается*: достигнув определенной величины, уровень флуктуаций практически не изменяется или возрастает. Это указывает на *отсутствие сходимости реальных статистик* (их *несостоятельность*).

Гипотеза ограниченной статистической устойчивости. Альтернативой гипотезе идеальной статистической устойчивости является *гипотеза ограниченной статистической устойчивости*, предполагающая отсутствие сходимости реальных статистик.

Разработка способов и методов описания реальных физических явлений с учетом нарушений сходимости статистик привела к формированию *физико-математической теории гиперслучайных явлений*.

Теория гиперслучайных явлений. *Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений* изучает различные *гиперслучайные явления: гиперслучайные события, величины, процессы и поля*.

Под *гиперслучайным явлением* понимается абстрактный математический объект, представляющий собой *совокупность соответствующих случайных явлений* (*случайных событий, величин, процессов или полей*).

Характерным признаком гиперслучайного явления, также как и случайного, является его массовость. Однако гиперслучайное явление, в отличие от случайного явления, описывается не одной мерой, а *множеством мер*. Используя множество мер, оказывается возможным описывать не только любое массовое событие, частота наступления которого имеет предел при бесконечно большом количестве реализаций, но также и любое событие, *не имеющее предела*.

Объект и предмет исследования теории гиперслучайных явлений. *Объектом исследования математической части теории гиперслучайных явлений* являются *гиперслучайные явления*, а *предметом исследования — связи между этими математическими моделями*.

Объектом и предметом исследования физической части теории гиперслучайных явлений, также как и *всей теории в целом*, являются соответственно *физический феномен статистической устойчивости* и *способы адекватного его описания с помощью гиперслучайных моделей* (*гиперслучайных явлений*), учитывающих *нарушения статистической устойчивости*.

Общность и различие рассматриваемых теорий. Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений, как и теории вероятностей, базируется на *аксиомах А.Н. Колмогорова* и поэтому с точки зрения математики является ветвью последней.

Однако физические составляющие этих теорий существенно различаются. Физическая часть теории вероятностей основана на двух гипотезах:

- *гипотезе идеальной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей* и
- *гипотезе адекватного описания этих физических явлений случайными моделями.*

Физическая часть теории гиперслучайных явлений основана на других гипотезах:

- *гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей* и
- *гипотезе адекватного описания этих физических явлений гиперслучайными моделями.*

Фактически теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений представляют две разные парадигмы, по-разному интерпретирующие окружающий мир. Одна из них базируется из *концепции устройства мира на случайных* (*вероятностных*), а другая — *на гиперслучайных принципах.*

Области использования теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Хотя и теория вероятностей, и теория гиперслучайных явлений описывают один и тот же феномен статистической устойчивости, области их практического применения разные.

Теория вероятностей, опирающаяся на гипотезу идеальной статистической устойчивости, применима при обработке *небольших объемов статистических данных*, когда можно считать, что *статистические условия практически неизменны.*

Теория гиперслучайных явлений, учитывающая неидеальный характер феномена статистической устойчивости, *ограничений в части объема данных не имеет.* Теоретически она может использоваться как при небольших, так и больших объемах данных, как при отсутствии, так и при наличии нарушений статистической устойчивости.

Однако гиперслучайные модели, как правило, сложнее случайных моделей. Поэтому методы теории гиперслучайных явлений *целесообразно использовать* тогда, когда теория вероятностей *не обеспечивает требуемой адекватности описания физических явлений.* Это имеет место при обработке больших объемов реальных данных, получаемых в *непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях.*

Специфика книги. Настоящая книга написана на базе предыдущих книг автора: трех книг по теории вероятностей и математической статистике [Горбань 1998, 2000, 2003], трех монографий по теории гиперслучайных явлений [Горбань 2007 (1), 2011 (1), 2014 (1)] и трех монографий прикладного плана [Gorban 1998 (1), 2008 (1), Горбань 2008 (1)].

Цель книги — познакомить читателей с феноменом статистической устойчивости и его свойствами, с физическими и математическими основами теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений, описывающих этот феномен, сравнить эти теории, раскрыв их физическую и математическую сущности.

Автор стремился излагать материал как можно проще и доступнее. Старался избегать редко используемых и специальных понятий, терминов и формул и ограничился изложением вопросов, которые

- *раскрывают физическую и математическую суть теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений,*
- *позволяют понять на физическом и математическом уровнях отличие этих теорий друг от друга,*
- *определяют место, занимаемое этими теориями среди других теорий*, и
- *представляют наибольший практический интерес.*

Целевая аудитория. Круг потенциальных читателей новой книги включает *студентов*, имеющих лишь общее представление о математическом анализе, *инженеров* разного профиля, *научных работников*, специализирующихся в различных областях знаний: технике, физике, математике, а также *всех интересующихся феноменом статистической устойчивости и современными методами его описания.*

Учитывая, что не все читатели могут иметь требуемую для понимания материала математическую и инженерную подготовку, в книгу включен ряд вопросов вспомогательного плана. К таковым, в частности, относятся базовые понятия теории множеств и теории меры, понятия обычного и обобщенного пределов, обычного и обобщенного преобразований Винера—Хинчина и др.

Общая структура книги. Книга логически разделена на пять частей.

Первая часть под названием ***«Феномен статистической устойчивости»***, состоящая из вступительной главы, посвящена описанию рассматриваемого физического феномена.

Вторая часть под названием ***«Теория вероятностей»***, включающая главы 2—5, содержит описание *основ* теории вероятностей.

Третья часть под названием ***«Статистическая устойчивость процессов»***, состоящая из одной главы 6, посвящена описанию методики оценки нарушений статистической устойчивости и результатам исследований процессов разного типа на предмет нарушения статистической устойчивости.

Четвертая часть под названием «***Теория гиперслучайных явлений»***, включающая главы 7—10, посвящена описанию *основ* теории гиперслучайных явлений.

Пятая часть под названием ***«Проблема адекватного описания мира»***, включающая главу 11, посвящена обсуждению принципов мироустройства.

Ниже приведены аннотации глав.

Глава 1. Описаны различные проявления физического феномена статистической устойчивости. Рассмотрены варианты интерпретации феномена статистической устойчивости на основе гипотезы идеальной статистической устойчивости и гипотезы ограниченной статистической устойчивости. Обсуждены понятия «одинаковые статистические условия» и «статистически непрогнозируемые условия». Обращено внимание, что вероятность представляет собой математическую абстракцию, которая не имеет физической интерпретации. Описана шестая проблема Д. Гильберта и намечен путь ее решения. Сформулированы физические гипотезы (аксиомы адекватности) теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

Глава 2. Обсуждено понятие «случайное явление». Описаны классический и статистический варианты формализации понятия вероятности. Приведены основные положения теории множеств и теории меры. Представлен вариант аксиоматизации теории вероятностей, предложенный А.Н. Колмогоровым. Введено понятие вероятностного пространства. Приведены аксиомы теории вероятностей, а также теоремы сложения и умножения. Формализовано понятие скалярной случайной величины. Представлены способы описания случайной величины с помощью функции распределения, плотности распределения и моментов, в частности математического ожидания и дисперсии. Приведены примеры скалярных случайных величин с разными законами распределения. Способы описания скалярной случайной величины обобщены на случай векторной случайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании случайных величин и арифметических операциях над ними.

Глава 3. Формализовано понятие случайной функции. Приведена классификация случайных функций. Представлены способы описания случайного процесса с помощью функции распределения, плотности распределения и моментных функций, в частности математического ожидания, дисперсии, корреляционной и ковариационной функций. Рассмотрены стационарные процессы в узком и широком смыслах. Описаны преобразование Винера—Хинчина и обобщенное преобразование Винера—Хинчина. Рассмотрен спектральный способ описания случайного процесса на основе преобразования Винера—Хинчина. Рассмотрены эргодический и фрагментарно-эргодический процессы.

Глава 4. Введены понятия случайной выборки и статистики случайной величины. Рассмотрены оценки вероятностных характеристик и моментов. Приведены сведения об используемых в теории вероятностей типах сходимости, в частности сходимости последовательности случайных величин по вероятности и сходимости по распределению. Рассмотрены в классической интерпретации закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены сведения о статистиках случайных процессов. Обсуждена специфика выборок случайных величин и случайных процессов.

Глава 5. Рассмотрены современные концепции оценки точности измерения. Описаны различные виды погрешности. Рассмотрена классическая детерминированно-случайная модель измерения, допускающая разложение погрешности на систематическую и случайную составляющие. Описаны точечная и интервальная оценки. Применительно к случайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема выборки.

Глава 6. Формализовано понятие статистической устойчивости. Рассмотрены параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению. Введены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Формализовано понятие интервала статистической устойчивости. Установлена зависимость статистической устойчивости процесса от его спектрально-корреляционных характеристик. Приведены результаты теоретических и модельных исследований зависимости статистической устойчивости процесса, описываемого степенной спектральной плотностью мощности, от параметра формы его спектра. Представлены результаты модельных исследований нарушений статистической устойчивости узкополосных процессов. Рассмотрены статистически неустойчивые стационарные процессы. Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости реальных процессов разной физической природы.

Глава 7. Формализовано понятие гиперслучайного события. Рассмотрены свойства гиперслучайных событий. Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Приведены три способа ее описания: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Способы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании гиперслучайных величин и об арифметических операциях над ними.

Глава 8. Формализовано понятие гиперслучайной функции. Приведена классификация гиперслучайных функций. Представлены три способа описания гиперслучайного процесса: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Дано определение стационарного гиперслучайного процесса. Представлен спектральный способ описания стационарных гиперслучайных процессов. Формализованы понятия эргодического гиперслучайного процесса и фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса. Приведены результаты анализа эффективности использования различных подходов к описанию гиперслучайных процессов.

Глава 9. Формализованы понятия гиперслучайной выборки и статистики гиперслучайной величины. Рассмотрены оценки характеристик гиперслучайных величин. Формализованы понятия обобщенного предела, сходимости в обобщенном смысле и спектра предельных точек. Определены понятия сходимости в обобщенном смысле последовательности гиперслучайных величин по вероятности и по функции распределения. Обобщены закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие справедливость обобщенного закона больших чисел и обобщенной центральной предельной теоремы.

Глава 10. Описаны различные модели измерения. Исследована точечная детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Показано, что в общем случае погрешность, соответствующая такой модели, носит гиперслучайный характер и не может быть представлена в виде суммы систематической и случайной составляющих. Применительно к гиперслучайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема гиперслучайной выборки. Описана методика измерения физических величин, соответствующая детерминированно-гиперслучайной модели измерения. Показано, что в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях классическая детерминированно-случайная модель измерения искаженно отражает реальную ситуацию, а детерминированно-гиперслучайная модель — представляет ее адекватно.

Глава 11. Рассмотрены различные подходы к адекватному описанию реального физического мира. Обсужден вопрос о причинах использования случайных и гиперслучайных моделей. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного описания различных математических моделей (детерминированных, случайных, интервальных и гиперслучайных) с помощью функции распределения. Предложена классификация этих моделей. Рассмотрены пути и причины формирования неопределенности. Очерчены области целесообразного использования на практике случайных и гиперслучайных моделей.

В список литературы включены работы отечественных и зарубежных авторов, использованные при написании книги.

ЧАСТЬ I

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Аргумент в карточной игре (Стен Ян, 1660-е, картинная галерея, Берлин—Далем)

Академик АН СССР А.Н. Колмогоров:

— Допущение о вероятном характере испытаний, т. е. о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о «случайности» какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу $\mu/n \to p$ не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией (Колмогоров 1956, с. 274, 275).

Г. Корн, Т. Корн:

— Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом. Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема выборки (физический закон больших чисел) (Корн, Корн 1977, с. 607).

Глава 1 Физический феномен статистической устойчивости

Описаны различные проявления физического феномена статистической устойчивости. Рассмотрены варианты интерпретации феномена статистической устойчивости на основе гипотезы идеальной статистической устойчивости и гипотезы ограниченной статистической устойчивости. Обсуждены понятия «одинаковые статистические условия» и «статистически непрогнозируемые условия». Обращено внимание, что вероятность представляет собой математическую абстракцию, которая не имеет физической интерпретации. Описана шестая проблема Д. Гильберта и намечен путь ее решения. Сформулированы физические гипотезы (аксиомы адекватности) теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

1.1 Проявление феномена статистической устойчивости

Одним из удивительных физических феноменов является *феномен статистической устойчивости*, проявляющийся в *стабильности частоты событий*, *средних величин* и *других функций выборки*, называемых *статистиками*.

На феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание в 1669 г. торговец сукном *Дж. Граунт* [Graunt 1939]. Сохранились отрывочные сведения об исследованиях статистической устойчивости, проводимых в период с конца XVII по конец XIX столетия *Я. Бернулли, У. Пети, Х. Гюйгенсом, Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, А. Курно, А. Кетле*, и др. [Майстров 1980, Шейнин 2009, Чайковский 2004].

Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX века. Немецкий статистик *В. Лексис* в 1879 г. впервые попытался связать понятие статистической устойчивости частоты с *дисперсией* (разбросом значений) случайной величины [Шейнин 2009]. На рубеже столетий и в начале XX века исследованием статистической устойчивости занимались *К. Пирсон, А.А. Чупров, В.И. фон Борткевич, А.А. Марков, Р. фон Мизес* и др. [Шейнин 2009, Чайковский 2004].

Рассмотрим различные проявления этого феномена. Начнем со статистической устойчивости частоты событий.

1.1.1 Статистическая устойчивость частоты событий

Вспомним известную игру в орлянку, состоящую в подбрасывании монеты и угадывании выпавшей стороны. Выпасть может или орел (сторона, на которой изображен герб), или решка (сторона, на которой указан номинал монеты) (рис.1.1 **а**).

а

б

Рис. 1.1. Монета (**а**) и игральный кубик (**б**)

Угадать точно, какая сторона выпадет, невозможно. Но, принимая во внимание равновозможность выпадения любой из сторон, представляется естественным предположить, что при большом числе подбрасываний примерно в 50% случаев будет выпадать орел и примерно в 50% случаев — решка. Иначе, *частоты* $p_n(O) = n_o / n$, $p_n(P) = n_p / n$ *этих двух событий*, рассчитываемые как отношение числа выпадений соответственно орла n_o и решки n_p к общему числу опытов n, будет примерно равняться $0,5$.

Экспериментальные исследования частоты выпадения сторон монеты проводили многие ученые, среди которых были *П.С. Лаплас, Г. Бюффон, К. Пирсон,* лауреат Нобелевской премии *Р. Фейнман, А. де Морган, В.С. Джевонс, В.И. Романовский, У. Феллер* и др. На первый взгляд совершенно тривиальная задача для них таковой не представлялась.

В табл. 1.1 и на рис. 1.2 **а** приведены некоторые результаты их экспериментов [Гнеденко 1961, 1988, Фейнман, Лейтон, Сэндс 1965, Рожков 1996]. В табл. 1.2 и на рис. 1.2 **б** представлены результаты десяти серий экспериментов по подбрасыванию монеты по 1000 испытаний в каждой серии [Мостеллер, Рурке, Томас 1969, с. 91].

Таблица 1.1

№	Исследователь	Количество опытов	Число выпадений орла	Частота выпадений орла
1	Бюффон	4 040	2 048	0,508
2	Пирсон	12 000	6 019	0,5016
3	Пирсон	24 000	12 012	0,5005
4	Фейнман	3 000	1 492	0,497
5	Морган	4 092	2 048	0,5005
6	Джевонс	20 480	10 379	0,5068
7	Романовский	80 640	39 699	0,4923
8	Феллер	10 000	4 979	0,4979

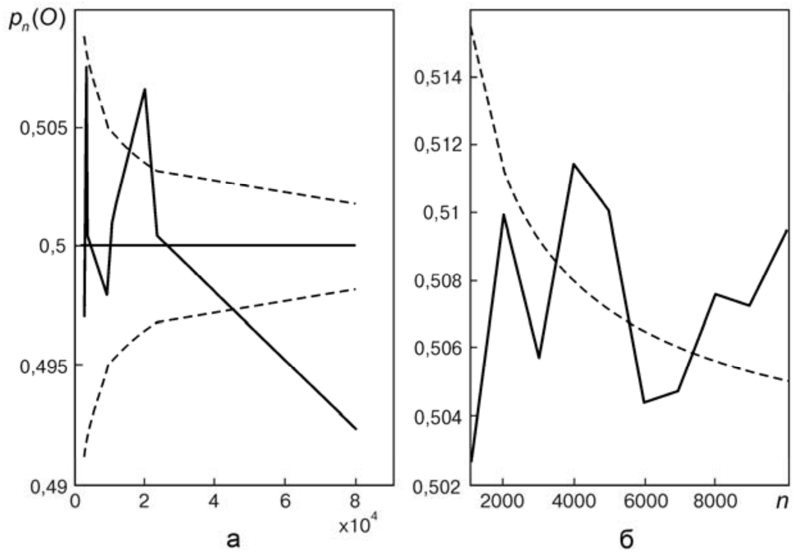


Рис. 1.2. Зависимости частоты выпадения орла $p_n(O)$ от количества опытов n по данным табл. 1.1 (**а**) и табл. 1.2 (**б**). Пунктирными линиями изображены среднеквадратические отклонения от предполагаемого значения, равного 0,5

Таблица 1.2

№ серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число выпадений орла	502	518	497	529	504	476	507	528	504	529

Как видно из таблиц и рисунков, предположение о том, что при большом количестве опытов частота выпадения орла примерно равна $0,5$, полностью подтверждается.

Интригующим результатом этих экспериментов является даже не то, что при большом количестве бросков частота выпадения определенной стороны монеты примерно равна $0,5$, а *факт стабильности* (*устойчивости*) *этой частоты* — слабая зависимость от числа бросков n.

При многократном подбрасывании симметричного игрального кубика (рис.1.1 **б**) частота выпадения любой из его сторон также проявляет свойство стабильности. Эта величина близка к $1/6$.

Экспериментальные исследования других реальных физических событий показывают, что при большом количестве опытов частоты событий стабилизируются, что указывает на *фундаментальный характер феномена статистической устойчивости.*

Этот феномен обладает свойством *эмерджентности* (*системного эффекта*).

Под *системой*[1] подразумевается множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство.

Под *эмерджентностью*[2] понимается существование у системы некоторых свойств, не присущих отдельным ее подсистемам и элементам. Эмерджентность является одной из форм проявления *закона перехода количественных изменений в качественные.*

Примером системы, обладающей эмерджентными свойствами, является стая рыб или птиц, поведение которой сильно отличается от поведения входящих в нее особей. Эмерджентные свойства демонстрирует групповое поведение людей в социуме. Отличие свойств химических веществ от свойств, входящих в них химических элементов — также проявление эмерджентности. Свойство самолета летать — эмерджентное свойство, поскольку составляющие его части таким свойством не обладают.

Статистическая устойчивость частоты — свойство *массовых* (множественных) *событий*. Это свойство не присуще одиночному событию, но присуще их совокупности. Поэтому *статистическую устойчивость частоты можно рассматривать как эмерджентное свойство.*

Механизм формирования эмерджентности не всегда ясен. Если, например, специфическое поведение стаи рыб, отличие свойств химических веществ от свойств, входящих в них химических элементов, или свойство самолета летать можно объяснить наличием определенных связей между элементами системы, то феномен статистической устойчивости частоты событий при отсутст-

---

[1] Слово система переводится с древнегреческого языка как целое, составленное из частей, соединение.

[2] Слово *эмерджентность* (*emergence*) переводится с английского языка как возникающий, неожиданно появляющийся.

вии какой-либо явной связи между отдельными событиями представляется в значительной мере загадочным.

Природа феномена статистической устойчивости частоты событий остается до конца непонятной. Предпринимаемые на протяжении веков попытки прояснить ситуацию не привели к какому-либо существенному положительному результату.

Объяснение этого феномена остается на том же уровне, что и объяснение других фундаментальных физических феноменов, таких как феномены существования электромагнитного поля, гравитационного поля, инерционности материальных тел и др.

Однако заметим, отсутствие ясного понимания сущности того или иного физического феномена не служит препятствием для построения *феноменологических теорий*, оказывающихся полезными для решения практических задач.

Незнание причин смены сезонов не препятствовало созданию в древности календаря, чрезвычайно полезного для ведения сельского хозяйства, а незнание причин действия законов Ньютона или законов электромагнитного поля, описываемых уравнениями Максвелла, не является препятствием для широчайшего их использования в науке и технике.

Обратим внимание, что *все теории естествознания*, в том числе *все физические теории*, являются *феноменологическими*. В их основе лежат не объяснимые физические феномены, принимаемые как *неоспоримые истины*.

В рамках этих теорий не ставится вопрос о причинах, вызывающих тот или иной феномен. Основное внимание уделяется другим вопросам, в первую очередь *особенностям проявления феномена в реальном мире* и *адекватному его описанию математическими средствами*.

В полной мере это относится и к теориям, описывающим феномен статистической устойчивости, — *теории вероятностей* и *теории гиперслучайных явлений*.

1.1.2 Статистическая устойчивость статистик

Феномен статистической устойчивости проявляется не только в стабильности частоты массовых событий, но и в *стабильности средних значений* $y(t)$ различных процессов $x(t)$, а также их *выборочных средних* y_n, вычисляемых путем усреднения дискретных отсчетов выборки $x_1,\ldots,x_n$:

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{1.1}$$

Обратим внимание, что феномен статистической устойчивости наблюдается при усреднении процессов разного типа: *случайных, детерминированных и реальных физических процессов.*

Для иллюстрации на рис. 1.3 **а** и 1.3 **в** приведены реализация случайного шума и фрагмент периодического детерминированного процесса $x(t)$, а на рис. 1.3 **б** и 1.3 **г** — соответствующие выборочные средние $y(t)$, рассчитанные на интервале от 0 до текущего значения аргумента t.

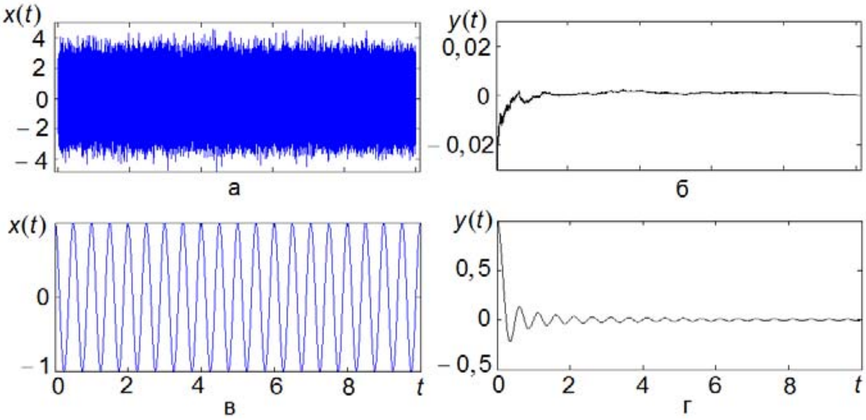


Рис. 1.3. Реализация белого гауссовского шума (**а**), фрагмент косинусоиды (**в**) и соответствующие им выборочные средние (**б**, **г**)

На рис. 1.3 **б** и 1.3 **в** хорошо видно, что по мере увеличения интервала усреднения t средние значения реализаций случайного и детерминированного процессов стабилизируются и уровень флуктуаций усредненных величин уменьшается.

На рис. 1.4 **а** приведен фрагмент записи эффективного (действующего) значения напряжения $x(t)$ городской электросети[3] длительностью 1,8 ч, содержащий 32 тысячи дискретных отсчетов (период дискретизации 0,2 с), а на рис. 1.4 **б** — выборочное среднее $y(t)$ колебания $x(t)$.

[3] Исследования проводились в г. Киеве.

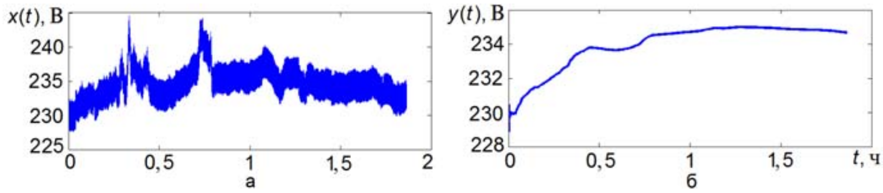


Рис. 1.4. Изменения напряжения городской электросети на протяжении 1,8 ч наблюдения (**а**) и соответствующего выборочного среднего (**б**)

Как следует из рисунка, на интервале наблюдения напряжение $x(t)$ флуктуирует в диапазоне от 228 В до 250 В, а среднее значение $y(t)$ плавно изменяется. Исходное колебание $x(t)$ представляет собой явно незатухающий процесс, а среднее значение $y(t)$ проявляет тенденцию стремления к определенному значению (в районе 234 В). На протяжении первых 30 минут наблюдения среднее значение изменяется от 228 В до 234 В (перепад составляет 6 В), а на протяжении последних 30 минут — от 235 В до 234,7 В (перепад равен 0,3 В).

Таким образом, увеличение времени усреднения привело к существенному уменьшению размаха средней величины (в 20 раз) и стабилизации ее значения.

Рассмотрим колебание $x(t)$ минимальной суточной температуры воздуха в районе Киева в период с 1881 г. по 1903 г. [Архив погоды по городам СНГ] (рис. 1.5 **а**). Зависимость среднего значения минимальной суточной температуры $y(t)$ от времени усреднения t представлена на рис. 1.5 **б**.

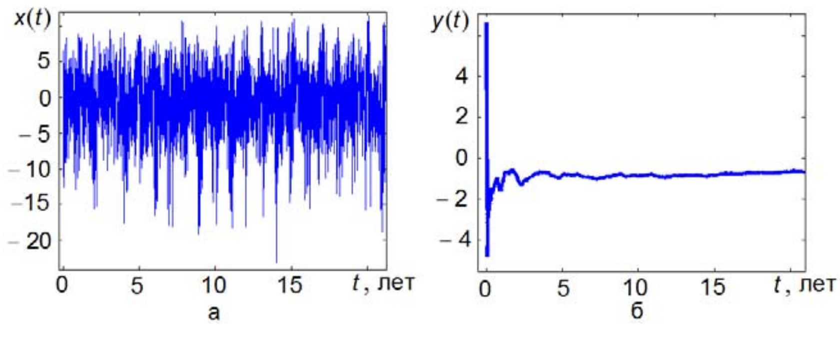


Рис. 1.5. Изменения минимальной суточной температуры воздуха в Киеве (**а**) и ее средней величины (**б**) за 22 года наблюдения

Как видно из рисунков, сезонные колебания минимальной суточной температуры воздуха, присутствующие в исходном процессе $x(t)$, обнаруживаются и в процессе $y(t)$, хотя и в ослабленном виде. При небольшом времени усреднения размах значений средней величины составляет примерно одиннадцать градусов, при большом же времени усреднения — менее полуградуса.

Таким образом, размах значений средней величины уменьшился более чем в 20 раз и средняя величина приобрела стабильность.

Феномен статистической устойчивости наблюдается при вычислении не только средних величин, но также и других *статистик*, в частности, *выборочного среднеквадратического отклонения* (*СКО*) z_n, определяемого как корень квадратный из среднего квадрата отклонения отсчетов от выборочного среднего:

$$z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_n)^2} \quad (n = 2,3,\ldots)\,. \tag{1.2}$$

Исследование большого количества разнообразных процессов показывает, что

феномен статистической устойчивости проявляется при вычислении *статистик различных случайных, детерминированных и реальных физических процессов*, что свидетельствует *о фундаментальном его характере.*

1.2 Варианты интерпретации феномена статистической устойчивости

1.2.1 Идеальная статистическая устойчивость

Анализируя табл. 1.1, 1.2 и учитывая статистическую устойчивость реальных массовых физических событий, представляется естественным *предположить*, что при неограниченном увеличении числа повторов n уровень флуктуации частоты $p_n(A)$ *любого реального события* A стремится к нулю. Анализируя же изображенные на рис. 1.3 **б**, 1.4 **б** и 1.5 **б** процессы, *можно предположить*, что при неограниченном увеличении объема выборки n (увеличении времени наблюдения t) уровень флуктуации выборочного среднего y_n *любого случайного или реального физического колебания* $x(t)$ также стремится к нулю.

Иными словами, можно *выдвинуть гипотезу*, что имеет место *сходимость* последовательности $p_1(A), p_2(A), \ldots$ частот события A к некоторой детерминированной величине $P(A)$ и *сходимость* последовательности $y_1, y_2, \ldots$ средних величин к некоторой детерминированной величине m, т. е. разности между частотой $p_n(A)$ и величиной $P(A)$, а также между средней величиной y_n и величиной m равны *бесконечно малой величине* $o(n)$:

$$p_n(A) - P(A) = o(n), \tag{1.3}$$

$$y_n - m = o(n). \tag{1.4}$$

В классическом математическом анализе (см., например, [Фихтенгольц 1958]) под *бесконечно малой величиной* $o(n)$ понимается (рис. 1.6 **а**) *переменная величина* (*варианта*), *абсолютная величина которой*, начиная с некоторого $n = N_\varepsilon$, становится и остается меньшей *любого сколь угодно малого наперед заданного* положительного числа ε[4].

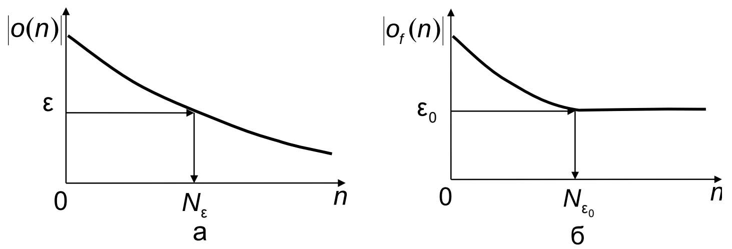


Рис. 1.6. Иллюстрация бесконечно малой величины $o(n)$ (**а**) и ограничено малой величины $o_f(n)$ (**б**)

При устремлении n к бесконечности бесконечно малая величина $o(n)$ стремится к нулю, т. е. ее *предел*, обозначаемый $\lim\limits_{n\to\infty} o(n)$, *равен нулю*.

---

[4] Существуют и другие трактовки понятия бесконечно малой величины. В *нестандартном анализе*, например, разрабатываемом с середины XX века [Успенский 1987, Гордон, Кусраев, Кутателадзе 2011] под бесконечно малой величиной понимается однозначная величина особого типа, относящаяся к классу *нестандартных чисел*, которые совместно с множеством действительных чисел образуют множество так называемых *гипердействительных чисел*.

Из выражений (1.3) и (1.4) следует, что *при наличии сходимости* предел частоты

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) = P(A)\,, \tag{1.5}$$

а предел среднего

$$\lim_{n\to\infty} y_n = m\,. \tag{1.6}$$

Современная *теория вероятностей* базируется на *гипотезе идеальной статистической устойчивости* или, иначе говоря, на *предположении сходимости статистик*.

При этом величина $P(A)$ трактуется как *вероятность* события A, а величина m — как *математическое ожидание процесса* $x(t)$ [5].

Многие годы считалось, что *гипотеза идеальной статистической устойчивости адекватно отражает реальность*.

Однако ряд ученых (среди которых даже основоположник современной аксиоматической теории вероятностей *А.Н. Колмогоров* и такие известные ученые как *А.А. Марков*, *А.В. Скороход*, *Э. Борель*, *В.Н. Тутубалин* и др.) отмечали, что *идеальная статистическая устойчивость справедлива лишь с определенными оговорками*. Они подозревали, что теория вероятностей описывает реальные физические явления не совсем адекватно.

Реальная жизнь действительно устроена не совсем так, как представляет ее теория вероятностей. Задуматься над этим заставляет картина художника эпохи Ренессанса, далекого от проблем физики и математики, но остро чувствовавшего сложность и многообразие факторов, влияющих на ход и развитие реальных событий окружающего мира (см. репродукцию картины Стен Яна на с. 15).

1.2.2 Ограниченная статистическая устойчивость

Обратим внимание, что возможность адекватного описания частоты событий и выборочного среднего процессов выражениями (1.3)—(1.6) — не более как *предположение*. Оно *не следует* из каких-либо экспериментов и, тем более, из логических умозаключений.

Результаты, в частности, опытов с монетой *не подтверждают предположение о наличии сходимости частоты к величине* $0{,}5$. Более

[5] Более точное определение этих понятий приведено в главах 2 и 3.

того, графики на рис. 1.2, скорее, указывают на отсутствие сходимости, чем на ее наличие.

Нетрудно убедиться, что не все процессы, причем даже колебательного типа, обладают свойством статистической устойчивости. Для примера на рис. 1.7 **а** и рис. 1.7 **в** приведены два детерминированных колебания $x(t)$, а на рис. 1.7 **б** и рис. 1.7 **г** — их выборочные средние $y(t)$. В обоих случаях, как видно из рисунка, выборочные средние не стабилизируются, т. е. колебания $x(t)$ статистически неустойчивы.

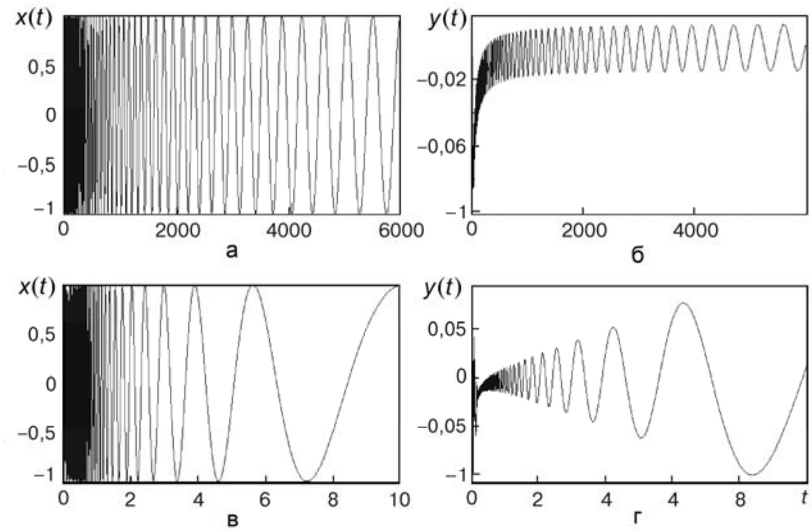


Рис. 1.7. Статистически неустойчивые колебания (**а**, **в**) и соответствующие им выборочные средние (**б**, **г**)

Результаты множества экспериментальных исследований *реальных физических процессов* при больших объемах данных показывают, что последовательности $p_1(A), p_2(A),\ldots$ и $y_1, y_2,\ldots$ *тенденции к сходимости не проявляют*, а, следовательно, равенства (1.3)—(1.6) *несправедливы*[6].

Хотя обычно тенденция стабилизации частоты событий и средних величин хорошо прослеживается *при относительно небольшом объеме данных, при большом их объеме она не фиксируется*. Это указывает на то, что феномен статистической устойчивости носит *не идеальный*, а *ограниченный характер.*

[6] Описанию экспериментов, приводящих к такому выводу, посвящена глава 6.

В подтверждение на рис. 1.8 **а** приведен 60-часовой фрагмент, той же, что и на рис. 1.4 **а**, записи колебания напряжения $x(t)$ городской электросети, а на рис. 1.8 **б** — соответствующее среднее $y(t)$.

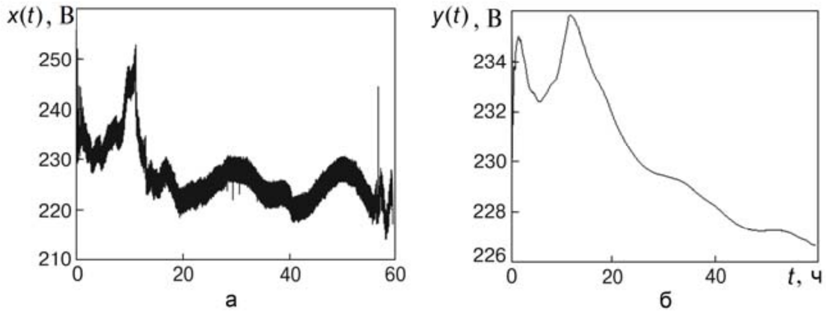


Рис. 1.8. Изменения напряжения городской электросети на протяжении 60 ч наблюдения (**а**) и соответствующего выборочного среднего (**б**)

Процессы, изображенные на рис. 1.4 **б** и рис. 1.8 **б**, существенно различаются. В процессе на рис. 1.4 **б** можно усмотреть тенденцию к стабилизации среднего; в значительно же более длительном процессе на рис. 1.8 **б** нет даже намека на стабилизацию.

На рис. 1.9 **а** приведено колебание минимальной суточной температуры воздуха в районе Киева за период времени в пять раз больший, чем на рис. 1.5 **а** (с 1881 по 1992 гг.), а на рис. 1.9 **б** — изменение его среднего.

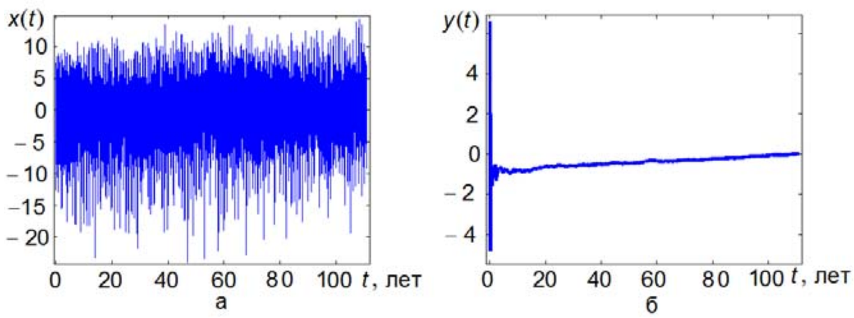


Рис. 1.9. Изменения минимальной суточной температуры воздуха в Киеве (**а**) и соответствующей средней величины (**б**) за 112 лет наблюдения

Как следует из рис. 1.5 **б** и 1.9 **б**, наблюдение за динамикой изменения средней температуры $y(t)$ на протяжении двух десятков лет не позволяет выявить нарушение статистической устойчивости, однако наблюдение в течение значительно большего промежутка времени обнаруживает явную нестабильность среднего.

Ограниченный характер статистической устойчивости реальных событий и выборочных средних процессов означает, что разности между частотой $p_n(A)$ и любой фиксированной величиной $P(A)$, а также между средней величиной y_n и любой фиксированной величиной m равны *ограничено* (*конечно*) *малой величине* $o_f(n)$:

$$p_n(A) - P(A) = o_f(n)\,, \tag{1.7}$$

$$y_n - m = o_f(n)\,. \tag{1.8}$$

Под *ограничено малой величиной* $o_f(n)$ *порядка* ε_0 понимается (рис. 1.6 **б**) *переменная величина, абсолютное значение которой*, начиная с некоторого $n = N_{\varepsilon_0}$, становится и остается меньше *определенного положительного числа* ε_0.

Следует обратить внимание, что в данном случае *ни при каком фиксированном значении* величины $P(A)$ или величины m величина ε_0 *не равна нулю.*

Это означает, что при устремлении n к бесконечности ограничено малая величина $o_f(n)$ не стремится к нулю, а остается в интервале $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Иными словами, *ограничено малая величина обычного предела не имеет.* В этом ее *принципиальное отличие* от бесконечно малой величины, имеющей предел при $n \to \infty$.

В отличие от теории вероятностей *теория гиперслучайных явлений* учитывает отсутствие сходимости статистик, т. е. *исходит из предположения об ограниченной их статистической устойчивости.*

Таким образом, различие между теорией вероятностей и теорией гиперслучайных явлений состоит в *разных интерпретациях феномена статистической устойчивости.*

1.3 Одинаковые и статистически непрогнозируемые условия

Объясняя в рамках теории вероятностей феномен статистической устойчивости, обычно обращают внимание на необходимость проведения опытов *в одинаковых статистических условиях.*

«Одинаковые статистические условия» не такое тривиальное понятие, как может показаться на первый взгляд, да и словосочетание «статистические условия» требует некоторого пояснения.

В экспериментах, например, с подбрасыванием монеты под статистическими условиями можно понимать способ бросания монеты, высоту и силу броска, скорость и направление движения воздушных потоков, степень шероховатости поверхности, на которую падает монета, и т. д. При этом каждый из перечисленных пунктов может быть детализирован.

Если бы совокупность всех условий проведения эксперимента полностью воспроизводилась в каждом опыте, то результаты опытов были бы одинаковыми. Но достичь этого невозможно.

«Одинаковые статистические условия» нельзя понимать буквально. Всегда при экспериментальных исследованиях часть условий изменяется от опыта к опыту, причем неконтролируемым для экспериментатора образом. Это приводит к тому, что результаты (исходы) опытов перестают быть точно предсказуемыми. Изменение условий при переходе к очередному опыту может приводить (хотя и необязательно) к исходу, отличающемуся от результата предыдущего опыта.

При относительно небольшом количестве опытов статистика (в частности частота события) существенно зависит от числа опытов n, условий, при которых проводится каждый опыт, и очередности смены этих условий.

При наличии сходимости по мере увеличения числа опытов статистика все в меньшей и меньшей степени зависит от условий и порядка смены условий. Оно даже перестает зависеть от условий, при которых проводятся любое *ограниченное число опытов.*

Когда говорят о проведении опытов *в одинаковых статистических условиях*, имеют в виду, что опыты проводятся не обязательно в фиксированных (неизменных) условиях, а, возможно, даже в изменяющихся условиях, но, что главное, *в таких условиях, при которых обеспечивается сходимость рассматриваемой статистики* (*параметра*) *к определенному пределу.*

Наличие сходимости означает потенциальную возможность (теоретически) *абсолютно точного* при бесконечном объеме выборки *статистического прогноза развития событий* или *получения оценки с нулевой погрешностью.*

Как видим, широко используемый термин «одинаковые статистические условия» оказывается не очень удачным. В него вкладывается не тот смысл, как можно было бы предполагать.

Обратим внимание, что для разных статистик (например, для выборочного среднего (1.1) и выборочного среднеквадратического отклонения (1.2)) условия, при которых обеспечивается сходимость, *могут различаться*. Поэтому, отмечая проведение опытов в одинаковых статистических условиях, *необходимо оговаривать по отношению к каким статистикам эти условия одинаковые*.

Альтернативой одинаковым статистическим условиям являются *непрогнозируемые статистические условия*.

Когда говорят, что опыты проводятся в *непрогнозируемых статистически условиях*, акцентируют внимание на том, что статистические условия изменяются, причем так, что *рассматриваемая статистика свойством сходимости не обладает*.

1.4 Шестая проблема Д. Гильберта

1.4.1 Суть проблемы

В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков, на котором с программным докладом «Математические проблемы» [Проблемы Гильберта 1969] выступил *Давид Гильберт*. Он сформулировал 23 наиболее важные, по его мнению, проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». Шестой проблемой им было названо «Математическое изложение аксиом физики».

Часть доклада, касающуюся шестой проблемы, Д. Гильберт начал со слов: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика».

Вопросу аксиоматизации науки Д. Гильберт уделял большое внимание на протяжении всей жизни. В докладе, прочитанном в 1917 г. на заседании Швейцарского математического общества, он говорил [Hilbert 1970]: «По мере дальнейшего развития любой науки становится все более необходимым целенаправленное выделение ее основополагающих предположений в чистом виде, осознание их в качестве аксиом и «помещение» их в «фундамент» данной области знания». И далее: «Механизм аксиоматического метода приводит к более глубоким основаниям знания, ибо это действительно необходимо для более совершенного его построения»[7].

Обратим внимание, что в контексте шестой проблемы Д. Гильберт *рассматривал теорию вероятностей не как математическую, а как физическую дисциплину*. Судя по всему, он воспринимал *теорию вероятностей, как раздел физики, предметом исследования которой является феномен статистической устойчивости.*

Интересен комментарий академика *Б.В. Гнеденко* к шестой проблеме [Проблемы Гильберта 1969]: «... для Гильберта теория вероятностей является главой физики, в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания».

Как видим, существуют разные взгляды на теорию вероятностей. Б.В. Гнеденко, безусловно, прав, что разработанные в настоящее время в рамках теории вероятностей многие понятия, методы и результаты исследований имеют общенаучное значение, далеко выходящее за рамки физики. Однако не надо забывать, что математика имеет дело с абстрактными моделями, лишь приближенно описывающими реальный физический мир, и поэтому всегда имеется опасность получения математических результатов, не согласующихся с результатами наблюдения. В этой связи позиция Д. Гильберта, опирающаяся на физику явлений, конечно, ближе к реалиям жизни.

1.4.2 Аксиоматизация теории вероятностей

На призыв Д. Гильберта откликнулись многие ученые. Различные подходы к решению проблемы аксиоматизации теории вероятностей предлагали *Г. Бохльман* (1908), *С.Н. Бернштейн* (1917), *Р. фон Мизес* (1918), *А. Ломницкий* (1923) (на основе идей *Э. Бореля*), *А.Н. Колмогоров* (1929) и др. [Проблемы Гильберта 1969].

---

[7] Следует заметить, что далеко не все ученые разделяли (и сейчас разделяют) точку зрения Д. Гильберта по вопросу аксиоматизации. Известна, например, позиция видного математика *В.И. Арнольда2010* [Арнольд 1999], считавшего математику частью физики и критиковавшего попытки создания замкнутого изложения дисциплин в строго аксиоматической форме.

Некоторые ученые, в частности Р. фон Мизес, рассматривали проблему с позиций естествознания, другие же, как, например, А.Н. Колмогоров, — с математических позиций.

В настоящее время общепризнанным в области теории вероятностей считается аксиоматический подход А.Н. Колмогорова [Колмогоров 1974], основанный на концепциях теории множеств и теории меры[8], основные положения которого были сформулированы им в 1929 г. [Колмогоров 1929]. Этот подход, ставший классическим, в настоящее время возведен в ранг международного стандарта ISO [International standard ISO 3534-1 2006]. В дальнейшем будем придерживаться его.

Базовыми понятиями теории вероятностей являются *абстрактные понятия случайного события, случайной величины и случайной функции*. Останавливаться на строгом их определении пока не будем (оно дано в главе 2), а отметим лишь главную их особенность: *любое случайное событие, любое значение случайной величины и любое значение случайной функции* (*процесса*) характеризуются неотрицательным числом, не превосходящим единицы, называемым *вероятностью*.

Иными словами, математические объекты, не характеризуемые *вероятностью* (не имеющие *вероятностной меры*), *случайными не считаются*.

Обратим внимание, что теория вероятностей, как правило, рассматривается математиками как *математическая дисциплина*. Однако не следует забывать, что она, а также другие формализованные теории, трактуемые в настоящее время как чисто математические, но в то же время широко используемые при описании физических явлений, *неразрывно связаны с физическими особенностями окружающего мира*.

Поэтому представляется необходимым при аксиоматизации учитывать эти связи и рассматривать такие теории не как математические, а *как физико-математические, в которых физические начала играют не менее значимую роль, чем математические*.

1.4.3 Путь решения шестой проблемы Д.Гильберта

Во многих современных теориях физические объекты и предметы исследования подменяются абстрактными математическими объек-

---

[8] Базовые понятия этих теорий приведены в главе 2.

тами и зависимостями — *математическими моделями*. Такой прием значительно облегчает решение физических задач и обеспечивает нахождение решений в общем виде, но при этом нарушается связь с реальностью, в результате чего ограничивается возможность проникновения в физическую сущность исследуемых явлений.

В качестве объекта и предмета изучения выступают уже не реальные физические явления и физические закономерности, а их абстрактные математические модели.

Например, в теории вероятностей как математической дисциплине *объектом исследования оказывается абстрактное вероятностное пространство*, а *предметом исследования — математические зависимости между его элементами*. Сам же физический феномен статистической устойчивости, лежащий в основе этой теории, вроде бы вообще не играет никакой роли, хотя в действительности, конечно, это не так.

При аксиоматизации физических дисциплин более конструктивным представляется подход, при котором *объектом изучения является физические феномены*, а *предметом изучения — способы адекватного их описания*.

Такая постановка вопроса касается не только теории вероятностей, но и других разделов физики. В настоящее время существует много различных аксиоматизированных математических теорий, широко используемых на практике.

Обратим внимание, что для корректного их применения достаточно системы математических аксиом дополнить физическими предположениями (гипотезами), устанавливающими связь между абстрактными теориями и реальным миром.

Основным требованием, предъявляемым к таким физическим гипотезам (*аксиомам адекватности* [Горбань 2011 (1)]), наряду с *непротиворечивостью* и *независимостью*, является учет экспериментально подтверждаемых физических эффектов окружающего мира, определяющих *объект исследования*, а также адекватность описания этих эффектов математическими моделями рассматриваемой теории, *определяющими предмет исследования*.

Принятие необходимых физических гипотез превращает абстрактную математическую теорию в *физико-математическую теорию*, в рамках которой возможно логически корректное описание действительности.

1.5 Аксиомы адекватности

1.5.1 Описание феномена статистической устойчивости в рамках теории вероятностей

Рассматривая теорию вероятностей как физико-математическую теорию, необходимо дополнить систему математических аксиом А.Н. Колмогорова, лежащих в основе ее математической части, (они приведены в главе 2) физическими гипотезами.

В качестве аксиом адекватности могут выступать следующие физические гипотезы [Горбань 2011 (1)]:

Гипотеза 1. *Реальные массовые явления обладают свойством идеальной статистической устойчивости частоты* (*иначе: при увеличении объема выборки частота любого события сходится к постоянной величине*).

Гипотеза 2. *Массовые явления адекватно описываются вероятностными* (*случайными*) *моделями.*

При решении практических задач вероятностного характера эти гипотезы обычно принимаются неосознанно, как сами собой разумеющиеся.

Полагают, что они справедливы для широкого круга массовых физических явлений. Тем самым принимается *концепция устройства мира на случайных принципах*[9].

Объектом исследования математической части теории вероятностей являются *случайные явления*, а *предметом ее исследования — связи между этими математическими объектами. Объектом и предметом исследования физической части теории вероятностей и в целом всей теории вероятностей как физико-математической дисциплины* являются соответственно *физический феномен статистической устойчивости* и *способы адекватного его описания с помощью случайных моделей.*

---

[9] Направление в философии, проповедующее господство во Вселенной случая является *тихизм* [Тихизм]. В переводе с греческого это слово означает «случай». Основоположником тихизма является американский философ *Ч.С. Пирс*. Доктрина тихизма предполагает существование элемента абсолютной случайности в устройстве Вселенной. По мнению Пирса, случай играет ключевую роль в эволюции, Вселенная обладает свободой выбора законов, фатальная необходимость в природе отсутствует, случай определяет разнородность и разнокачественность вещей, а саморазвитие приводит к устойчивости.

1.5.2 Описание феномена статистической устойчивости в рамках теории гиперслучайных явлений

Как уже отмечалось, экспериментальные исследования на больших интервалах наблюдения не подтверждают гипотезу идеальной статистической устойчивости (гипотезу 1). Однако на не очень больших интервалах наблюдения неполное соответствие реалий этой гипотезе обычно *не приводит к существенным потерям. Тогда применение теории вероятностей, безусловно, оправданно.*

На больших же интервалах наблюдения неидеальный характер статистической устойчивости играет существенную роль. Игнорировать это обстоятельство нельзя.

Для корректного применения классической теории вероятностей, в принципе, достаточно заменить гипотезу 1 на следующую:

Гипотеза 1'. *Реальные массовые явления обладают свойством ограниченной статистической устойчивости частоты* (иначе: *при увеличении объема выборки частота событий не сходится к постоянной величине*).

Замена гипотезы 1 на 1' приводит к значительным математическим трудностям, связанным *с нарушением сходимости.* Возможны разные варианты их преодоления. Разработка одного из них привела к созданию *физико-математической теории гиперслучайных явлений.*

Базовыми математическими моделями теории вероятностей служат случайные события, величины и функции, исчерпывающе характеризуемые вероятностной мерой. В роли же аналогичных моделей теории гиперслучайных явлений выступают *гиперслучайные события, величины и функции*, представляющие собой множества *не связанных между собой* соответственно случайных событий, величин и функций, рассматриваемые как единое целое.

Существенным является то, что *гиперслучайные явления* (гиперслучайные событие, величина и функция) — *многозначные объекты, исчерпывающе характеризуемые множеством вероятностных мер.*

Для корректного использования теории гиперслучайных явлений, кроме гипотезы 1', необходимо принять еще одну гипотезу, заменяющую гипотезу 2.

Гипотеза 2'. *Массовые явления адекватно описываются гиперслучайными моделями.*

В итоге *математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на классических аксиомах теории вероятностей, а физическая часть — на гипотезах 1' и 2'.*

Предположение, что эти гипотезы справедливы для широкого круга массовых явлений, приводит к *концепции устройства мира на гиперслучайных принципах.*

Объектом исследования математической части теории гиперслучайных явлений являются *гиперслучайные явления, а предметом исследования — связи между этими математическими объектами. Объектом и предметом исследования физической части теории гиперслучайных явлений и в целом всей теории гиперслучайных явлений* являются соответственно *физический феномен статистической устойчивости* и *способы адекватного его описания с помощью гиперслучайных моделей* (*гиперслучайных явлений*), *учитывающих нарушения статистической устойчивости.*

Сравнивая объекты и предметы исследования теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений, можно заметить, что объекты исследования обеих теорий совпадают, а предметы исследования оказываются разными.

Поскольку теория гиперслучайных явлений использует систему математических аксиом теории вероятностей, *с математической точки зрения она представляет собой ветвь классической теории вероятностей.*

С физической же точки зрения теория гиперслучайных явлений — *новая физическая теория*, базирующаяся на новых физических гипотезах. В целом же *теорию гиперслучайных явлений следует рассматривать как новую физико-математическую теорию*, претендующую на решение шестой проблемы Д. Гильберта в части теории вероятностей.

1.6 Является ли вероятность «нормальной» физической величиной?

В 1992 г. в журнале «Успехи физических наук» вышла статья *Ю.И Алимова* и *Ю.А. Кравцова* [Алимов, Кравцов 1992] с интригующим названием, вынесенным в название настоящего параграфа. Авторы этой статьи обратили внимание на то, что «существенным элементом, незримо присутствующим при физической интерпретации вероятности, является система трудно формализуемых гипотез, соглашений, домысливаний, как бы естественно, традиционно привязанных к формальному аппарату теории вероятностей, а в действительности являющихся самостоятельными гипотезами, требующими верификации». Это действительно так. Без каких-либо дополнительных оговорок дать однозначный ответ на поставленный вопрос невозможно.

Прежде всего, обратим внимание, что *физическая величина* — свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта [ГОСТ 16263-70 1970].

С этой точки зрения *вероятность*, рассматриваемая в рамках математической аксиоматической теории вероятностей, формально *не является физической величиной*. Это *математическая абстракция, не имеющая никакого отношения к реальным физическим явлениям.*

С принятием дополнительно гипотез 1 и 2 понятия предела частоты события и вероятность события оказываются тождественными. Проводя измерение частоты события, можно с некоторой погрешностью оценить его вероятность. При устремлении объема выборки к бесконечности погрешность стремится к нулю, а частота события — к вероятности.

Если под понятием «нормальная» физическая величина понимать физическую величину, которую теоретически можно измерить с нулевой погрешностью при бесконечном объеме выборки, то при принятии гипотез 1 и 2 вероятность оказывается «нормальной» физической величиной.

Поскольку гипотеза 1 экспериментально не подтверждается, возникает необходимость замены ее на гипотезу 1'. С принятием новой гипотезы 1' фиксируется отсутствие предела частоты события. При этом абстрактное математическое понятие вероятности события нельзя отождествить с какой-либо измеряемой физической величиной. В этом случае оно *не имеет физической интерпретации.*

Конечно, по данным измерения частоты события можно грубо оценить величину вероятности, однако поскольку при неограниченном увеличении объема выборки погрешность измерения не стремится к нулю, *вероятность нельзя интерпретировать как «нормальную» физическую величину.*

Поэтому *вероятность следует рассматривать как математическую абстракцию, которая не имеет физической интерпретации.*

Обратим внимание, что суть принимаемых в теории вероятностей гипотез 1 и 2 сводится к принятию *предположения о существовании вероятности* как некоторого числа, характеризующего возможность наступления события.

В варианте аксиоматизации теории вероятностей, предложенном *С.Н. Бернштейном*, эта мысль изложена следующим образом: «Основное допущение теории вероятностей (*постулат существования математической вероятности*) состоит в том, что существуют такие комплексы условий β, которые (теоретически по крайней мере) могут быть реализованы неограниченное число раз, при наличии которых в данном опыте *наступление факта A имеет определенную вероятность, выражающуюся математическим числом.*» [Бернштейн 1934, с. 8].

Другие широко известные варианты аксиоматизации, в частности предложенный *Р. фон Мизесом* [Мизес 1930] и общепризнанный вариант аксиоматизации, предложенный *А.Н. Колмогоровым* [Колмогоров 1974], также базируются на этом постулате.

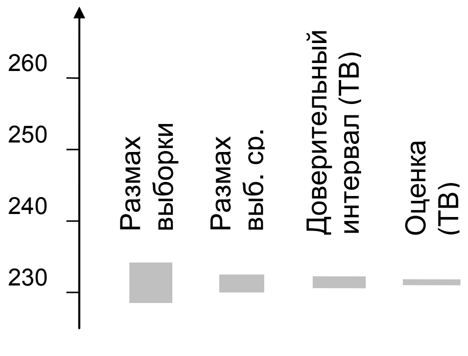
Признание в рамках теории гиперслучайных явлений ограниченного характера статистической устойчивости (в частности, отсутствия сходимости частоты событий) означает *непринятие постулата существования вероятности*[10].

Таким образом, *постулат существования вероятности* служит как бы *водоразделом, разделяющим теорию вероятностей и теорию гиперслучайных явлений.*

[10] На то, что наряду со случайными событиями, носящими вероятностный характер, существуют иные непрогнозируемые события, люди обращали внимание давно. Недаром *неожиданные события* зачастую называют *невероятными*.

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Результаты расчета по методике теории вероятностей параметров, характеризующих напряжение электросети на протяжении 100 с наблюдения

Академик АН СССР А.Н. Колмогоров:

— При известных условиях, в которые мы здесь не будем глубже вдаваться, можно предположить, что некоторым событиям A, которые могут наступить или же не наступить после осуществления условий σ, поставлены в соответствие определенные действительные числа $P(A)$, обладающие следующими свойствами:

А. Можно быть практически уверенным, что если комплекс условий σ будет повторяться большое число n раз и если через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий σ событие A не будет иметь места (Колмогоров 1974, с. 12, 13).

Глава 2 Основы теории вероятностей

Обсуждено понятие «случайное явление». Описаны классический и статистический варианты формализации понятия вероятности. Приведены основные положения теории множеств и теории меры. Представлен вариант аксиоматизации теории вероятностей, предложенный А.Н. Колмогоровым. Введено понятие вероятностного пространства. Приведены аксиомы теории вероятностей, а также теоремы сложения и умножения. Формализовано понятие скалярной случайной величины. Представлены способы описания случайной величины с помощью функции распределения, плотности распределения и моментов, в частности математического ожидания и дисперсии. Приведены примеры скалярных случайных величин с разными законами распределения. Способы описания скалярной случайной величины обобщены на случай векторной случайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании случайных величин и арифметических операциях над ними.

2.1 Понятие о случайных явлениях

Известно много разных толкований понятия случайного явления. В настоящее время нет единого мнения по этому вопросу, причем даже среди ученых.

В быту под *случайным явлением* обычно подразумевают *массовое явление*, результат наблюдения которого предсказать заранее невозможно. Конкретизируя это понятие, к таковым относят *непредсказуемые события, величины, процессы и поля.*

Более точную трактовку этого понятия дает теория вероятностей.

Ключевую роль в ней играет понятие *события*, под которым понимается уже происшедший или возможный результат (итог) опыта или испытания.

Между опытом и испытанием усматривают различие. *Опыт* — любое наблюдение, а *испытание* — наблюдение *в контролируемых* (или *частично контролируемых*) *условиях.*

Случайное событие — событие, наблюдаемое в частично контролируемых условиях и характеризуемое *обязательно вероятностью.*

Случайное событие — событие, которое *еще не произошло*, но *может произойти с определенной вероятностью.* Событие, которое уже *произошло*, случайным *не считается.*

Это относится и к любому другому случайному явлению.

В теории вероятностей под *случайным явлением* понимают любое *массовое явление* (случайные событие, величина, процесс или поле), наблюдаемое в частично контролируемых условиях и *имеющее вероятностную меру.*

Массовые явления, не имеющие вероятностной меры, *случайными не считаются.*

2.2 Варианты определения понятия вероятности

Вероятность — понятие, не такое тривиальное, как кажется на первый взгляд. Существует множество вариантов его определения, даже математических вариантов — несколько. Наиболее известные варианты — классический, статистический и аксиоматический.

2.2.1 Классическое определение понятия вероятности

Классический подход — исторически, по-видимому, первый из известных — базируется на идеи несовместности и равновозможности *конечного числа* элементарных событий.

Необходимо пояснить, что подразумевается под элементарными, несовместными и равновозможными событиями.

Среди рассматриваемых событий можно выделить события, из которых состоят другие события. Их называют *элементарными событиями*. Обозначим множество элементарных событий Ω.

Любое случайное событие A происходит при наступлении одного из элементарных событий ω, принадлежащих некоторому множеству Ω_A. Об элементарных событиях ω, образующих множество Ω_A, говорят, что они *благоприятствуют* событию A.

Простейший пример. В стандартной колоде тридцать шесть карт четырех мастей (черва, бубна, трефа и пика). Каждая масть содержит девять карт разного достоинства (шестерка, семерка, восьмерка, девятка, десятка, валет, дама, король и туз).

Элементарным событием ω можно считать результат вытаскивания любой из тридцати шести карт. В данном случае количество элементарных событий равно тридцати шести. Эти элементарные события образуют множество Ω.

Множество случайных событий не исчерпывается только этими элементарными событиями. Случайным *неэлементарным событием*, например, является результат вытаскивания из колоды карты определенной масти, допустим, червовой. Этому событию A благоприятствует девять карт червовой масти, образующих множество Ω_A. Событие A происходит при вытаскивании любой карты из этого множества.

Несовместные события — события, которые не могут произойти одновременно при проведении опыта. Пример несовместных событий — вытащить из колоды карту одновременно двух мастей или двух достоинств.

Совместные события — события, которые при проведении опыта могут произойти одновременно. Пример совместных событий — вытащить карту определенной масти и определенного достоинства. Оба эти события могут произойти одновременно при проведении опыта.

Под *равновозможностью элементарных событий* понимается одинаковая возможность их наступления, т. е. отсутствие приоритета одного из них перед остальными. Так, в хорошо перетасованной колоде карт возможности вытащить любую карту одинаковы.

Примером *несовместных элементарных событий* может служить выпадение при броске одновременно двух чисел игрального кубика с нанесенными на его сторонах числами от одного до шести. Если кубик симметричный, то *равновозможным* элементарным событием является выпадение любой из этих чисел, и *не равновозможным*, если он асимметричный. Примером *неэлементарных* событий может служить выпадение при броске кубика четного (или нечетного) числа.

Классической вероятностью $P(A)$ *события* A называется отношение числа L_A *несовместных равновозможных элементарных событий* ω, благоприятствующих событию A, к общему числу L элементарных событий.

Иными словами, *вероятность* $P(A)$ *события* A представляет собой отношение числа элементарных событий L_A, принадлежащих множеству Ω_A, к общему числу L элементарных событий, принадлежащих всему множеству Ω.

В примере с картами общее число элементарных событий $L = 36$, число элементарных событий, благоприятствующих вытаскиванию червонной масти (событие A) — $L_A = 9$, а вероятность вытащить черву $P(A) = 9 / 36 = 0,25$.

В примере с идеально симметричным игральным кубиком общее число элементарных событий $L = 6$, число элементарных событий, благоприятствующих выпадению четного числа $L_A = 3$, а вероятность выпадения четного числа $P(A) = 3/6 = 0{,}5$.

Недостатком классического варианта определения вероятности является трудности выделения равновозможных элементарных событий при отсутствии симметрии и невозможность распространения этого подхода на случай бесконечного числа событий.

2.2.2 Статистическая вероятность

Избежать трудности выделения равновозможных событий позволяет статистический подход.

При этом подходе вероятность определяется на основе результатов наблюдения. Получающаяся вероятность называется *статистической вероятностью.*

Статистическая вероятность $P(A)$ массового события A представляет собой *предел частоты события* $p_n(A)$ при устремлении числа испытаний n к бесконечности.

Статистический подход имеет физические корни и простую понятную интерпретацию. В этой связи он нашел широкое распространение среди физиков, инженеров и специалистов других прикладных специальностей. Рьяным сторонником статистического подхода был *Р. фон Мизес*, предложивший на его основе, как уже говорилось, вариант аксиоматизации теории вероятностей [Мизес 1930]. Среди математиков статистический подход не нашел широкого признания.

Существенным недостатком такого подхода является то, что на практике количество опытов n всегда ограничено, поэтому рассчитать статистическую вероятность на основе анализа результатов экспериментов принципиально невозможно. Можно лишь получить более или менее точную ее оценку.

При проведении испытаний в одинаковых статистических условиях с увеличением количества испытаний точность оценки возрастает. Но это имеет место лишь тогда, когда статистические условия проведения экспериментов остаются неизменными. В реальной же жизни условия изменяются. Поэтому рассчитывать на достижение высокой точности оценки статистической вероятности не приходится.

Избежать указанных трудностей можно, определяя понятие вероятности, не используя статистические данные.

Наиболее корректное с математической точки зрения аксиоматическое определение вероятности предложено *А.Н. Колмогоровым*

[Колмогоров 1929, 1974]. Этот подход базируется на теории множеств и теории меры. Кратко остановимся на основных положениях этих теорий.

2.2.3. Основные положения теории множеств

Множеством называют совокупность объектов произвольной природы. Эти объекты называются *элементами множества*. В математике понятие множества — начальное, строго *неопределяемое* понятие, вводимое *аксиоматическим путем*.

Подмножеством A множества Ω называется множество, все элементы которого являются элементами множества Ω. При этом пишут $A \subset \Omega$ или $\Omega \supset A$. Заметим, что подмножеством множества Ω считается и само множество Ω.

Если элемент x содержится в множестве A, то, используя *знак принадлежности* $\in$, пишут $x \in A$.

По определению пустое множество $\varnothing$ является подмножеством *любого множества*. При подсчете количества элементов множества пустое множество обычно *не учитывают*.

В примере с картами тридцать шесть карт колоды образуют множество Ω. Подмножествами являются множество карт всей колоды, множество карт определенной масти, множество карт определенного достоинства и т. д.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов (т. е. $A \subset B$ и $B \supset A$). Например, множество A карт красной масти и множество B карт нечерной масти являются равными.

Если количество элементов множества конечно, то множество называется *конечным*, если это число бесконечно, то множество называется *бесконечным*, если элементы множества можно пересчитать, то множество называется *счетным*, а если пересчитать эти элементы нельзя, то множество называется *несчетным*.

Дискретным множеством называется множество, состоящее из конечного или счетного количества элементов.

Для характеристики количества элементов множеств вводят понятие *мощности* (*кардинального числа*). Два множества имеют *одинаковую мощность*, если между всеми их элементами можно установить *взаимно-однозначное соответствие*, т. е. каждому элементу одного множества можно поставить в соответствие элемент другого множества и наоборот.

Кардинальное число конечного множества равно числу его элементов. *Мощность всех счетных множеств одинакова* (обозначается символом χ_0). *Мощность всех действительных чисел* называется *континуумом* (обозначается символом χ). Заметим, что существуют несчетные множества, мощность которых больше континуума.

Приведем несколько примеров. Примером конечного множества может служить совокупность цифры 1, числа π, определенной геометрической фигуры (например, треугольника) и знака $*$. Это множество состоит их четырех элементов, поэтому его мощность равна четырем.

Совокупности целых чисел (от минус бесконечности до плюс бесконечности) и целых положительных чисел (от единицы до бесконечности) образуют счетные множества. С точки зрения теории множеств число элементов в этих множествах одинаково. Мощность этих множеств равна χ_0.

Количество точек на отрезках любой конечной длины, на бесконечной прямой и на плоскости одинаково. Мощность этих множеств равна континууму.

Эти странные и неожиданные, на первый взгляд, утверждения доказываются просто. Докажем, например, справедливость того, что на двух отрезках A_1B_1 и A_2B_2 *разной длины* количество точек *одинаковое.*

Для этого расположим эти отрезки параллельно один над другим (рис. 2.1). Проведем через левые и правые их концы прямые, изображенные на рисунке пунктирными линиями. Обозначим точку пересечения этих прямых буквой O.

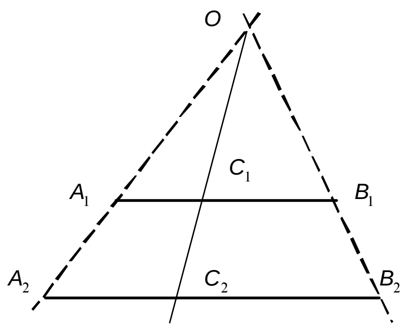


Рис. 2.1. Взаимно-однозначное соответствие между точками C_1 и C_2 отрезков A_1B_1 и A_2B_2

Тогда произвольная прямая OC_1, проходящая через точку O и пересекающая отрезок A_1B_1, пересекает отрезок A_2B_2, и, наоборот, произвольная прямая OC_2, проходящая через точку O и пересекающая отрезок A_2B_2, пересекает отрезок A_1B_1. Таким образом, между точками C_1 и C_2 отрезков A_1B_1 и A_2B_2 установлено взаимно-однозначное соответствие. Если же существует такое соответствие, то количество точек на отрезках одинаковое.

Аналогично доказываются и другие части утверждения.

Для множеств введены *операции объединения* $\bigcup$ (*логической суммы*), *пересечения* $\bigcap$ (*логического произведения*) и *дополнения* $\setminus$.

Объединение $A_1 \cup A_2$ множеств A_1 и A_2 представляет собой множество A, полученное из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A_1 и A_2 (рис. 2.2).

Пересечение $A_1 \cap A_2$ множеств A_1 и A_2 — множество B, сформированное из всех элементов, входящих одновременно в оба множества A_1 и A_2.

Дополнение $\Omega \setminus A$ множества $A \subset \Omega$ представляет собой множество $C = \overline{A}$, полученное из всех элементов множества Ω, не принадлежащих множеству A.

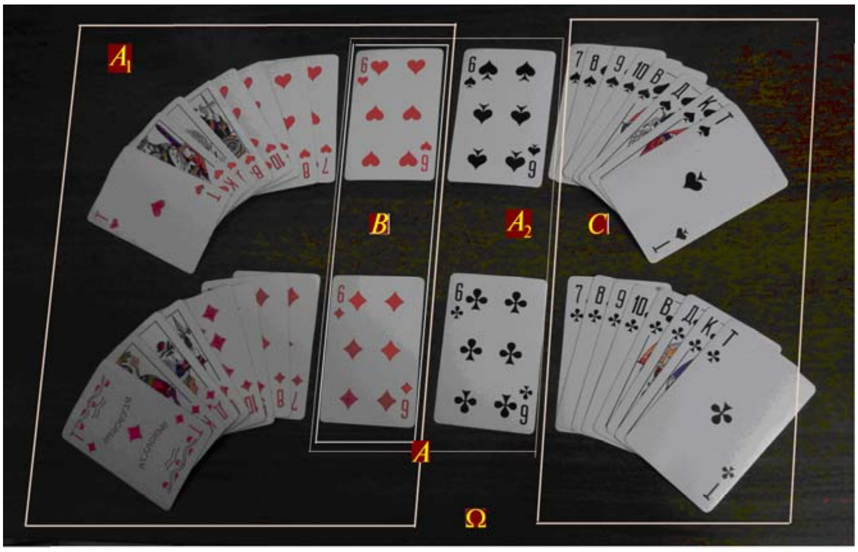


Рис. 2.2. Иллюстрация операций объединения, пересечения и дополнения

Например, объединение восемнадцати карт красной масти A_1 и четырех шестерок A_2 (рис. 2.2) образует множество A, состоящее из двадцати карт, а именно: восемнадцати карт красной масти и двух шестерок черной масти. Пересечение восемнадцати карт красной масти A_1 и четырех шестерок A_2 образует множество B, состоящее из двух шестерок красной масти, а дополнение $\Omega \setminus A = C$ представляет собой множество из шестнадцати карт — всех карт черной масти, за исключением двух шестерок.

Алгеброй множеств называют класс подмножеств $\Im$ множества Ω с определенными в нем *операциями объединения, пересечения* и *дополнения* при выполнении следующих трех условий:

1) множество Ω принадлежит множеству $\Im$, т. е. $\Omega \in \Im$;
2) если множество $A \in \Im$, то его дополнение также принадлежит множеству $\Im$, т. е. $\overline{A} \in \Im$;
3) если множества A_1 и A_2 принадлежат множеству $\Im$ ($A_1 \in \Im$ и $A_2 \in \Im$), то их объединение и пересечение также принадлежат множеству $\Im$, т. е. $A_1 \bigcup A_2 \in \Im$ и $A_1 \bigcap A_2 \in \Im$.

Таким образом, в алгебре множеств операции объединения, пересечения и дополнения *не выводят за пределы множества* $\Im$, т. е. множество $\Im$ является *замкнутым* относительно указанных операций.

В примере с картами множество $\Im$ образуют любые сочетания карт (из тридцати шести карт по одной, двум и т. д. до тридцати шести карт).

Количество элементов Ω может быть конечным (как в случае с картами) или счетным. Если количество элементов множества Ω счетное, то *счетным* является и множество $\Im$.

В дополнение к свойствам 1—3 *счетное множество* $\Im$ может обладать еще одним свойством:

4) если множества $A_n \in \Im$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то объединение *счетного числа* этих множеств также принадлежит множеству $\Im$, т. е. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$.

Тогда алгебра $\Im$ называется σ*-алгеброй* (*сигма-алгеброй*).

Обратим внимание, что четвертое свойство, играющее важную роль в теории меры и теории вероятностей, *не является* следствием третьего свойства.

2.2.4 Основные положения теории меры

Мера является математическим понятием, обобщающим понятия длины, площади, объема, массы, энергии и других величин, *количественно* характеризующих подмножества некоторого множества.

Мерой называется функция $\mu(A)$ подмножества A непустого множества Ω, обладающая следующими свойствами:

1) мера $\mu(A)$ является *неотрицательной величиной* для всех множеств A, для которых она определена, т. е. $\mu(A) \geq 0$. При этом мера равна нулю для пустого множества $\varnothing$, т. е. $\mu(\varnothing) = 0$;
2) мера множества, сформированного в результате объединения *счетного числа* попарно не пересекающихся подмножеств A_n ($n = 1, 2, \ldots$), *равна сумме мер* составляющих подмножеств A_n, т. е. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Последнее условие называется *аксиомой счетной аддитивности*.

Для произвольной меры μ требуют, чтобы она была определена *для всех подмножеств* σ*-алгебры* (т. е. для всех элементов множества $\Im$). Если это условие выполняется, то говорят, что тройка $(\Omega, \Im, \mu)$ образует *пространство с мерой*.

Мера μ называется *нормированной*, если для множества Ω мера равна единице (т. е. $\mu(\Omega) = 1$). Для нормированной меры $\mu(A) \leq 1$ для всех множеств $A \in \Im$.

2.2.5 Аксиоматическое определение понятия вероятности

При *аксиоматическом определении вероятности*

1) задается *пространство элементарных событий* Ω с *элементарными событиями* $\omega \in \Omega$;
2) задается σ*-алгебра*[1] $\Im$ подмножеств, называемых *событиями*;
3) любому *событию* A ставится в соответствие нормированная мера $P(A)$, называемая *вероятностной мерой* или, сокращенно, *вероятностью*.

Пространство с вероятностной мерой называется *вероятностным пространством*. Как и любое пространство с мерой, вероятностное пространство задается тройкой $(\Omega, \Im, P)$.

Вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$ *образно* можно представить облаком, состоящим из счетного множества необязательно одинаковых капель воды (рис. 2.3).

[1] Точнее, наименьшая σ-алгебра, называемая *борелевской* σ*-алгеброй*.

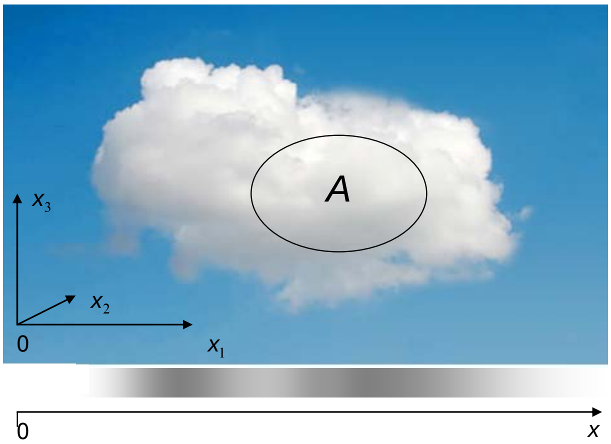


Рис. 2.3. Образное представление вероятностного пространства облаком

Каждая капля — элементарное событие ω. Множество капель в облаке — пространство Ω. Множество всех подмножеств, сформированных из капель облака, — σ-алгебра $\Im$. Вероятность $P(A)$ — масса воды рассматриваемого подмножества A (фрагмента облака), деленная на массу воды всего облака.

Достоверным событием I называют событие, имеющее место при всех элементарных событиях $\omega \in \Omega$. *Невозможным событием* называется событие, которое не наступает ни при каком $\omega \in \Omega$.

События A_1 и A_2 называются *несовместными*, если их пресечение представляет собой пустое множество, т. е. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

События $A_1, A_2, ..., A_I$ называются *попарно несовместными*, если пересечение любых двух разных событий представляет собой пустое множество, т. е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$ $(i, j = \overline{1, I})$.

Вероятность $P(A)$ задается как нормированная мера следующими тремя *аксиомами*:

1) вероятность любого события является неотрицательным числом (т. е. $P(A) \geq 0$);
2) для *попарно несовместных* событий $A_1, A_2, ...$ (как конечных, так и *счетных*) вероятность их объединения *равна сумме вероятностей* событий, т. е. $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$;
3) вероятность события Ω равна единице (т. е. $P(\Omega) = 1$).

2.2.6 Случайные события

События, удовлетворяющие аксиомам, приведенным в п. 2.2.5, называются *случайными событиями.*

Из этих аксиом следует, что вероятность любого случайного события заключена в интервале от нуля до единицы (т. е. $0 \le P(A) \le 1$), причем вероятность пустого события равна нулю (т. е. $P(\varnothing) = 0$).

Обратим внимание, что из равенства вероятности некоторого события A единице ($P(A) = 1$) в общем случае *не следует*, что это событие — достоверное, а из равенства вероятности некоторого события B нулю ($P(B) = 0$) *не следует*, что B — невозможное событие.

В общем случае совместных событий A_1 и A_2 вероятность $P(A_1 \cap A_2)$ пересечения событий $A_1 \cap A_2$ равна произведению вероятности $P(A_1)$ события A_1 и *условной вероятности* $P(A_2 / A_1)$ события A_2 при условии, что произошло событие A_1:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 / A_1)\,[2]. \qquad (2.1)$$

Это утверждение называется *теоремой умножения.*

Вернемся к примеру с картами (рис. 2.2). Допустим, что вероятность вытащить из колоды определенную карту не зависит от ее масти и достоинства. Тогда эта вероятность равна $1/36$. Пусть событие A_1 — вытаскивание из колоды произвольной карты красной масти, A_2 — вытаскивание из колоды шестерки, событие A_2 / A_1 — вытаскивание шестерки из половины колоды, содержащей только карты красной масти, а $A_1 \cap A_2 = B$ — вытаскивание из колоды шестерки красной масти. При этом $P(A_1) = 18 \cdot (1/36) = 1/2$, $P(A_2) = 4 \cdot (1/36) = 1/9$, а $P(A_2 / A_1) = 2 \cdot (1/18) = 1/9$. Согласно формуле (2.1) вероятность вытащить из колоды шестерку красной масти равна $P(A_1 \cap A_2) = (1/2) \cdot (1/9) = 1/18$.

Случайные события A_1 и A_2 называются *независимыми* (*независимыми по вероятности*), если вероятность пересечения событий равна произведению их вероятностей, т. е. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.

---

[2] Предполагается, что $P(A_1) \ne 0$. В противном случае вероятность $P(A_2 / A_1)$ не определена.

Из приведенного определения следует, что события A_1 и A_2 независимы, если появление одного из них не вызывает изменения вероятности появления другого события.

Пусть A_1 и A_2 — в общем случае *совместные события*. Тогда вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей событий A_1 и A_2 минус вероятность их пересечения:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2). \tag{2.2}$$

Это легко доказываемая формула носит название *теоремы сложения*.

Продолжая рассмотрение примера с картами, вероятность выпадения красной карты или любой шестерки $P(A_1 \cup A_2)$ можно вычислить по формуле (2.2): $P(A_1 \cup A_2) = 1/2 + 1/9 - 1/18 = 5/9$.

С помощью приведенных простых правил можно решать не только тривиальные задачи типа рассмотренных выше, но и много различных достаточно сложных комбинаторных задач.

2.3 Случайные величины

2.3.1 Основные определения

Случайной величиной X называется измеримая функция, определенная на пространстве Ω элементарных событий ω. *Значение* x *случайной величины* X можно представить функцией $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Множество значений случайной величины образует *пространство значений случайной величины*.

До проведения испытания *неизвестно*, какое именно элементарное событие произойдет, а потому *неизвестно*, какое значение x приобретет случайная величина X.

Случайную величину задают не только пространством значений случайной величины, а и характеристиками, которые характеризуют вероятность появления тех или иных значений из этого пространства.

Если для случайной величины заданы как пространство значений случайной величины, так и вероятности появления этих значений, то говорят, что случайная величина *вероятностно определена*.

Случайные величины могут быть *одномерными* (*скалярными*) и *многомерными* (*векторными*).

Возвращаясь к «облачному» представлению вероятностного пространства (рис. 2.3), трехмерную случайную величину $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ можно рассматривать как случайный трехмерный вектор, конкретные координаты которого x_1, x_2, x_3 описывают местоположение конкретной капли облака в пространстве, а одномерную случайную величину X — как скалярную величину, конкретная координата которой описывает местоположение конкретной капли на оси x.

В дальнейшем случайные величины будем обозначать *прописными* буквами, а значения, которые они принимают, — *строчными*.

Случайные величины описывают с помощью разных характеристик. Наиболее полное описание дают вероятностные характеристики, менее полное — числовые характеристики (параметры).

2.3.2 Вероятностные характеристики скалярной случайной величины

Исчерпывающее описание скалярной случайной величины X дает *функция распределения вероятностей* $F_x(x)$ [3], представляющая собой вероятность того, что значение случайной величины меньше x, т. е.

$$F_x(x) = P\{X < x\}. \tag{2.3}$$

Примеры функций распределения дискретной случайной величины X (принимающей дискретные значения x_i, $i = \overline{1, I}$) и непрерывных случайных величин приведены соответственно на рис. 2.4 **а** и 2.5 **а**.

Каждая случайная величина X *однозначно описывается* функцией распределения $F_x(x)$.

[3] Если из текста понятно, к какой случайной величине относится функция распределения, индекс в обозначении зачастую опускают.

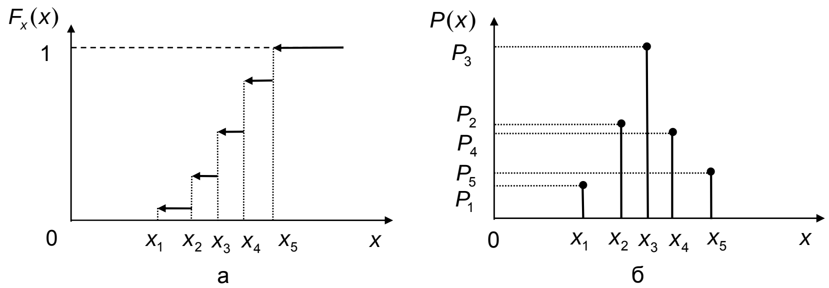


Рис. 2.4. Функция распределения (**а**) и распределение вероятностей (**б**) дискретной случайной величины

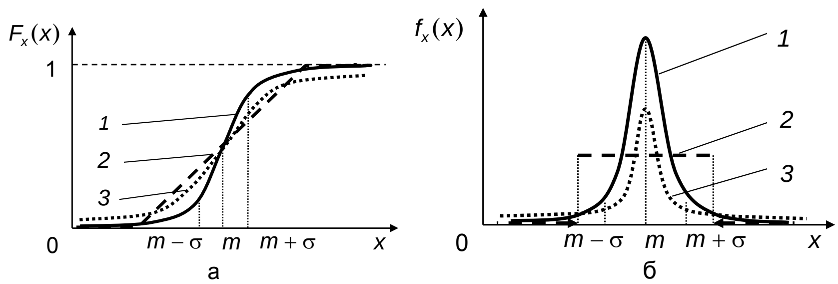


Рис. 2.5. Функции распределения (**а**) и плотности распределения (**б**) непрерывных случайных величин: гауссовской (*1*), равномерно распределенной (*2*) и имеющей распределение Коши (*3*)

Функция распределения $F_x(x)$ принимает *неотрицательные значения*, лежащие в интервале от нуля до единицы. Эта функция является неубывающей и монотонной слева (см. рис. 2.4 **а** и 2.5 **а**).

Если случайная величина *непрерывная*, то исчерпывающее ее описание дает также *плотность распределения вероятностей* $f_x(x)$[4] (рис. 2.5 **б**).

Плотность распределения $f_x(x)$ и функция распределения $F_x(x)$ *однозначно связаны между собой* следующими соотношениями:

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{2.4}$$

[4] Если из текста понятно, к какой случайной величине относится распределение, индекс в обозначении также зачастую опускают.

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\mathrm{d}x\,. \qquad (2.5)$$

Как и функция распределения, плотность распределения принимает лишь неотрицательные значения. Площадь под всей кривой $f_x(x)$ равна единице (*свойство нормированности к единице*). Вероятность того, что случайная величина заключена в интервале $[x_1, x_2]$, равна площади под частью кривой $f_x(x)$, соответствующей этому интервалу. Это свойство называется *свойством аддитивности*.

В «облачной» интерпретации (рис. 2.3) под плотностью распределения случайной величины X можно понимать плотность распределение массы воды вдоль оси x. Это распределение изображено внизу рисунка в виде полосы с разным уровнем затемнения.

Обратим внимание, что не всякие функции могут выступать в роли функции распределения и плотности распределения. Те и только те функции, которые обладают перечисленными выше свойствами, могут быть соответственно функциями распределения и плотностями распределения случайных величин.

2.3.3 Вероятностные характеристики дискретной случайной величины

Поскольку функция распределения дискретной случайной величины разрывная, строго говоря, в рамках классических представлений у дискретной случайной величины плотность распределения отсутствует. Роль плотности распределения в этом случае выполняет *распределение вероятностей P_i для всех x_i* (рис. 2.4 **б**).

Однако, для дискретной случайной величины все же можно ввести понятие плотности распределения, используя *обобщенную функцию Дирака* — дельта-функцию.

Дельта-функция $\delta(x - x_0)$ — функция, которая в точке $x = x_0$ принимает бесконечно большое значение и равна нулю в остальных точках числовой оси (рис. 2.6 **а**). Формально она представляет собой производную функции единичного скачка в точке $x = x_0$ (рис. 2.6 **б**):

$$\mathrm{sign}[x - x_0] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_0, \\ 1 & \text{при} \quad x > x_0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

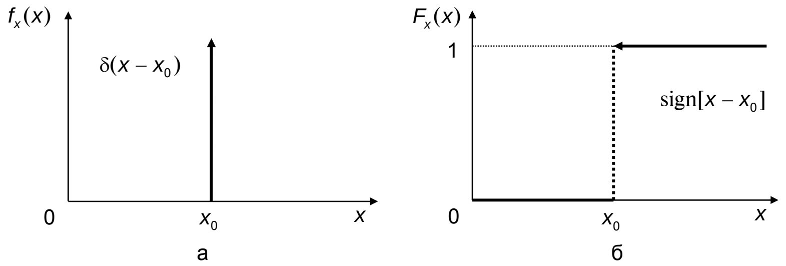


Рис. 2.6. δ-функция Дирака (**а**) и функция единичного скачка (**б**)

Плотность распределения дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, \ldots, x_I$, можно представить выражением $f_x(x) = \{P_i \delta(x - x_i), \quad i = \overline{1, I}\}$.

Использование δ-функции не только открывает возможность единообразного описания дискретных и непрерывных случайных величин, но и позволяет подойти к описанию *случайных* и *детерминированных* величин с *единых позиций*, а именно: *детерминированную величину* x_0 *рассматривать приближенно как случайную величину* X, у которой плотность распределения $f_x(x)$ представляет собой δ-функцию в точке x_0 (рис. 2.6 **а**), а функция распределения $F_x(x)$ имеет вид функции единичного скачка в этой точке (рис. 2.6 **б**).

2.3.4 Примеры случайных величин

Известны сотни различных типов распределений [Губарев 1981, Мюллер 1982], но на практике, как правило, используется небольшое их число. Наиболее часто применяют *гауссовское* (*нормальное*) *распределение*, плотность распределения $f_x(x)$ которого описывается симметричной колоколообразной кривой (непрерывная кривая *1* на рис. 2.5 **б**):

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad \sigma_x > 0\,. \tag{2.7}$$

Она определяется двумя параметрами — m_x и σ_x. Параметр m_x характеризует местоположение максимума кривой на оси x, а параметр σ_x — ширину колокола и величину его максимума: чем больше σ_x, тем шире колокол и меньше его максимальное значение.

Заметим, что параметр m_x представляет собой *математическое ожидание*, а параметр σ_x — *среднеквадратическое отклонение* (определение этих понятий приведено в следующем пункте).

Соответствующая функция распределения $F_x(x)$ не выражается через элементарные функции. Однако она может быть рассчитана с помощью табулированной функции $\Phi(x)$, называемой *функцией Лапласа*, или *интегралом вероятности*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2 / 2)\mathrm{d}z\,. \tag{2.8}$$

Эта функция описывает гауссовскую функцию распределения при $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$.

Математическое ожидание характеризует местоположение кривой $F_x(x)$ на оси x, а среднеквадратическое отклонение — ее наклон: с уменьшением среднеквадратического отклонения кривая функции распределения становится круче.

Часто используют также *равномерное распределение* с плотностью распределения $f_x(x)$, постоянной на некотором интервале $[a, b]$ и равной нулю вне этого интервала (пунктирная линия *2* на рис. 2.5 **б**):

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a, b], \\ 0 \quad \text{при} \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

В пределах интервала $[a, b]$ функция распределения $F_x(x)$ такой случайной величины представляет собой линейную функцию, возрастающую от нуля до единицы (пунктирная линия *2* на рис. 2.5 **а**). Крутизна этого отрезка прямой определяется *размахом случайной величины* — разностью между верхней b и нижней a границами ее распределения. Чем меньше размах, тем круче отрезок прямой.

Интересными свойствами обладает *распределение Коши* (*распределение Стьюдента*[5] *первого порядка*). Об этих свойствах будет идти речь далее. Пока же отметим, что функция распределения $F_x(x)$

---

[5] *Стьюдент* — псевдоним *У.С. Госсета.*

такой случайной величины (кривая *3* на рис. 2.5 **а**) и плотность распределения $f_x(x)$ (кривая *3* на рис. 2.5 **б**) определяются двумя параметрами — *параметром сдвига* x_0 и *параметром масштаба* $\gamma > 0$:

$$F_x(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

$$f_x(x) = C\left[x_0, \gamma\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}\right]. \tag{2.10}$$

Эти параметры в распределении Коши играют ту же роль, что и математическое ожидание m_x, и среднеквадратическое отклонение σ_x в гауссовском распределении.

2.3.5 Числовые параметры скалярных случайных величин

Наряду с вероятностными характеристиками, используют разнообразные *числовые характеристики* (*параметры*), позволяющие получить представление о характерных особенностях распределения и при необходимости аппроксимировать его с помощью других распределений. В качестве таких числовых характеристик часто используют *моменты*, к числу которых относятся *математическое ожидание* m_x (момент первого порядка), *дисперсия* D_x (центральный момент второго порядка) и другие параметры случайной величины.

Моменты определяются с помощью понятия *математического ожидания функции.*

Под *математическим ожиданием* $\mathrm{M}[\varphi(X)]$ *функции* $\varphi(X)$ *случайной величины* X подразумевается среднее (с учетом плотности распределения $f_x(x)$) значение функции $\varphi(X)$:

$$\mathrm{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_x(x)\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Обратим внимание, что математическое ожидание функции — *функционал*, значение которого представляет собой *детерминиро-*

ванную величину, а $\mathrm{M}[\cdot]$ в выражении (2.11) — *оператор математического ожидания*, действующий на функцию $\varphi(X)$.

Напомним определения понятий функционала и оператора. Правило, ставящее каждому объекту x класса A в соответствие некоторый объект y класса B, называется *преобразованием* (*отображением*) класса A в класс B. Класс A образует *область определения*, а класс B — *область значений отображения*.

Если классы A и B представляют собой числовые множества, то y называется *функцией* аргумента x, если класс A представляет собой множество функций, а класс B — числовое множество, то y называется *функционалом* x, если же оба класса A и B представляют собой множества функций, то преобразование называется *оператором*.

Наиболее общее понятие оператора. Понятия функции и функционала входят в понятие оператора как частные случаи.

Функционал можно трактовать как функцию от функции.

Математическим ожиданием m_x *случайной величины* X с плотностью распределения $f_x(x)$ называется математическое ожидание функции вида $\varphi(X) = X$. Таким образом, $m_x = \mathrm{M}[X]$.

Дисперсией D_x *случайной величины* X с плотностью распределения $f_x(x)$ называется математическое ожидание центрированной (на математическое ожидание m_x) функции $\varphi(X) = (X - m_x)^2$, т. е. $D_x = \mathrm{M}[(X - m_x)^2] = \mathrm{D}[X]$, где $\mathrm{D}[\cdot]$ — *оператор дисперсии*.

Среднеквадратическим отклонением (*СКО*) σ_x случайной величины X называется корень из дисперсии, т. е. $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Математическое ожидание m_x случайной величины X характеризует с учетом плотности распределения $f_x(x)$ *среднее значение* этой величины, а дисперсия D_x и СКО σ_x — *рассеяние* (*разброс*) этой случайной величины относительно математического ожидания.

Иногда для характеристики случайной величины вместо математического ожидания и СКО используют так называемые *робастные параметры*, в частности, медиану и абсолютное медианное отклонение.

Медианой распределения $e_x = \mathrm{med}[X]$ случайной величины X называется такое ее значение, которое делит площадь под плотностью распределения $f_x(x)$ пополам, т. е. является решением уравнения

$$F_x(x) = 0{,}5\,.$$

Если функция распределения строго возрастающая, то это уравнение имеет единственное решение; в противном случае — множество решений. Если распределение дискретное, то на практике обычно в качестве медианы используют *среднее арифметическое двух средних значений.*

Абсолютное медианное отклонение представляет собой медиану модуля центрированной на медиану e_x случайной величины X:

$$s_x = \operatorname{med}\left[\left|X - e_x\right|\right].$$

Заметим, что для описания случайных величин используют и другие полезные параметры, такие как *нецентральные* и *центральные моменты порядка* ν, определяемые соответственно как $m_\nu = \mathrm{M}[X^\nu]$ и $\mu_\nu = \mathrm{M}[(X - m_x)^\nu]$, *коэффициенты асимметрии, эксцесса, вариации* и пр., *квантили, кумулянты* (*семиинварианты*) и др. Поскольку при дальнейшем изложении материала они не используются, останавливаться на них не будем.

2.3.6 Числовые параметры различных случайных величин

Гауссовское распределение, как следует из выражения (2.7), целиком определяется математическим ожиданием m_x и среднеквадратическим отклонением σ_x (или дисперсией D_x). *Нечетные центральные моменты этого распределения равны нулю*, а *четные — выражаются через дисперсию* D_x.

Математическое ожидание *равномерного распределения* $m_x = (a + b) / 2$, а дисперсия $D_x = (b - a)^2 / 12$.

Случайная величина, аппроксимирующая *детерминированную величину* x_0, имеет математическое ожидание m_x, равное x_0, и дисперсию D_x, равную нулю.

Математическое ожидание и СКО особенно информативны, когда распределение *унимодально* (плотность распределения имеет один максимум).

Приведем пример. Результаты многократного измерения различных физических величин в условиях помех хорошо описываются гауссовским законом распределения. Это распределение унимодально. В этом случае оценка математического ожидания m_x, рассчитываемая по формуле (1.1), близка к истинному значению физической величины, а оценка СКО σ_x, описываемая формулой (1.2), адекватно характеризует разброс результатов измерений.

Рассмотрим другой пример, хотя и не типичный для теории вероятностей, но позволяющий проиллюстрировать возможности применения этой теории для решения не только вероятностных, но и детерминированных задач, и к тому же продемонстрировать полезность робастных параметров.

В магазине продается девять сортов ординарного вина ценой $\$1,...,\$9$ и коллекционное вино ценой $\$10\,000$ за бутылку. Спрашивается: какова средняя цена бутылки вина?

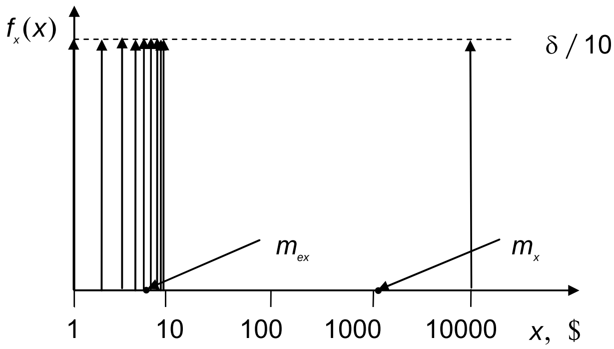


Рис. 2.7. Плотность распределения цены бутылок

Обратим внимание на два обстоятельства: во-первых, в данном случае цены — детерминированные величины, во-вторых, понятие средней цены не конкретизировано (под средним можно понимать, например, среднеарифметическое, среднегеометрическое, медиану и др.).

Решая задачу методами теории вероятностей, цены бутылок можно описать плотностью распределения, представляемой десятью δ-функциями, нормированными на десять (рис. 2.7). Расчеты параметров дают следующие результаты: математическое ожидание $m_x = \$1\,004{,}5$, СКО $\sigma_x = \$3\,160{,}7$, медиана $e_x = \$5{,}5$, а абсолютное медианное отклонение $s_x = \$2{,}5$.

Очевидно, что в данном примере математическое ожидание m_x и СКО σ_x совершенно неинформативны. В тоже время робастные параметры e_x и s_x имеют понятную интерпретацию: медиана e_x характеризует среднюю цену бутылок, находящихся в середине ряда (бутылок ценой $\$5$ и $\$6$), а абсолютное медианное отклонение s_x — разброс цен в районе середины.

Обратим внимание, что, если цена коллекционной бутылки вина превышает $\$9$, значения медианы и абсолютного медианного отклонения не зависят от этой цены.

Отметим, что *не все распределения* имеют моменты. Так, *распределение Коши моментов не имеет*[6]. Если моменты существуют, то при описании случайной величины часто ограничиваются использованием моментов первых двух порядков: математическим ожиданием и дисперсией. Робастные параметры обычно применяют, когда распределение не имеет моментов или, как в приведенном примере, они не информативны.

2.4. Векторные случайные величины

Положения предыдущего параграфа обобщаются на *многомерные* (*векторные*) *случайные величины* (*системы случайных величин*).

Для простоты изложения начнем с рассмотрения двумерной случайной величины, представляемой двумерным вектором-столбцом $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ со скалярными случайными компонентами X_1 и X_2 (системой скалярных случайных величин $\{X_1, X_2\}$), где Т — *оператор транспонирования*.

2.4.1 Вероятностные характеристики двумерной случайной величины

Для описания двумерной случайной величины $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ используют *двумерную функцию распределения* $F_{\vec{x}}(x_1, x_2)$, представляющую собой вероятность выполнения системы неравенств $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$:

$$F_{\vec{x}}(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}, \qquad (2.12)$$

а также связанную с ней *двумерную плотность распределения* $f_{\vec{x}}(x_1, x_2)$:

[6] У распределения Коши существует интеграл в смысле главного значения, описывающий первый момент. Значение этого интеграла равно x_0.

$$f_{\vec{x}}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{\vec{x}}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (2.13)$$

При решении практических задач часто прибегают к условным вероятностным характеристикам.

Условной функцией распределения случайной величины X_2 *при условии* $X_1 = x_1$ называется *одномерная* функция распределения $F_{x_2/x_1}(x)$, определенная при условии, что случайная величина X_1 приняла конкретное значение x_1.

Согласно выражению (2.1) плотность распределения $f_{\vec{x}}(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ равна произведению плотности распределения $f_{x_1}(x_1)$ случайной величины X_1 и условной плотности распределения $f_{x_2/x_1}(x_2)$ случайной величины X_2:

$$f_{\vec{x}}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2/x_1}(x_2). \qquad (2.14)$$

Случайные величины X_1 и X_2 называются *независимыми*, если их совместная плотность распределения $f_{\vec{x}}(x_1, x_2)$ равна произведению одномерных плотностей распределения $f_{x_1}(x_1)$ и $f_{x_2}(x_2)$ соответственно величин X_1 и X_2:

$$f_{\vec{x}}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \qquad (2.15)$$

(условная плотность распределения $f_{x_2/x_1}(x_2)$ равна безусловной плотности распределения $f_{x_2}(x_2)$).

Для независимых и только независимых случайных величин X_1 и X_2 двумерная функция распределения $F_{\vec{x}}(x_1, x_2)$ равна произведению одномерных функций распределения $F_{x_1}(x_1)$ и $F_{x_2}(x_2)$:

$$F_{\vec{x}}(x_1, x_2) = F_{x_1}(x_1) F_{x_2}(x_2)\,^{7}. \qquad (2.16)$$

---

[7] Независимость случайных величин X_1 и X_2 не означает, что эти величины никак не связаны между собой. Они могут быть связаны, однако на *вероятностном уровне* эта связь не проявляется.

2.4.2 Числовые параметры двумерной случайной величины

Под *математическим ожиданием* $\mathrm{M}[\varphi(X_1, X_2)]$ *функции* $\varphi(X_1, X_2)$ *случайных величин* X_1 и X_2 подразумевается среднее (с учетом плотности распределения $f_{\vec{x}}(x_1, x_2)$) значение функции $\varphi(X_1, X_2)$:

$$\mathrm{M}[\varphi(X_1, X_2))] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) f_{\vec{x}}(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 . \tag{2.17}$$

Математическим ожиданием $\vec{m}_{\vec{x}} = (m_{x_1}, m_{x_2})^{\mathrm{T}}$ *двумерной случайной величины* $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ называется вектор, компоненты которого m_{x_1}, m_{x_2} равны математическим ожиданиям случайных величин X_1 и X_2, т. е. $m_{x_1} = \mathrm{M}[X_1]$, $m_{x_2} = \mathrm{M}[X_2]$.

Дисперсией $\vec{D}_{\vec{x}} = (D_{x_1}, D_{x_2})^{\mathrm{T}} = \mathrm{D}[\vec{X}]$ *двумерной случайной величины* $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ называется вектор, компоненты которого D_{x_1} и D_{x_2} равны дисперсиям случайных величин X_1 и X_2.

Среднеквадратическим отклонением $\vec{\sigma}_{\vec{x}} = (\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2})^{\mathrm{T}}$ *двумерной случайной величины* $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ называется вектор, компоненты которого σ_{x_1}, σ_{x_2} равны корню из дисперсий D_{x_1} и D_{x_2} случайных величин X_1 и X_2.

Вектор математического ожидания $\vec{m}_x$ характеризует *среднее значение* вектора $\vec{X}$, а вектор дисперсии $\vec{D}_x$ и вектор СКО $\vec{\sigma}_{\vec{x}}$ — *рассеяние* компонент вектора $\vec{X}$ *вдоль осей* x_1 и x_2 относительно соответствующих компонент вектора $\vec{m}_x$.

Взаимосвязь случайных величин X_1 и X_2 характеризуют *смешанный* (*взаимный*) *корреляционный момент*

$$K_{x_1 x_2} = \mathrm{M}[X_1 X_2]$$

и *смешанный* (*взаимный*) *ковариационный момент*

$$R_{x_1 x_2} = \mathrm{M}[(X_1 - m_{x_1})(X_2 - m_{x_2})] .$$

Смешанный ковариационный момент $R_{x_1 x_2}$, нормированный на среднеквадратические отклонения σ_{x_1}, σ_{x_2}, носит название *коэффициента корреляции*:

$$r_{x_1 x_2} = \frac{R_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}}. \tag{2.18}$$

Смешанный ковариационный момент $R_{x_1 x_2}$ связан со смешанным корреляционным моментом $K_{x_1 x_2}$ и математическими ожиданиями m_{x_1}, m_{x_2} простым соотношением:

$$R_{x_1 x_2} = K_{x_1 x_2} - m_{x_1} m_{x_2}. \tag{2.19}$$

Смешанный ковариационный момент $R_{x_1 x_2}$ характеризует *линейную и только линейную связь* между рассматриваемыми случайными величинами. При отсутствии линейной связи ковариационный момент $R_{x_1 x_2}$ и коэффициент корреляции $r_{x_1 x_2}$ равны нулю. В этом случае случайные величины X_1 и X_2 называются *некоррелированными* (*линейно независимыми*).

Обратим внимание, что некоррелированность и независимость случайных величин — *разные понятия*. Из *независимости* случайных величин следует их *некоррелированность*. Однако в общем случае *из некоррелированности не следует независимость*. Эти понятия не совпадают, когда между случайными величинами существует *нелинейная связь*, не фиксируемая на уровне ковариационного момента.

Понятия некоррелированности и независимости совпадают лишь в некоторых частных случаях, например, когда случайные величины X_1 и X_2 совместно гауссовские.

Случайные величины X_1 и X_2 называются *ортогональными*, если смешанный корреляционный момент $K_{x_1 x_2}$ равен нулю.

Понятия некоррелированности и ортогональности — *разные понятия*. Если хотя бы одно из математических ожиданий m_{x_1}, m_{x_2} равно нулю, то из ортогональности случайных величин следует их некоррелированность, а из некоррелированности — ортогональность (см. соотношение (2.19)).

2.4.3 Двумерная система совместно гауссовских случайных величин

В качестве примера двумерной случайной величины рассмотрим *двумерную систему совместно гауссовских случайных величин*, описываемую двумерным *гауссовским* (*нормальным*) *законом распределения*.

Плотность распределения системы совместно гауссовских случайных величин X_1 и X_2 имеет колоколообразный вид (рис. 2.8) и задается пятью параметрами — математическими ожиданиями m_{x_1}, m_{x_2} величин X_1 и X_2, их СКО σ_{x_1}, σ_{x_2} и коэффициентом корреляции $r_{x_1 x_2}$:

$$f_{\vec{x}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|R_{\vec{x}}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})^{\mathrm{T}} R_{\vec{x}}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}}) \right), \qquad (2.20)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец, компоненты которого представляют собой значения случайных величин X_1 и X_2; $\vec{m}_{\vec{x}} = (m_{x_1}, m_{x_2})^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец математического ожидания, компоненты которого представляют собой математические ожидания случайных величин X_1 и X_2; $R_{\vec{x}}$ — квадратная *ковариационная матрица*

$$R_{\vec{x}} = \begin{Vmatrix} \sigma_{x_1}^2 & r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \\ r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{Vmatrix},$$

$R_{\vec{x}}^{-1}$ — матрица, обратная матрице $R_{\vec{x}}$; $|R_{\vec{x}}|$ — *детерминант матрицы* $R_{\vec{x}}$.

Кривая постоянной плотности распределения на любом фиксированном уровне C представляет собой эллипс (*эллипс рассеяния*). Центр этого эллипса расположен в точке (m_{x_1}, m_{x_2}). Размеры его осей определяются СКО σ_{x_1}, σ_{x_2}, коэффициентом корреляции $r_{x_1 x_2}$ и величиной параметра C.

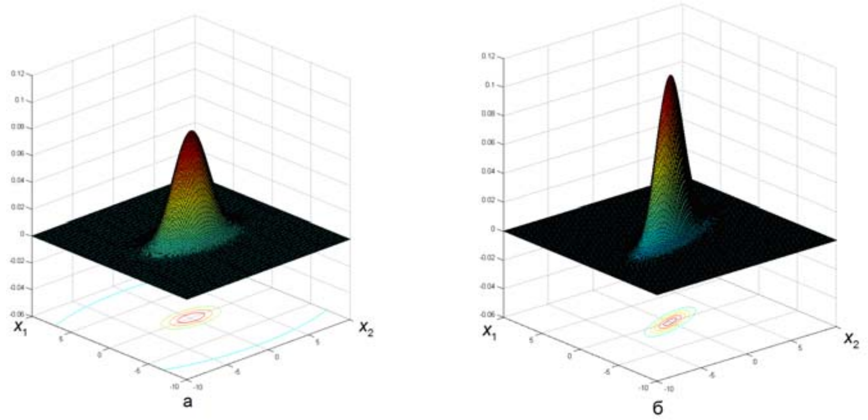


Рис. 2.8. Плотность распределения системы двух совместно гауссовских случайных величин при коэффициенте корреляции $r_{x_1x_2} = 0$ (**а**) и $r_{x_1x_2} = 0,7$ (**б**) ($\sigma_{x_1} = 1$, $\sigma_{x_2} = 2$)

При разных значениях параметра C получаются разные по размеру эллипсы рассеяния. Центры и ориентация осей эллипсов, соответствующих разным уровням C, совпадают (рис. 2.8).

При нулевых математических ожиданиях центры эллипсов рассеяния располагаются в начале координат. Если случайные величины некоррелированные $(r_{x_1x_2} = 0)$, то оси эллипсов ориентированы вдоль осей координат. Если, к тому же, СКО равны ($\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$), то эллипсы вырождаются в окружности радиуса σC.

Система коррелированных совместно гауссовских случайных величин X_1 и X_2 с помощью линейного преобразования координат может быть приведена к системе некоррелированных (независимых) совместно гауссовских случайных величин Y_1, Y_2 с нулевыми математическими ожиданиями.

Заметим, что система совместно гауссовских случайных величин *остается совместно гауссовской* при любых *линейных преобразованиях* координат.

2.4.4 Характеристики и параметры многомерной системы случайных величин

Приведенные соотношения, касающиеся двумерной векторной случайной величины, обобщаются на случайные величины мерности $N > 2$.

Функция распределения N*-мерной случайной величины* $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$ (системы $\{X_1, \ldots, X_N\}$ случайных величин $X_1, \ldots, X_N$) описывается выражением

$$F_{\vec{x}}(\vec{x}) = F_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_N) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_N < x_N\},$$

а соответствующая *плотность распределения многомерной случайной величины* — выражением

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^N F_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}.$$

Зависимость плотности распределения $f_{\vec{x}}(\vec{x})$ от значения $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ трехмерного случайного вектора $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ образно можно представить в виде изображенного на рис. 2.3 облака разной плотности.

Частным случаем многомерной случайной величины $\vec{X}$ является *многомерная гауссовская случайная величина*, компоненты которой имеют *совместно гауссовское распределение*. В N-мерном случае плотность такого распределения

$$f_{\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \, | R_{\vec{x}} |^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})^{\mathrm{T}} R_{\vec{x}}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}}) \right], \qquad (2.21)$$

где $\vec{x} = (x_1, ..., x_N)^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец, описывающий значения случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$, $\vec{m}_{\vec{x}} = (m_{x_1}, \ldots, m_{x_N})^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец математического ожидания вектора $\vec{X}$, $R_{\vec{x}}$ — квадратная *ковариационная матрица* компонентов вектора $\vec{X}$ размером $N \times N$:

$$R_{\vec{x}} = \begin{Vmatrix} R_{x_1 x_1} & \dots & R_{x_1 x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{x_N x_1} & \dots & R_{x_N x_N} \end{Vmatrix},$$

где $R_{x_n x_m}$ ($n, m = \overline{1, N}$) — ковариационный момент величин X_n и X_m.

Заметим, что диагональные элементы матрицы $R_{\vec{x}}$ представляют собой дисперсии случайных величин $X_1, \dots, X_N$ ($R_{x_n x_n} = D_{x_n}$, $n = \overline{1, N}$).

2.5 Операции над случайными величинами

Функция распределения является исчерпывающей характеристикой случайной величины. На этом основании зачастую считают, что *случайные величины* X_1, X_2 *равны*, если их функции распределения $F_{x_1}(x)$, $F_{x_2}(x)$ совпадают: $F_{x_1}(x) = F_{x_2}(x)$.

Заметим, что с математической точки зрения такое определение равенства случайных величин *не совсем корректно*. Связано это с тем, что случайная величина однозначно описывается функцией распределения, однако в общем случае функция распределения неоднозначно определяет случайную величину. В качестве примера можно привести *две разные случайные величины*, отличающиеся по знаку, но описываемые одной и той же плотностью распределения, симметричной относительно нуля.

На практике обычно *интересуются не самими случайными величинами*, а их *вероятностными и числовыми характеристиками*. Поэтому *при решении практических задач* указанная математическая некорректность может быть проигнорирована.

При преобразовании случайных величин формируются новые случайные величины. Их вероятностные и числовые характеристики в общем случае отличаются от соответствующих характеристик исходных величин. Зная вид функции, описывающей преобразование, и характеристики исходных случайных величин, можно рассчитать характеристики случайных величин, получаемых в результате преобразования.

Расчетные формулы, как правило, достаточно громоздкие. Поэтому приводить их не будем. А ограничимся лишь некоторыми.

В результате сложения, вычитания, умножения и деления случайных величин X_1 и X_2, описываемых двумерной плотностью распределения $f_{\vec{x}}(x_1, x_2)$, получается случайная величина Y, плотность распределения $f_y(y)$ которой зависит от вида арифметической операции.

При *сложении*

$$f_y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}}(y - x_2, x_2)\mathrm{d}x_2\,, \tag{2.22}$$

при *вычитании*

$$f_y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}}(y + x_2, x_2)\mathrm{d}x_2\,, \tag{2.23}$$

при *умножении*

$$f_y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}}\left(\frac{y}{x_2}, x_2\right)\frac{\mathrm{d}x_2}{|x_2|} \tag{2.24}$$

и при *делении*

$$f_y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_2|\, f_{\vec{x}}\left(yx_2, x_2\right)\mathrm{d}x_2\,. \tag{2.25}$$

Математическое ожидание m_y и дисперсия D_y *суммы* случайных величин X_1 и X_2 с математическими ожиданиями m_{x_1}, m_{x_2}, дисперсиями D_{x_1}, D_{x_2} и ковариационным моментом $R_{x_1x_2}$ описываются выражениями

$$m_y = m_{x_1} + m_{x_2}\,,\ D_y = D_{x_1} + D_{x_2} + 2R_{x_1x_2}\,,$$

а математическое ожидание и дисперсия *разности* этих случайных величин — выражениями

$$m_y = m_{x_1} - m_{x_2}\,,\ D_y = D_{x_1} + D_{x_2} - 2R_{x_1x_2}\,.$$

Глава 3 Случайные функции

Формализовано понятие случайной функции. Приведена классификация случайных функций. Представлены способы описания случайного процесса с помощью функции распределения, плотности распределения и моментных функций, в частности математического ожидания, дисперсии, корреляционной и ковариационной функций. Рассмотрены стационарные процессы в узком и широком смыслах. Описаны преобразование Винера—Хинчина и обобщенное преобразование Винера—Хинчина. Рассмотрен спектральный способ описания случайного процесса на основе преобразования Винера—Хинчина. Рассмотрены эргодический и фрагментарно-эргодический процессы.

3.1 Основные понятия

Случайной функцией $X(t)$ называется многозначная числовая функция независимого аргумента t, значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$, где T — область определения аргумента, представляет собой случайную величину, называемую *сечением*. Множество значений всех сечений случайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й реализацией случайной функции $X(t)$ (*выборочной функцией*) (рис. 3.1) называется *детерминированная функция* $x_i(t)$, которая для фиксированного опыта $i \in I$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ *одно из значений* $x \in S$.

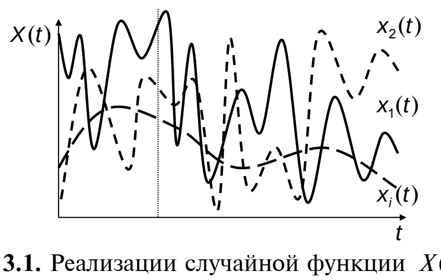


Fig. 3.1. Реализации случайной функции $X(t)$

Случайная функция имеет черты как случайной величины, так и детерминированной функции: при фиксации значения аргумента

t она превращается в случайную величину, а при фиксации опыта i — в детерминированную функцию.

Множество реализаций I случайной функции может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Размерность L области T определения аргумента t может быть разной. Если $L = 1$, то случайную функцию $X(t)$ обычно называют *случайным процессом* и аргумент t ассоциируют со временем. Если $L > 1$, то аргумент t — векторная величина и функцию $X(t)$ называют *случайным полем*.

Если пространство состояний одномерно, то случайная функция — *скалярная*, если размерность пространства состояний больше единицы, то случайная функция — *векторная*.

Ограничимся рассмотрением скалярных случайных процессов, принимающих вещественные значения.

3.2 Описание случайных процессов

Случайный процесс $X(t)$ можно рассматривать как *векторную случайную величину*. При этом, как любую N-мерную векторную случайную величину, его можно описать с помощью N-мерной *функции распределения* $F_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = F_{\vec{x}}(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N)$ или N-мерной *плотности распределения* $f_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = f_{\vec{x}}(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N)$.

В этих выражениях после указания множества сечений $x_1,\ldots,x_N$ (вектора $\vec{x}$) через точку с запятой указано множество значений $t_1,\ldots,t_N$ (вектор $\vec{t}$), к которым эти сечения относятся.

Моменты случайного процесса зависят от вектора $\vec{t}$. Поэтому при описании моментов случайного процесса (и других числовых характеристик) добавляют аргументы, указывающие на сечения, к которым рассматриваемые моменты относятся. При этом моменты трактуются как *моментные функции* аргументов $t_1,\ldots,t_N$.

Например,

- *математическое ожидание функции* $\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_N))$ *сечений случайного процесса* $X(t)$ представляется функцией $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_N))]$;
- *математическое ожидание случайного процесса* $X(t)$ — функцией $m_x(t) = \mathrm{M}\,[X(t)]$;
- *дисперсия* — функцией $D_x(t) = \mathrm{M}[(X(t) - m_x(t))^2]$;
- *корреляционная функция* — функцией $K_x(t_1,t_2) = \mathrm{M}[X(t_1)X(t_2)]$;

- *ковариационная функция* — функцией

$$R_x(t_1,t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))].$$

Сечения случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_1, t_2 называются *независимыми*, если $f_{\vec{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{x_1}(x_1;t_1)f_{x_2}(x_2;t_2)$, *некоррелированными*, если для этих сечений *ковариационная функция* $R_x(t_1,t_2) = 0$, и *ортогональными*, если корреляционная функция $K_x(t_1,t_2) = 0$.

Если сечения некоррелированные, то $K_x(t_1,t_2) = m_x(t_1)m_x(t_2)$, а если они ортогональные, то $R_x(t_1,t_2) = -m_x(t_1)m_x(t_2)$.

Если сечения случайной функции *коррелированны*, то они *зависимы*. Обратное утверждение верно не всегда. Если сечения *независимы*, то они *некоррелированные*. Если сечения *ортогональны*, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми, как коррелированными, так и некоррелированными. Если математические ожидания хотя бы одного из двух рассматриваемых сечений *равны нулю*, то *из ортогональности сечений следует их некоррелированность, а из некоррелированности — их ортогональность.*

3.3 Гауссовский случайный процесс

Раздел теории случайных функций, в котором случайные функции описываются с привлечением лишь моментных функций первого и второго порядков, называется *корреляционной теорией случайных функций* (*процессов*).

Описание случайных процессов моментными функциями первых двух порядков — удобный прием и потому часто используется для решения практических задач. Однако, как правило, такое описание не является полным. Исключение составляют *гауссовские* (*нормальные*) *случайные процессы.*

Случайный процесс $X(t)$ называется *гауссовским* (*нормальным*), если для любого конечного множества его сечений $X(t_1),\dots,X(t_N)$ совместная плотность распределения описывается выражением

$$f_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |R_x|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m}_x)^{\mathrm{T}} R_x^{-1}(\vec{x} - \vec{m}_x)\right),$$

где $\vec{x} = (x(t_1),...,x(t_N))^{\mathrm{T}}$ — N-мерный вектор-столбец, n-я компонента которого представляет собой значение случайной величины $X(t_n)$; $\vec{m}_x = (m_x(t_1),...,m_x(t_N))^{\mathrm{T}}$ — N-мерный вектор-столбец математического ожидания, n-я компонента которого представляет собой математическое ожидание случайной величины $X(t_n)$; R_x — ковариационная матрица размером $N \times N$, элементы которой представляют собой ковариационные моменты $R_x(t_n, t_m)$ случайных величин $X(t_n)$, $X(t_m)$, $n, m = \overline{1, N}$; R_x^{-1} — матрица, обратная ковариационной матрице R_x; Т — оператор транспонирования; $|R_x|$ — детерминант матрицы R_x.

Гауссовские случайные процессы обладают целым рядом важных свойств, отличающих их от других случайных процессов.

Прежде всего, гауссовский случайный процесс полностью определяется математическим ожиданием $m_x(t)$ и ковариационной функцией $R_x(t_1, t_2)$. Отсюда следует, что корреляционная теория дает исчерпывающее описание такому процессу.

Все моменты высших порядков гауссовского случайного процесса выражаются через моменты первых двух его порядков.

Для гауссовских случайных процессов *некоррелированность сечений тождественна их независимости, а независимость — их некоррелированности.*

Гауссовский случайный процесс $X(t)$ с коррелированными (зависимыми) сечениями путем преобразования координат может быть сведен к гауссовскому случайному процессу с некоррелированными (независимыми) сечениями.

В результате любого линейного преобразования гауссовского случайного процесса линейным оператором получается гауссовский случайный процесс. Эта особенность называется *свойством устойчивости гауссовского случайного процесса по отношению к линейным преобразованиям.*

Обратим внимание, что при *нелинейном* преобразовании гауссовский случайный процесс превращается в *негауссовский* случайный процесс.

3.4 Стационарные случайные процессы

Особый интерес представляют так называемые стационарные процессы. Различают два типа стационарных процессов: процессы, стационарные в узком смысле и стационарные в широком смысле.

3.4.1 Случайные процессы, стационарные в узком смысле

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если его N -мерные вероятностные характеристики при любом N зависят только от величины временных интервалов $t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t. Случайные процессы, не принадлежащие к классу стационарных, называются *нестационарными*.

Основным свойством стационарного процесса является инвариантность к сдвигу вдоль оси t его вероятностных характеристик любой N -й мерности[1].

Поэтому одномерные вероятностные характеристики стационарного случайного процесса $X(t)$ не зависят от аргумента t, в частности функция распределения $F_x(x;t) = F_x(x)$, а плотность распределения $f_x(x;t) = f_x(x)$.

Двумерные же вероятностные характеристики зависят лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$ значений аргумента t, в частности функция распределения $F_{\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_{\vec{x}}(x_1, x_2; \tau)$, а плотность распределения $f_{\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{\vec{x}}(x_1, x_2; \tau)$.

Математическое ожидание и дисперсия стационарного процесса не зависят от времени t: $m_x(t) = m_x = \text{const}$, $D_x(t) = D_x = \text{const}$. Ковариационная и корреляционная функции зависят от разности значений аргументов: $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$, $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau)$.

---

[1] Это касается, в частности, N -мерной плотности распределения:

$$f_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) = f_{\vec{x}}(x_1, \ldots, x_N; t_1 + \tau, \ldots, t_N + \tau),$$

где τ — произвольное число.

3.4.2 Случайные процессы, стационарные в широком смысле

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно ($m_x(t) = m_x = \text{const}$), а ковариационная функция зависит только от разности значений аргумента t: $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$. Процессы, не удовлетворяющие указанным требованиям, называются *нестационарными в широком смысле*.

Понятия стационарности в узком смысле и широком смысле *не всегда тождественны*. Эти понятия совпадают, в частности, для гауссовских случайных процессов.

В дальнейшем под стационарным случайным процессом будем понимать (если не оговорено противное) процесс, *стационарный в широком смысле*.

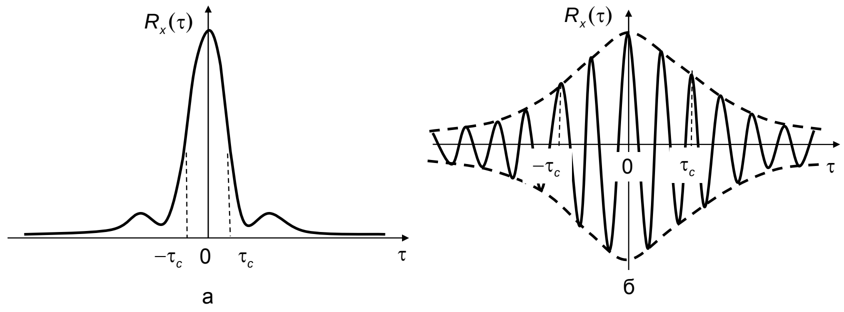


Рис. 3.2. Ковариационная функция широкополосного (**а**) и узкополосного (**б**) случайных процессов

В районе максимума максиморума ковариационной функции стационарного случайного процесса, достигаемого в точке $\tau = 0$, с возрастанием абсолютного значения τ значение ковариационной функции постепенно уменьшается (рис. 3.2 **а**) или уменьшается с осцилляцией (рис. 3.2 **б**).

Интервалом корреляции случайного процесса τ_c называется такое значение аргумента τ его ковариационной функции $R_x(\tau)$, начиная с которого *значения этой функции* (или *значения ее огибающей*) становятся настолько малыми, что ими можно пренебречь.

3.5 Спектральное описание случайных процессов

3.5.1 Преобразование Винера—Хинчина

Случайные процессы удобно представлять в спектральной области. Рассмотрим процесс $X_T(t)$, определенный на интервале $t \in [-T/2, T/2]$. Его можно представить в эквивалентной форме в виде *комплексного спектра* $\dot{A}_{X_T}(f)$ [2], где f — частота.

Процесс $X_T(t)$ и его комплексный спектр $\dot{A}_{X_T}(f)$ связаны между собой *преобразованием Фурье*:

$$X_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{X_T}(f) \exp(\mathrm{j}2\pi ft)\mathrm{d}f, \qquad (3.1)$$

$$\dot{A}_{X_T}(f) = \int_{-T/2}^{T/2} X_T(t) \exp(-\mathrm{j}2\pi ft)\mathrm{d}t. \qquad (3.2)$$

Важной характеристикой процесса являются его *спектр мощности* $S_{X_T}(f)$, связанный с комплексным спектром $\dot{A}_{X_T}(f)$ зависимостью

$$S_{X_T}(f) = \frac{1}{T}\left|\dot{A}_{X_T}(f)\right|^2. \qquad (3.3)$$

Обратим внимание, что комплексный спектр однозначно определяет процесс, однако спектр мощности определяет его *неоднозначно*. Одной и той же зависимости спектра мощности от частоты соответствует множество процессов с различными спектрами, отличающихся друг от друга фазовой структурой.

Если рассматриваемый процесс $X_T(t)$ — случайный, то при фиксированной частоте f величины $\dot{A}_{X_T}(f)$ и $S_{X_T}(f)$ — случайные величины.

---

[2] Точка над буквой, обозначающей величину, указывает на то, что величина комплексная.

Спектральная плотность мощности (*СПМ*) случайного процесса $X_T(t)$ *на конечном интервале наблюдения* T представляет собой усредненный по ансамблю реализаций спектр мощности $S_{X_T}(f)$:

$$S_{x_T}(f) = \mathrm{M}\left[S_{X_T}(f)\right] = \mathrm{M}\left[\frac{1}{T}\left|\dot{A}_{X_T}(f)\right|^2\right]. \tag{3.4}$$

При $T \to \infty$ СПМ $S_{x_T}(f)$ переходит в СПМ $S_x(f) = \lim\limits_{T\to\infty} S_{x_T}(f)$ процесса $X(t)$, определенного на *бесконечно большом интервале наблюдения.*

Приведенные соотношения справедливы *как для стационарных, так и нестационарных процессов.*

В случае, когда процесс *стационарный*, его СПМ и корреляционная функция связаны между собой *преобразованием Винера—Хинчина*:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau\,, \tag{3.5}$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f\,. \tag{3.6}$$

Из выражения (3.6) следует, что дисперсия процесса описывается выражением

$$D_x = K_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\mathrm{d}f\,,$$

из которого вытекает, что СПМ $S_x(f)$ характеризует *распределение мощности по частоте.*

3.5.2 Узкополосные и широкополосные процессы

Обычно спектр неравномерный. Часто его составляющие сосредоточены в непрерывной полосе частот Δf (*эффективной полосе*). В зависимости от соотношения между полосой Δf и частотой f_0, на которой СПМ достигает наибольшего значения, различают широкополосные и узкополосные процессы.

Узкополосными называются процессы, у которых $\Delta f / f_0 \ll 1$. Остальные процессы называются *широкополосными*.

Типичные ковариационные функции широкополосного и узкополосного случайных процессов приведены на рис. 3.2.

Величина полосы частот Δf связана с интервалом корреляции τ_c соотношением $\Delta f = 1 / \tau_c$. Отсюда следует, что чем шире эффективная полоса, тем меньше интервал корреляции, и чем больше интервал корреляции, тем уже полоса.

К числу широкополосных процессов относится белый шум.

Белый шум — идеализированный стационарный случайный процесс $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием, *спектральная плотность мощности которого постоянна*: $S_x(f) = N_0 / 2 = \text{const}$.

Ковариационная и корреляционная функции белого шума представляют собой δ-*функцию*, точнее $R_x(\tau) = K_x(\tau) = \delta(\tau) N_0 / 2$. Это означает, что сечения такого процесса, отстоящие как угодно близко друг от друга, некоррелированные, т. е. в этом случае интервал корреляции $\tau_c = 0$.

Эффективная полоса частот белого шума Δf и его *дисперсия* равны *бесконечности*. Поэтому *белый шум физически не реализуем*. Это лишь удобная математическая абстракция, приближенно описывающая случайные процессы с небольшими изменениями СПМ в широком диапазоне частот.

3.5.3 Обобщенное преобразование Винера—Хинчина

Преобразование Винера—Хинчина, связывающее корреляционную функцию $K_x(\tau)$ *стационарного случайного процесса* $X(t)$ с его спектральной плотностью мощности $S_x(f)$, обобщается на случай *нестационарных случайных процессов*.

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $X(t)$, определенный на всей числовой оси. Корреляционную функцию этого процесса можно представить в виде

$$K_x(t,\tau) = \mathrm{M}\left[X(t)X(t-\tau)\right]. \tag{3.7}$$

Средняя по аргументу t корреляционная функция $\bar{K}_x(\tau)$ такого процесса описывается выражением

$$\bar{K}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} K_x(t,\tau)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (3.8)$$

Спектр средней корреляционной функции $\bar{K}_x(\tau)$ имеет вид

$$\bar{S}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_x(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau\,. \qquad (3.9)$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{S}_x(f) = S_x(f)$, т. е. спектр средней корреляционной функции $\bar{K}_x(\tau)$ процесса $X(t)$ равен его СПМ $S_x(f)$. Поэтому средняя корреляционная функция процесса может быть найдена по его СПМ:

$$\bar{K}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f\,. \qquad (3.10)$$

Пара выражений (3.9) и (3.10) представляет собой *обобщенное преобразование Винера—Хинчина*, справедливое *как для стационарных, так и нестационарных процессов.*

3.6 Эргодические случайные процессы

Некоторые *стационарные случайные процессы* $X(t)$, называемые *эргодическими*, обладают специфической особенностью: любая их реализация $x(t)$ содержит в себе всю информацию о случайном процессе. Поэтому для расчета характеристик такого случайного процесса *не требуется множества реализаций*, а достаточно *одной реализации*, причем *любой.*

Расчет характеристик эргодического случайного процесса может быть проведен не путем усреднения по ансамблю реализаций, а *усреднением данных лишь одной реализации.*

Существует множество вариантов определения понятия эргодического случайного процесса. Ограничимся одним.

Стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t)$ называется *эргодическим в широком смысле*, если его математическое ожидание m_x совпадает со *средним по времени*

$$\overline{m}_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{d}\,t \tag{3.11}$$

любой его реализации $x(t)$, а ковариационная функция $R_x(\tau)$ — с его *автоковариационной функцией*

$$\overline{R}_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t+\tau) - \overline{m}_x\right)\left(x(t) - \overline{m}_x\right)\mathrm{d}t\,. \tag{3.12}$$

На этом основании математическое ожидание, корреляционная функция и ковариационная функция могут быть рассчитаны по следующим формулам: $m_x = \overline{m}_x$, $K_x(\tau) = \overline{K}_x(\tau)$, $R_x(\tau) = \overline{R}_x(\tau)$, где $\overline{K}_x(\tau)$ — *автокорреляционная функция*:

$$\overline{K}_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t\,.$$

Некоторые в целом *нестационарные случайные процессы* проявляют свойства стационарности и эргодичности на интервалах конечной длительности. Такие процессы называются *фрагментарно-эргодическими*. Они состоят из *практически эргодических фрагментов* определенной длительности T (рис. 3.3).

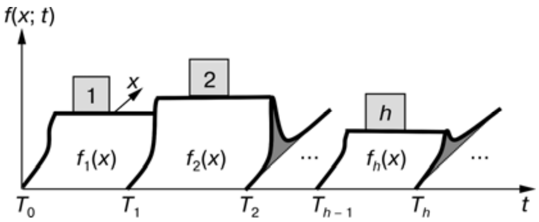


Рис. 3.3. Одномерная плотность распределения фрагментарно-эргодического случайного процесса $X(t)$ с фрагментами, описываемыми одномерными плотностями распределения $f_h(x)$, $T_{h+1} - T_h = T$, $h = 1, 2, \ldots$

Под *практически эргодическим фрагментом случайного процесса* подразумевается такой его фрагмент, характеристики которого (математическое ожидание и ковариационная функция) могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации этого фрагмента.

При решении практических задач важным вопросом является определение длительности T практически эргодических фрагментов, иначе говоря, *интервала эргодичности нестационарного случайного процесса*.

3.7 Преобразование случайных процессов

В результате преобразования случайного процесса формируется случайный процесс, характеристики которого определяются характеристиками исходного процесса и характеристиками оператора преобразования. Различают *неинерционные* (*безынерционные*) *и инерционные, линейные и нелинейные преобразования.*

При *безынерционном преобразовании* значение выходного процесса $Y(t)$ в момент времени t формируется путем преобразования значения исходного процесса $X(t)$ в тот же момент времени t, а при *инерционном преобразовании* — путем преобразования множества значений исходного процесса $X(t)$ в разные моменты времени.

Поскольку случайные функции можно трактовать как векторные случайные величины, расчет вероятностных и числовых характеристик процесса, получающегося в результате безынерционного преобразования (как линейного, так и нелинейного), осуществляется таким же образом, как и расчет аналогичных характеристик векторной величины, получающейся в результате такого преобразования.

Расчет характеристик случайного процесса при инерционных преобразованиях более сложен [Левин 1974, Горбань 2003]. На этом вопросе детально останавливаться не будем. Отметим лишь соотношение, которое понадобится в дальнейшем:

$$S_y(f) = \left|\dot{K}(f)\right|^2 S_x(f) . \tag{3.13}$$

В этой формуле $S_y(f)$ — спектральная плотность мощности случайного процесса $Y(t)$, получающегося в результате *линейного преобразования*, $\dot{K}(f)$ — *комплексная передаточная функция оператора преобразования*, характеризующая оператор, а $S_x(f)$ — спектральная плотность мощности исходного случайного процесса $X(t)$.

Глава 4 Основы математической статистики теории вероятностей

Введены понятия случайной выборки и статистики случайной величины. Рассмотрены оценки вероятностных характеристик и моментов. Приведены сведения об используемых в теории вероятностей типах сходимости, в частности сходимости последовательности случайных величин по вероятности и сходимости по распределению. Рассмотрены в классической интерпретации закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены сведения о статистиках случайных процессов. Обсуждена специфика выборок случайных величин и случайных процессов.

Реальные данные, с которыми приходится иметь дело, всегда ограниченного объема, а законы их распределения могут сильно отличаться друг от друга. Поэтому естественно возникает масса вопросов, связанных с корректным описанием и представлением реальных данных.

Среди основных задач этого круга можно выделить

1) формирование математических моделей, адекватно представляющих реальные данные,

2) формирование оценок различных характеристик и параметров, характеризующих реальные данные,

3) установление связи между характеристиками и параметрами, соответствующими бесконечно большому объему данных, и оценками тех же характеристик и параметров, полученными при ограниченном объеме данных,

4) оценка точности оценок (погрешности измерения) различных параметров.

Эти и многие другие вопросы, связанные с ними, изучаются в разделе теории вероятностей, называемом *математической статистикой.*

4.1 Статистики случайных величин

4.1.1 Выборка случайной величины

Статистической информацией называется любая информация о случайных явлениях (событиях, величинах, функциях). В настоящем пункте ограничимся рассмотрением статистической информации, касающейся *случайных величин.*

Случайные величины могут быть как скалярными, так и векторными. Далее в интересах упрощения изложения будем считать, что рассматриваемые случайные величины — *скалярные величины.*

Однако не надо забывать, что многие рассматриваемые положения справедливы и для векторных величин и случайных процессов.

Генеральной совокупностью случайной величины X, описываемой функцией распределения $F_x(x)$ (см. формулу (2.3)), называется бесконечное множество всех ее *реализаций* (*членов* или *элементов*). Обычно полагают, что *множество* (*ансамбль*) *реализаций* — счетное.

Конечное множество членов генеральной совокупности $x_1,\ldots,x_N$, полученное при конечном числе N опытов, называется *выборкой из генеральной совокупности* или просто *выборкой*, а ее элементы $x_1,\ldots,x_N$, образующие вектор $\vec{x}$, — *реализациями* (*выборочными значениями*). Элементы $x_1,\ldots,x_N$ являются *детерминированными величинами* (*числами*).

Считают, что выборка $x_1,\ldots,x_N$ принадлежит случайной величине X, если она получена из генеральной совокупности, описываемой функцией распределения $F_x(x)$.

Бесконечное множество выборок $\vec{x}$ объема N, сформированных из одной генеральной совокупности, представляет собой N-мерный *случайный вектор* $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_N)$, называемый *случайной выборкой* (*выборочной совокупностью*).

Обратим внимание, что *случайная выборка*, представляющая собой *случайный вектор* $\vec{X}$, и просто *выборка* (*детерминированная выборка*) $\vec{x}$, представляющая собой реализацию случайной выборки $\vec{X}$, — разные векторы.

Компоненты случайной выборки $\vec{X}$ часто полагают *взаимно независимыми случайными величинами* X_n ($n=\overline{1,N}$), которые описываются одной и той же функцией распределения $F_x(x)$ (или плотностью распределения $f_x(x)$, рис. 4.1 **а**).

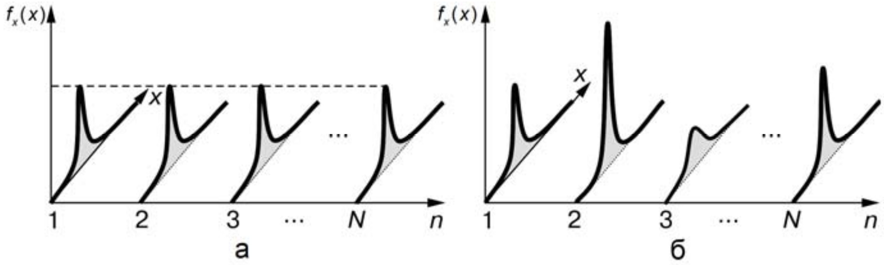


Рис. 4.1. Плотности распределения компонент $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ случайной выборки $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N)$: однородной (**а**) и неоднородной (**б**)

Тогда N-мерная функция распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x})$ случайной выборки $\vec{X}$ равна произведению одномерных функций распределения $F_x(x_n)$ компонент X_n случайной выборки:

$$F_{\vec{x}}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_x(x_n) .$$

Заметим, что кроме описанной широко распространенной *независимой однородной выборки* используют другую модель, в которой компоненты случайной выборки $\vec{X}$ тоже независимы, но имеют *разный закон распределения* (рис. 4.1 **б**).

Выборка, элементы которой имеют разные законы распределения, называется *неоднородной.*

Статистикой называется любая функция $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_N)$ *случайной выборки* $\vec{X}$, а также любая функция $y = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$ *детерминированной выборки* $\vec{x}$.

Статистика $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_N)$ представляет собой *случайную величину*, а статистика $y = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$ — *детерминированную величину* (*число*).

Выборка называется *представительной* (*репрезентативной*), если она позволяет с требуемой точностью[1] описать свойства случайной величины. Для получения репрезентативной выборки ее объем, как правило, должен быть достаточно большой.

Разновидностью статистики является *оценка*.

[1] Вопрос о том, что понимать под словом точность, рассматривается далее.

По генеральной совокупности можно вычислить *точные* вероятностные и числовые характеристики, например, функцию распределения $F_x(x)$ случайной величины X, ее математическое ожидание m_x, дисперсию D_x и другие моменты.

По выборке можно вычислить *приближенные оценки* этих же характеристик, например, оценку функции распределения $F_x^*(x)$, оценку математического ожидания m_x^*, оценку дисперсии D_x^*, оценки других моментов. Если *выборка случайная*, то эти оценки — *случайные*, если же *выборка детерминированная*, то оценки — *детерминированные*.

Вариационным (*статистическим*) *рядом* называется детерминированная выборка $x_1,\ldots,x_N$, упорядоченная по возрастанию или убыванию выборочных значений, а *ранжированным рядом* — детерминированная выборка, элементы которой упорядочены по убыванию. *Размахом выборки* называется разность между максимальным и минимальным членами детерминированной выборки.

4.1.2 Оценки вероятностных характеристик

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую дискретные значения $x_1,\ldots,x_J$.

Частотой выборочных значений ω_j^* называется отношение числа N_j одинаковых значений x_j, встречающихся в выборке, к объему выборки N: $\omega_j^* = N_j / N$.

Частоту выборочных значений ω_j^* можно рассматривать как *детерминированную величину*, если речь идет о детерминированной выборке, и как *случайную величину*, если речь идет о случайной выборке. В обоих случаях частота выборочных значений является аналогом вероятности p_j того, что случайная величина X примет значение x_j.

Статистическим распределением выборки называется перечень выборочных значений x_j и соответствующих им частот ω_j^*: $(x_j,\ \omega_j^*),\ j=\overline{1,J}$.

Полигоном частот называется ломанная, соединяющая последовательный ряд точек $(x_j,\ \omega_j^*),\ j=\overline{1,J}$ статистического распределения детерминированной выборки.

Построение статистического распределения имеет смысл лишь для выборки дискретных случайных величин, принимающих небольшое число J разных значений x_j. Для непрерывных случайных величин, а также для дискретных случайных величин, принимающих большое количество разных значений, применяют интервальное статистическое распределение выборки, базирующееся на понятии разряда.

Разрядами называются не перекрывающиеся интервалы значений случайной величины X.

При разделении диапазона возможных значений случайной величины X на разряды следует учитывать, что количество разрядов не должна быть слишком большим. Практика показывает, что в большинстве случаев целесообразно выбирать число разрядов порядка 10—20.

Частотой выборочного распределения p_i^*, соответствующей i-му разряду, называют отношение количества N_i значений выборки, попавших в i-й разряд, к объему N выборки: $p_i^* = N_i / N$.

Интервальным статистическим распределением выборки называется перечень разрядов с соответствующими этим разрядам частотами.

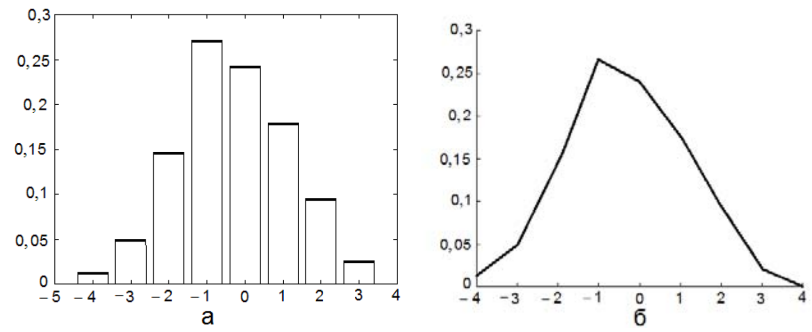
Плотностью частот f_i^* *выборочного распределения* называют отношение частоты p_i^* i-го разряда к его длине Δx_i: $f_i^* = p_i^* / \Delta x_i$. Она представляет собой оценку плотности распределения $f_x(x)$ генеральной совокупности.

Как и частота выборочных значений, частота и плотность частот выборочного распределения представляют собой детерминированные величины, если выборка детерминированная, и случайные величины, если выборка случайная.

Гистограммой распределения называется столбчатая диаграмма, используемая для графического изображения интервальных распределений детерминированной выборки. Основы столбцов представляют разряды, а высота i-го столбца равняется соответствующей частоте p_i^*.

Примеры гистограммы и полигона интервального распределения приведены на рис. 4.2 **а**, **б**.

Статистической (*эмпирической*) *функцией распределения* называется функция $F_x^*(x)$, определяющая для каждого значения x случайной величины X *частоту события* $X < x$.



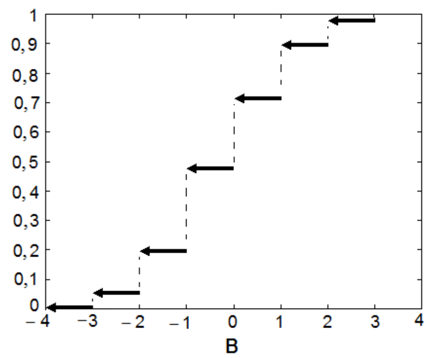


Рис. 4.2. Примеры гистограммы распределения (**а**), полигона интервального распределения (**б**) и интервальной статистической функции распределения (**в**), построенные по одной и той же выборке

Статистическая функция распределения является аналогом функции распределения $F_x(x)$, называемой в математической статистике *истинной* (*теоретической*) *функцией распределения*.

В случае детерминированной выборки статистическая функция распределения $F_x^*(x)$ описывается неубывающей ступенчатой функцией аргумента x. Ее свойства такие же, как и теоретической функции распределения.

Наряду со статистическими функциями распределения используют *интервальные статистические функции распределения*, в которых в качестве аргумента выступают не значения x случайной величины X, а разряды. Пример такой функции представлен на рис. 4.2 **в**.

4.1.3 Оценки моментов

В качестве оценок моментов выступают *выборочные моменты*, в частности, выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочное СКО и др.[2].

Выборочным средним (*выборочным математическим ожиданием*) *случайной выборки* $X_1, ..., X_N$ называется *случайная величина*

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n . \tag{4.1}$$

Выборочной дисперсией случайной выборки $X_1, ..., X_N$ называется *случайная величина*

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (X_n - m_x^*)^2 , \tag{4.2}$$

а выборочным среднеквадратическим отклонением — случайная величина $\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*}$.

Выборочным корреляционным моментом случайных выборок $X_1, ..., X_N$ и $Y_1, ..., Y_N$ называется *случайная величина*

$$K_{xy}^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} X_n Y_n ,$$

а *выборочным ковариационным моментом — случайная величина*

$$R_{xy}^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (X_n - m_x^*)\,(Y_n - m_y^*) ,$$

где m_x^* и m_y^* — выборочные математические ожидания случайных выборок $X_1, ..., X_N$ и $Y_1, ..., Y_N$.

---

[2] Приведенные далее варианты определения выборочных моментов не являются единственно возможными.

4.2 Сходимость последовательности случайных величин

Для дальнейшего изложения потребуется введение *понятия сходимости последовательности случайных величин*. Это понятие аналогично понятию *сходимости числовой последовательности*.

В п. 1.2.1 дано определение понятия сходимости числовой последовательности с использованием понятия бесконечно малой величины. Напомним еще другой вариант определения этого понятия.

Число a называется *пределом числовой последовательности* $x_1, x_2, \ldots$ (иначе, числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ *сходится к числу* a (при этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$)), если для каждого как угодно малого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ (рис. 4.3).

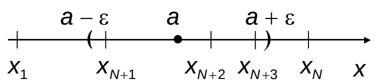


Рис. 4.3. Иллюстрация сходимости числовой последовательности

Смысл этого определения (как и приведенного в п. 1.2.1) в том, что при $n \to \infty$ величина x_n стремится к числу a.

Доказано, что если предел последовательности существует, то он *единственный*.

Таким образом, в рамках математического анализа *числовая последовательность может сходиться только к числу или не сходиться* (*расходиться*).

В теории вероятностей используются разные варианты сходимости случайных последовательностей, в частности, сходимость случайных величин к случайной (или детерминированной) величине. Чаще всего используют следующие четыре вида сходимости: *сходимость по функции распределения* (*в смысле Бернулли*), *в среднеквадратическом*, *почти наверное* (*с вероятностью единица*) и *по вероятности* (*по мере*).

Поскольку при решении большинства практических задач вид сходимости не играет существенной роли, детально останавливаться на этом вопросе не будем, а рассмотрим два часто используемых вида: сходимость по вероятности и по функции распределения.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ называется сходящейся к X *по вероятности* (X_n *сходится к* X *по вероятности*) при $n \to \infty$, если $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Понятие сходимости последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ к случайной величине X *по функции распределения* определяется следующим образом.

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ описываются функциями распределения $F_{x_1}(x), F_{x_2}(x), \ldots$, а случайная величина X — функцией распределения $F_x(x)$. Тогда *последовательность* $X_1, X_2, \ldots$ *сходится к* X *по функции распределения* (при этом пишут $F_{x_n}(x) \to F_x(x)$), если в каждой точке x, где $F_x(x)$ непрерывна, при $n \to \infty$

$$F_{x_n}(x) \to F_x(x).$$

Сходимость по распределению более слабая, чем сходимость по вероятности, т. е. последовательности, которые сходятся по вероятности, сходятся и по распределению. Обратное утверждение справедливо не всегда.

В общем случае величина X — случайная величина, в частном случае она может представлять собой число.

Поэтому случайная последовательность, если она сходится, может сходиться к *числу* или к *случайной величине*.

Далее, говоря о сходимости последовательности случайных величин, будем подразумевать (если не оговорено противное) *сходимость по вероятности*.

В теории вероятностей изучаются исключительно *сходящиеся* случайные последовательности. *Расходящиеся последовательности* исследуются *в теории гиперслучайных явлений*, которой посвящена вторая половина книги.

4.3 Закон больших чисел

Доказано, что при неограниченном возрастании объема случайной выборки, *обладающей свойством сходимости*, *эмпирическая функция распределения сходится к теоретической функции распределения*. В этом суть *основной теоремы математической статистики теории вероятностей — теоремы Гливенко—Кантелли*.

Эта теорема основана на *законе больших чисел*[3], который служит теоретическим обоснованием правомерности использования выборочного метода.

В настоящее время известно несколько вариантов закона больших чисел. Остановимся на одном из них, сформулированном и доказанном *П.Л. Чебышевым* в 1867 г.

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $m_{x_1}, \ldots, m_{x_N}$ и ограниченными дисперсиями (выборка может быть *неоднородной*). Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности и любом $\varepsilon > 0$ среднее выборочных значений $X_1, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к среднему математических ожиданий $m_1, \ldots, m_N$:

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_{x_n} \right| > \varepsilon \right\} = 0 . \qquad (4.3)$$

Если среднее математических ожиданий $m_{xN} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ имеет некоторый предел m_x (а это обычно предполагается в рамках теории вероятностей), то $\lim_{N \to \infty} m_{xN} = m_x$. Тогда, обозначая $m^*_{xN} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n$, выражение (4.3) можно записать в виде

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{ \left| m^*_{xN} - m_x \right| > \varepsilon \right\} = 0 . \qquad (4.4)$$

Из формулы (4.4) следует, что *теоретически* точность оценки математического ожидания, рассчитываемой путем вычисления выборочного среднего, возрастает с увеличением объема выборки, причем при $N \to \infty$ *возрастает до бесконечности*.

К сожалению, этот оптимистический теоретический результат теории вероятностей *противоречит опытным данным*. К вопросу о реальной точности оценок мы вернемся в главе 10, рассматривая его в рамках теории гиперслучайных явлений.

---

[3] Закон больших чисел впервые сформулирован в книге *Я. Бернулли*, опубликованной после его смерти в 1713 г.

4.4 Центральная предельная теорема

Перейдем к вопросу о законе распределения оценок. При неограниченном увеличении объема выборки предельный закон распределения определяется *центральной предельной теоремой*, широко используемой на практике. Ее формулировка и доказательство имеют долгую историю и связаны с именами *А. Муавра, П.С. Лапласа*, *П.Л. Чебышева*, *А.А. Маркова* и, конечно же, *А.М. Ляпунова.*

Известно много вариантов этой теоремы. Рассмотрим вариант, взятый с упрощением из учебника [Гнеденко 1988].

Теорема Линдеберга—Феллера. Пусть $X_1, \dots, X_N$ — в общем случае *неоднородная случайная выборка*, элементы которой *взаимно независимы* и описываются функциями распределения $F_{x_n}(x)$ с математическими ожиданиями m_{x_n} и дисперсиями D_{x_n} ($n = \overline{1, N}$). Выполняется некоторое не очень жесткое условие, называемое *условием Линдеберга* [Гнеденко 1988].

Тогда функция распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ выборочного среднего m^*_{xN} сходится равномерно к *гауссовской функции распределения*

$$F(x / m_{xN}, D_{xN}) = \Phi\left(\frac{x - m_{xN}}{\sqrt{D_{xN}}}\right) \tag{4.5}$$

с математическим ожиданием $m_{xN} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} m_{x_n}$ и дисперсией $D_{xN} = \dfrac{1}{N^2}\sum\limits_{n=1}^{N} D_{x_n}$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} F_{m^*_{xN}}(x) = \lim_{N\to\infty} F(x / m_{xN}, D_{xN}), \tag{4.6}$$

где $\Phi(x)$ — табулированная *функция Лапласа*, описываемая выражением (2.8).

Согласно формуле (4.6) по мере увеличения объема выборки случайная величина m^*_{xN} *приобретает гауссовский характер.*

Если средняя дисперсия ND_{xN} случайных величин X_n, $n = \overline{1, N}$ ограничена, дисперсия D_{xN} выборочного среднего m^*_{xN} *оказывается обратно пропорциональной объему выборки* N. Поэтому при $N \to \infty$ *дисперсия* D_{xN} *стремится к нулю.*

Таким образом, при увеличении объема случайной выборки функция распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$ *приближается к гауссовской функции распределения* $F(x / m_{xN}, D_{xN})$. При этом *дисперсия выборочного среднего* m_{xN}^* *стремится к нулю, его математическое ожидание* m_{xN} *стремится к математическому ожиданию* m_x*, а предельная функция распределения* $F_{m_x^*}(x)$ *функции распределения* $F_{m_{xN}^*}(x)$ *оказывается равной предельной гауссовской функции распределения* $F(x / m_x, 0)$, представляющей собой функцию единичного скачка в точке m_x (рис. 4.4).

Плотность распределения такой предельной функции распределения представляет собой δ-функцию в точке m_x.

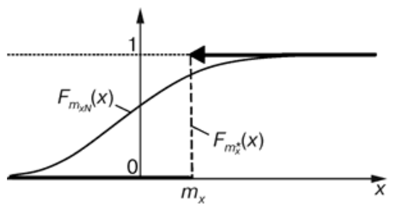


Рис. 4.4. Формирование предельной функции распределения $F_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$

Результаты множества экспериментальных исследований *реальных процессов* показывают, что при не очень большом объеме данных выборочное среднее проявляет тенденцию стремления к гауссовскому распределению. Однако при больших объемах данных эта тенденция не прослеживается. Указанная особенность детально анализируется в главе 9.

4.5 Статистики случайных процессов

Понятия и положения математической статистики, касающиеся случайных величин, обобщаются на случайные процессы. Не вдаваясь в детали, кратко остановимся на основных понятиях математической статистики случайных процессов.

Генеральной совокупностью случайного процесса $X(t)$ называется бесконечное множество его реализаций $x_1(t), x_2(t), \ldots$.

Элементом (*членом*) *генеральной совокупности* $X(t)$ называются любая его реализация $x_n(t)$.

Конечное множество членов генеральной совокупности $x_n(t)$ $(n=\overline{1,N})$, полученное при конечном числе N опытов, т. е. вектор $\vec{x}(t)=(x_1(t),\dots,x_N(t))$, называется *выборкой из генеральной совокупности* или просто *выборкой*.

На практике продолжительность экспериментов ограничена. Поэтому при статистических исследованиях случайного процесса $X(t)$ выборка объемом N представляет собой совокупность отрезков реализаций $x_n(t)$ определенной длительностью T.

Множество выборок объема N, сформированных из одной генеральной совокупности, представляет собой N-мерный векторный *случайный процесс* $\vec{X}(t)=(X_1(t),\dots,X_N(t))$, который называется *случайной выборкой*.

Обратим внимание, что следует отличать случайную выборку $\vec{X}(t)$ от просто выборки $\vec{x}(t)$, представляющей собой реализацию случайной выборки $\vec{X}(t)$.

Элементы $X_n(t)$ $(n=\overline{1,N})$ случайной выборки $\vec{X}(t)$ обычно полагают независимыми.

Статистикой случайного процесса $X(t)$ называется любая функция $Y(t)=\varphi(X_1(t),...,X_N(t))$ *случайной выборки* $\vec{X}(t)$, а также любая функция $y(t)=\varphi(x_1(t),...,x_N(t))$ *детерминированной выборки* $\vec{x}(t)$.

В общем случае статистика $Y(t)=\varphi(X_1(t),...,X_N(t))$ представляет собой *случайный процесс*, а статистика $y(t)=\varphi(x_1(t),...,x_N(t))$ — *детерминированный процесс*. Если статистика $Y(t)$ не зависит от аргумента t, то $Y(t)=Y$ — *случайная величина*, а $y(t)=y$ — *детерминированная величина* (*число*).

Разновидностью статистики является *оценка*.

По генеральной совокупности теоретически можно вычислить *точные* вероятностные и числовые характеристики, например, функцию распределения $F_x(x;t)$ случайного процесса $X(t)$, его математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D_x(t)$, корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$, ковариационную функцию $R_x(t_1,t_2)$ и пр.

По выборке можно вычислить *оценки* этих же характеристик, например, оценку функции распределения $F_x^*(x;t)$, оценку математического ожидания $m_x^*(t)$, оценку дисперсии $D_x^*(t)$, оценку корреляционной функции $K_x^*(t_1,t_2)$, оценку ковариационной функции $R_x^*(t_1,t_2)$ и прочие оценки.

Если *выборка случайная*, то оценки — *случайные*, если же *выборка детерминированная*, то оценки — *детерминированные*.

4.6 Особенности выборок случайных величин и процессов

Обратим внимание на общность и различие выборок случайной величины X и случайного процесса $X(t)$.

В случайной выборке $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ фиксированного объема N случайной величины X *элементы выборки* X_n *неупорядочены*. В случайной выборке $\vec{X}\ (t) = (X_1\,(t), \ldots, X_N\,(t))$ фиксированного объема N случайного процесса $X(t)$ *элементы выборки* $X_n(t)$ также *неупорядочены*. Поэтому в обоих случаях элементы этих выборок *не образуют последовательности*.

Однако *выборка случайного процесса* имеет особенность, не присущую выборке случайной величины, а именно: множество значений любого n-го случайного элемента $X_n(t)$ случайной выборки $\vec{X}\ (t)$, которые соответствуют *различным значениям аргумента* t, *упорядочены*. Они образуют *последовательность случайных величин* $X_n(t_1), X_n(t_2), X_n(t_3), \ldots$ $(t_1 < t_2 < t_3 < \ldots)$.

Упорядоченность значений любого элемента $X_n(t)$ случайной выборки $\vec{X}\ (t)$ может приводить (хотя и необязательно) к зависимости от аргумента t статистик $Y(t)$ и $y(t)$, в частности к зависимости оценок от аргумента t.

Любые реальные данные $x_1, \ldots, x_N$ — это результаты наблюдения за физическим явлением в разные моменты времени и в разных точках пространства, например, результаты многократного измерения размера детали, веса груза, напряжения, силы тока или любой другой физической величины.

Принимая во внимание зависимость результата наблюдения от момента времени и точки пространства, правильно было бы данные, получаемые опытным путем, рассматривать как функцию времени и координат в пространстве. Однако не всегда имеет смысл так поступать.

Зачастую можно предположить, что эмпирические данные *не зависят или несущественно зависят* от пространственно-временных координат[4]. Тогда элементы выборки можно считать *неупорядоченными* и использовать *модель случайной величины*.

Использование такой модели вполне оправдано и тогда, когда эмпирические данные, хотя и *сильно зависят от пространственно-временных координат*, однако для рассматриваемой статистики это обстоятельство *несущественно*.

На практике обычно представляют интерес достаточно простые статистики, в первую очередь выборочное среднее и выборочная дисперсия (или выборочное СКО). Для этих статистик вопрос об упорядоченности данных не актуален.

Когда предположение о независимости статистики от пространственно-временных координат неприемлемо, приходится использовать более сложную *модель случайного процесса*, учитывающую *порядок следования данных*. Статистика в этом случае может быть как случайной величиной, так и случайным процессом. Примером первого типа статистик может служить функция выборки, характеризующая интервал корреляции шумового процесса, примером второго типа — функция выборки, характеризующая форму импульса в радиотехническом устройстве или спектральную плотность мощности шумов.

Особо следует обратить внимание на то, что для *любой статистики* главнейшей характеристикой является ее *статистическая устойчивость*. Получение полезного для практики результата возможно лишь в том случае, если статистика обладает *стабильностью*, проявляющейся в том, что при большом объеме данных *изменение объема выборки в широких пределах не приводит к сильному изменению ее значения. Нестабильная статистика бесполезна*.

Идеальная статистика — функция выборки, обладающая *идеальной статистической устойчивостью*. При неограниченном увеличении объема данных она стремится к некоторому определенному числу (или детерминированному процессу), т. е. обладает *свойством сходимости*. К идеальным статистикам относятся *состоятельные оценки*, о которых будет идти речь в следующей главе.

К сожалению, идеальная статистика, идеальная статистическая устойчивость, сходимость и состоятельная оценка — красивые *математические абстракции*, которые реализовать *на практике не удается* и *в реальной жизни они не обнаруживаются*. Поэтому приходится искать пути построения и использования, хотя и *неидеальных, но как можно более устойчивых статистик*, позволяющих получить объективную информацию об изучаемом явлении.

---

[4] Эту гипотезу широко используют в метрологии при проведении измерений различных физических величин.

Глава 5 Оценка точности измерений на основе теории вероятностей

Рассмотрены современные концепции оценки точности измерения. Описаны различные виды погрешности. Рассмотрена классическая детерминированно-случайная модель измерения, допускающая разложение погрешности на систематическую и случайную составляющие. Описаны точечная и интервальная оценки. Применительно к случайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема выборки.

5.1 Принципы описания точности измерений

Методы математической статистики эффективно используются в различных прикладных областях, в частности *метрологии* — науке об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Измерение — совокупность операций для определения отношения измеряемой физической величины к однородной величине, *принятой за единицу.*

Измерить физическую величину не означает получить в результате лишь число, количественно ее характеризующую. Необходимо еще указать *точность измерения.*

Точность измерения — качественная категория, количественно характеризуемая *погрешностью* или *неопределенностью измерения.*

Для характеристики точности измерения в настоящее время применяются два подхода. Один из них основан на *концепции погрешности измерения*, другой — на *концепции неопределенности измерения.*

5.1.1 Концепция погрешности измерения

Основы концепции погрешности измерения были заложены в средние века еще *Галилео Галилеем* [Галилей 1948].

В метрологии различают три близких понятия, используемых при определении понятия погрешности: *истинное значение* измеряемой физической величины, *действительное ее значение* и *результат измерения.*

Истинное значение — значение измеряемой физической величины, идеальным образом отражающее свойство данного объекта в количественном и в качественном отношении.

Истинное значение — объективная принципиально не достижимая абсолютная истина. В метрологии истинное значение понимается как *детерминированное, неизменное* и *однозначное.*

На практике абстрактное понятие истинного значения заменяют понятием «действительное значение». *Действительное значение* — это экспериментально найденное значение измеряемой физической величины, близкое к истинному, и отличающееся от него на величину, считающуюся пренебрежимо малой для данной цели.

Результат измерения представляет собой приближенную оценку истинного значения величины, найденную путем измерения.

Погрешность измерения — разница между результатом измерения и истинным (или действительным) значением измеряемой величины.

Погрешность изменяется во времени. Зависимость погрешности от времени представляет собой широкополосный процесс.

По характеру проявления погрешности делят на *систематические, случайные, прогрессирующие* и *грубые* (*промахи*).

Деление погрешности на отдельные составляющие связано с попыткой независимого описания разных участков частотного спектра. Такое деление является условным. Оно введено исключительно для удобства.

Под *систематической* понимают *погрешность*, которая при многократном измерении остается *постоянной* или изменяется *по определенному закону.*

Под *случайной* понимают *погрешность*, которая при повторных измерениях изменяется *случайным* образом.

Возникновение случайной погрешности обычно связывают со случайными временными и (или) пространственными изменениями множества различных влияющих величин, а систематическую погрешность — с отклонениями параметров или условий измерения от идеальных.

Систематическая погрешность отражает особенности спектра погрешности на нулевой частоте (или в близлежащей области).

Случайную погрешность можно уменьшить путем статистической обработки результатов ряда измерений, систематическую погрешность, как правило, — путем учета тех или иных известных зависимостей результата измерений от параметров, влияющих на результат.

В ряде случаев систематическая погрешность частично может быть скомпенсирована путем применения особых способов измерения, которые дают возможность *без определения ее величины* уменьшить ее влияние на конечный результат. Известен целый ряд таких способов: замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений и др.

Если систематическая погрешность не изменяется от измерения к измерению (этот факт, как правило, принимается по умолчанию, если не оговорено противное), то *систематическая погрешность совпадает с математическим ожиданием суммарной погрешности. При этом математическое ожидание случайной погрешности оказывается равным нулю.*

Прогрессирующая (*дрейфовая*) *погрешность* — это *непредсказуемая погрешность*, медленно изменяющаяся во времени.

Прогрессирующая погрешность отражает особенности спектра погрешности в диапазоне низких и инфранизких частот. Выразить ее через систематическую погрешность и случайную погрешность с определенным законом распределения *нельзя.*

С математической точки зрения прогрессирующая погрешность возникает вследствие *непредсказуемой изменчивости* во времени закона распределения, в частности, математического ожидания, дисперсии и других параметров.

Прогрессирующую погрешность обычно связывают с процессами старения или износа деталей измерительных устройств: разрядкой источников питания, старением радиоэлементов, деформацией и изменением упругости механических деталей, окислением, коррозией и пр. Эти процессы очень медленные. Заметные изменения погрешности нередко наступают по истечении месяцев, лет или даже десятилетий.

Долгое время особого интереса к прогрессирующей погрешности метрологи не проявляли. Однако именно *прогрессирующая погрешность ограничивает потенциальную точность реальных измерений*[1].

Грубая погрешность (*промах*) — это *случайная погрешность* результата отдельного наблюдения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Промахи, как правило, возникают из-за ошибок или неправильных действий оператора либо кратковременных резких изменений условий проведения измерений.

Таким образом, погрешность множества измерения обычно рассматривается (за редким исключением учета прогрессирующей погрешности) как случайный процесс, как правило, стационарный,

---

[1] Этот вопрос рассматривается в главе 10.

представляемый систематической и случайной (с нулевым математическим ожиданием) составляющими.

При построении физических моделей измеряемых величин и их оценок в рамках теории вероятностей *обычно предполагают, что величины, подлежащие измерению, носят детерминированный, а их оценки — случайный характер.* Для математического описания измеряемых величин используют детерминированные математические модели, а для описания их оценок — случайные (стохастические) модели с определенными законами распределения. На этом построена вся современная классическая теория измерений.

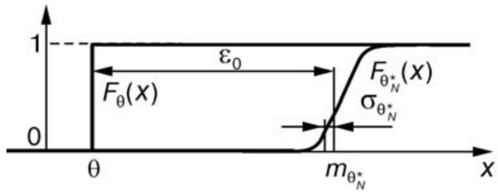


Рис. 5.1. Классическая (детерминированно-случайная) модель измерения

Измеряемую детерминированную величину θ можно описать скачкообразной функцией распределения $F_\theta(x)$, а случайную оценку Θ_N^* — функцией распределения $F_{\theta_N^*}(x)$ (рис. 5.1). Такую модель будем называть *детерминированно-случайной моделью измерения* [Горбань 2007 (1), 2011 (1), 2014 (1)].

5.1.2 Концепция неопределенности измерения

В рамках *концепции неопределенности измерения* рассматриваются два типа неопределенностей измерения: по типу A и по типу B.

Под *неопределенностью по типу* A подразумевают все составляющие неопределенности, оцениваемые путем применения статистических методов, а под *неопределенностью по типу* B — все составляющие, оцениваемые другими способами [Руководство 1999, Uncertainty 2009].

В указанных документах приведен перечень возможных источников возникновения неопределенности, включающий

1) неполное определение измеряемой величины;

2) несовершенную реализацию определения измеряемой величины;

3) нерепрезентативную выборку — измеренный образец может не представлять определяемую измеряемую величину;

4) неточные данные об условиях окружающей среды, влияющих на измерение, или несовершенное измерение условий окружающей среды;

5) субъективную систематическую погрешность оператора при снятии показаний аналоговых приборов;

6) конечную разрешающую способность прибора или порог чувствительности;

7) неточные значения, приписанные эталонам, используемым для измерения, и стандартным образцам веществ и материалов;

8) неточные значения констант и других параметров, полученных из внешних источников и используемых в алгоритме обработки данных;

9) аппроксимации и предположения, используемые в методе измерения и измерительной процедуре;

10) изменения в повторных наблюдениях измеряемой величины при одинаковых условиях.

Эти источники не обязательно являются независимыми и некоторые из источников от 1) до 9) могут вносить вклад в источник 10).

Неопределенность измерения измеряемой величины θ характеризуется *неопределенностью* $u_{A\theta}$ *по типу* A, *неопределенностью* $u_{B\theta}$ *по типу* B, *суммарной стандартной неопределенностью* $u_\theta = \sqrt{u_{A\theta}^2 + u_{B\theta}^2}$ и *расширенной неопределенностью* $U_\theta = ku_\theta$ (где k — коэффициент охвата).

Деление погрешностей на случайные и систематические обусловлено *природой их возникновения* и *проявления* в ходе измерений, а деление неопределенностей по типам A и B — *методами их расчета*.

В настоящее время в среде метрологов бытует мнение, что концепция неопределенности более прогрессивная, чем концепция погрешности. Частично можно согласиться с их точкой зрения, но лишь частично.

С одной стороны, переход от случайной (в концепции погрешности) к неопределенной модели (в концепции неопределенности), трактуемой значительно шире, чем случайная модель, может только приветствоваться. Однако, с другой стороны, игнорирование природы возникновения и проявления погрешности делает концепцию неопределенности оторванной от реалий жизни.

Вряд ли имеет перспективу игнорирование физики явлений, впрочем, как и учет лишь случайных источников неточности измерений. По всей видимости, стратегия дальнейшего развития метрологии будет базироваться на модернизации либо концепции погрешности в направлении учета воздействия различных, не только случайных, факторов, либо концепции неопределенности в направлении учета природы возникновения и проявления неточности измерений.

В данной книге мы придерживаемся первого варианта стратегии.

5.2 Точечные оценки

5.2.1 Основные понятия

В рамках теории вероятностей измерение физической величины интерпретируют как оценку параметра *случайной величины* X по ее выборке $X_1, ..., X_N$.

Обычно исходят из того, что оцениваемый параметр (измеряемая величина) θ — *скалярная детерминированная однозначная величина, не изменяющая значения в процессе измерения*, а результаты измерения носят *случайный характер* и адекватно описываются *случайной выборкой* $X_1, ..., X_N$ (как правило, однородной с некоррелированными элементами). При этом результаты *конкретных* измерений $x_1, ..., x_N$ представляют собой *реализацию* случайной выборки.

Теория вероятностей предлагает два варианта оценки параметров. Один из них основан на формировании *точечных*, второй — *интервальных оценок*. Начнем рассмотрение с первого варианта.

Точечной оценкой или просто *оценкой* Θ_N^* *параметра* θ называется статистика (т. е. функция выборки $X_1, ..., X_N$). Поскольку выборка случайная, то случайной является и оценка Θ_N^*. Детерминированное значение θ_N^* оценки Θ_N^* рассматривается как приблизительное значение параметра θ.

Величину отклонения оценки Θ_N^* от истинного значения θ характеризует *случайная погрешность измерения* $Z_N = \Theta_N^* - \theta$, а величину отклонения конкретного значения оценки θ^*_N от истинного значения θ — *детерминированная погрешность* $z_N = \theta^*_N - \theta$ [2].

Погрешность описывают различными способами. Часто погрешность Z_N характеризуют *систематической погрешностью* ε_0 и *среднеквадратическим отклонением* (*СКО*) $\sigma_{\theta^*_N}$ *оценки* Θ^*_N (или *дисперсией* $\sigma^2_{\theta^*_N}$ *оценки* Θ^*_N). Числовыми параметрами, характеризующими погрешность Z_N, являются также *математическое ожидание квадрата погрешности*

$$\Delta^2_{z_N} = \mathrm{M}[\left|\Theta^*_N - \theta\right|^2] = \varepsilon_0^2 + \sigma^2_{\theta^*_N} \tag{5.1}$$

и корень из этой величины Δ_{z_N}.

5.2.2 Несмещенные оценки

В качестве оценок могут использоваться разные статистики. Важными характеристиками оценки является *несмещенность, состоятельность, эффективность* и *достаточность.*

Оценка Θ^*_N *параметра* θ называется *несмещенной*, если математическое ожидание $m_{\theta^*_N}$ случайной величины Θ^*_N, рассчитанное по совокупности выборок *любого конечного объема* N, равно оцениваемому параметру, т. е. для всех N имеем $m_{\theta^*_N} = \theta$. В противном случае оценка называется *смещенной* и описывается величиной смещения $\varepsilon_{0N} = m_{\theta^*_N} - \theta$.

Часто математическое ожидание $m_{\theta^*_N}$ и смещение ε_{0N} *не зависят* от объема выборки N [3]. Тогда $m_{\theta^*_N} = m_{\theta^*}$, $\varepsilon_{0N} = \varepsilon_0$.

В рамках детерминированно-случайной модели измерения погрешность Z_N представляют в виде суммы двух составляющих: *систематической погрешности* и *случайной погрешности с нулевым математическим ожиданием.* Систематическая погрешность харак-

---

[2] В английском языке *случайная погрешность* называется *estimator*, а *детерминированная погрешность — estimate.*

[3] В общем случае это не так. Оба параметра могут зависеть от объема выборки.

теризуется детерминированным смещением ε_0, а случайная погрешность V_N — *дисперсией погрешности* $\sigma^2_{z_N}$ (совпадающей с *дисперсией оценки* $\sigma^2_{\theta^*_N}$) или *СКО погрешности* σ_{z_N} (совпадающей с *СКО оценки* $\sigma_{\theta^*_N}$) (рис. 5.1).

Как видно из рисунка, погрешность

$$z_N \in [\varepsilon_0 - k\sigma_{\theta^*_N}, \varepsilon_0 + k\sigma_{\theta^*_N}], \tag{5.2}$$

а при наличии оценки θ^*_N измеряемая величина

$$\theta \in [\theta^*_N - \varepsilon_0 - k\sigma_{\theta^*_N}, \theta^*_N - \varepsilon_0 + k\sigma_{\theta^*_N}], \tag{5.3}$$

где k — константа, определяющая *степень доверия* (обычно $k \in [1,3]$).

Наличие смещения оценки Θ^*_N и величина смещения ε_0 зависят от закона распределения случайной величины X. При одном законе оценка может быть смещенной, при другом — несмещенной. Обычно стараются использовать несмещенные оценки, причем несмещенные при любых распределениях.

Факт смещения оценки зависит также от того, известны ли априорно другие параметры распределения, например, математическое ожидание, дисперсия. Оценки, несмещенные при наличии априорных сведений, могут оказаться смещенными при их отсутствии, и наоборот.

Несмещенной оценкой математического ожидания случайной величины X является оценка $m^*_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$.

Если математические ожидания случайных величин X и Y *неизвестны*, то *несмещенными оценками* дисперсии, СКО и взаимного ковариационного момента являются соответственно оценки

$$D^*_x = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m^*_x)^2,$$

$$\sigma^*_x = k_N\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m^*_x)^2},$$

$$R^*_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m^*_x)(Y_n - m^*_y);$$

если же *математические ожидания известны*, то *несмещенными оценками* являются оценки

$$D_x^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_x)^2,$$

$$\sigma_x^* = k_{N+1}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_x)^2},$$

$$R_{xy}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_x)\,(Y_n - m_y),$$

где коэффициент k_N при увеличении объема выборки N быстро приближается к единице[4].

5.2.3 Состоятельные оценки

Важной характеристикой оценки является ее состоятельность.

Оценка Θ_N^* *параметра* θ называется *состоятельной*, если при увеличении объема выборки N она *сходится по вероятности* к этому параметру:

$$\lim_{N\to\infty} P\{|\Theta_N^* - \theta| > \varepsilon\} = 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

Если оценка Θ_N^* *не сходится* к какой-либо величине или *сходится к величине* $\theta_0 \neq \theta$, то она называется *несостоятельной.*

В теории вероятностей рассматривают *состоятельные оценки*; несостоятельные же оценки считаются «плохими».

Примеры несмещенной состоятельной и смещенной несостоятельной оценок приведены на рис. 5.2.

---

[4] Формула для расчета значений этого коэффициента при гауссовском распределении X и результаты его расчета по ней приведены, например, в [Горбань 2003].

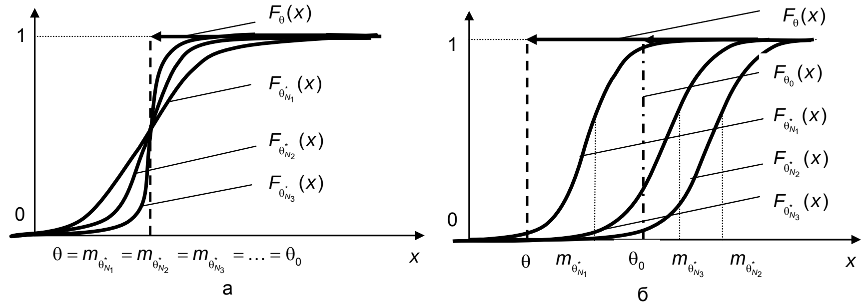


Рис. 5.2. Примеры несмещенной состоятельной оценки (**а**) и смещенной несостоятельной оценки с зависящим от объема выборки смещением и сходящейся к величине $\theta_0 \neq \theta$ (**б**)

Заметим, что реальные оценки, как показывают эксперименты, не обладают свойством сходимости, т.е. они *несостоятельны*. Исследование несостоятельных оценок выходит за рамки классической теории вероятностей. Они изучаются *в теории гиперслучайных явлений*. К рассмотрению несостоятельных оценок мы вернемся в главе 10.

5.2.4 Эффективные оценки

Важной характеристикой оценки являются ее эффективность.

Оценка Θ^*_{eN} *параметра* θ называется *эффективной*, если соответствующий ей средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z_{eN}}$ меньше, чем средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z_{iN}}$ любой другой оценки Θ^*_{iN}. Иначе говоря,

$$\mathrm{M}[(\Theta^*_{eN} - \theta)^2] < \mathrm{M}[(\Theta^*_{iN} - \theta)^2] \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Существуют и другие определения понятия эффективной оценки. Но останавливаться на этом вопросе не будем.

При формировании оценок стремятся к тому, чтобы они были как можно более близкими к эффективным оценкам. Потери, вызванные использованием неэффективной оценки Θ^*_N, описываются *параметром относительной эффективности* $l = \mathrm{M}[(\Theta^*_{eN} - \theta)^2] / \mathrm{M}[(\Theta^*_N - \theta)^2]$, который лежит в интервале $[0,1]$. В том случае, когда оценка эффективная, параметр l равен единице.

5.2.5 Достаточные оценки

Оценка Θ_N^* называется *достаточной*, если N-мерная условная плотность распределения $f_{\vec{x}/\theta^*}(x_1,...,x_N)$ выборки случайной величины X не зависит от оцениваемого параметра θ.

В случае достаточной оценки плотность распределения $f_{\vec{x}/\theta^*}(x_1,...,x_N)$ не содержит информации о параметре θ, т. е. *достаточная оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию об этом параметре.*

Таблица 5.1

Оцениваемый параметр	Статистика, используемая для оценки параметра	Несмещенность	Состоятельность	Эффективность[5]	Достаточность
Математическое ожидание m_x	$m_x^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$	+	+	+	+
Дисперсия D_x	$D_x^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_x^*)^2$	—	+	— l_1	+
	$D_x^* = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_x^*)^2$	+	+	— $l_2 < l_1$	+
Вероятность случайного события A	$p^* = \frac{N_A}{N}$	+	+	+	+

Для выборки $X_1, X_2, \ldots, X_N$ объемом N в качестве примера достаточной оценки может служить оценка математического ожидания $m_x^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$, а в качестве недостаточной оценки — оценка $m_x^* = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} X_n$, в которой отсчет X_N не используется.

Если оценка эффективная, то она обязательно достаточная. Обратное утверждение неверно.

Достаточные оценки существуют не всегда. Если достаточная оценка существует, то она определяется *неоднозначно.* Любая оцен-

---

[5] Эффективность при гауссовском распределении.

ка, связанная с достаточной оценкой взаимно однозначной зависимостью, тоже достаточная.

Свойства некоторых оценок параметров распределения случайной величины при *отсутствии априорной информации о математическом ожидании* приведены в табл. 5.1.

5.3 Прямые статистические измерения

Одним из наиболее распространенных видов измерений является *прямое статистическое измерение*, состоящее в непосредственном многократном измерении физической величины и статистической обработке полученных данных.

Существует множество методик измерений, учитывающих разную специфику условий их проведения[6].

В качестве оценки Θ_N^* обычно выбирают среднее множества результатов измерений: $\Theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$. Тогда детерминированная оценка θ_N^*, сформированная на основе множества *конкретных измерений* $x_1,...,x_N$, описывается выражением $\theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$.

Обычно полагают, что результаты измерений $X_1,...,X_N$ *независимы*, имеют *один и тот же неизвестный* закон распределения, *неизвестное математическое ожидание* и *неизвестную дисперсию* D_x. Тогда СКО $\sigma_{\theta_N^*}$ оценки Θ_N^* связано с дисперсией отсчетов D_x соотношением $\sigma_{\theta_N^*} = \sqrt{D_x / N}$.

Поскольку дисперсия D_x неизвестна, вместо дисперсии приходится использовать ее оценку $D_x^* = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \theta_N^*)^2$.

На основании выражений (5.2) и (5.3) границы интервала, в котором предположительно находится параметр θ, (*границы доверительного интервала*) описываются выражениями

$$\theta_{iN} = \theta_N^* - \varepsilon_0 - k\sigma_{\theta_N^*}^*, \quad \theta_{sN} = \theta_N^* - \varepsilon_0 + k\sigma_{\theta_N^*}^*, \tag{5.4}$$

[6] Часто, например, используется методика, изложенная в стандарте [ГОСТ 8.207-76 1976].

а *границы погрешности измерения* — выражениями

$$z_{iN} = \varepsilon_0 - k\sigma^*_{\theta^*_N}, \qquad z_{sN} = \varepsilon_0 + k\sigma^*_{\theta^*_N}, \tag{5.5}$$

где $\sigma^*_{\theta^*_N} = \sqrt{D^*_x / N}$ — оценка СКО оценки θ^*_N.

Отсюда следует, что методика измерения включает:

1) проведение N измерений искомого значения параметра θ (формирование дискретной выборки $x_1,...,x_N$);
2) расчет оценки $\theta^*_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$ параметра θ;
3) расчет оценки $\sigma^*_{\theta^*_N} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \theta^*_N)^2}$ СКО оценки θ^*_N;
4) определение по формулам (5.4) и (5.5) границ θ_{iN}, θ_{sN} интервала, в котором находится измеряемый параметр θ, и границ z_{iN}, z_{sN} интервала погрешности измерения z_N [7].

Следует предостеречь от некорректного использования этой и других методик измерения. До проведения любых измерений необходимо удостовериться, что используемые предположения адекватно отражают действительность. Неправомерное использование предположений, лежащих в основе методики, может быть источником грубых ошибок.

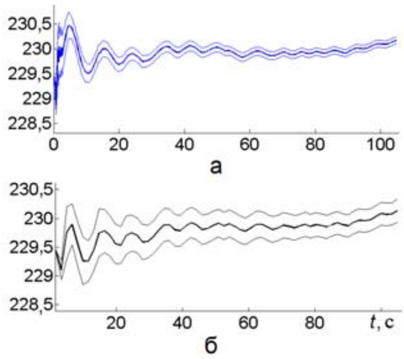


Рис. 5.3. Оценка напряжения электросети по данным рис. 1.4 без учета (**а**) и с учетом корреляции (**б**) отсчетов

[7] При практических расчетах константа k задается исследователем, а в качестве систематической погрешности ε_0 берется величина, указанная в паспорте измерительного прибора.

В качестве примера, иллюстрирующего сказанное, на рис. 5.3 приведены результаты оценки напряжения электросети на 100-секундном интервале наблюдения по данным рис. 1.4.

Толстым линиям соответствуют результаты расчета выборочных средних, полученных для нарастающего объема данных, а тонким линиям — границы интервалов, в которых находится измеряемый параметр. Оба рисунка получены по описанной методике, но рис. 5.3 **а** — с использованием всех подряд отсчетов, а рис. 5.3 **б** — с использованием каждого восьмого отсчета из массива данных. Прореживание введено с целью учета имеющей место корреляции отсчетов (рис. 5.4).

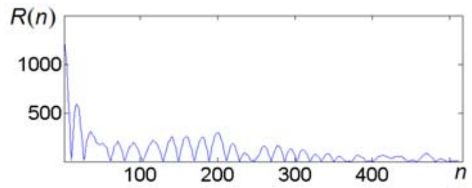


Рис. 5.4. Ковариационная функция процесса, изображенного на рис. 1.4

Сравнение рис. 5.3 **а** и рис. 5.3 **б** показывает, что игнорирование факта корреляции отсчетов приводит к искажению оценки выборочного среднего (особенно заметному при малом объеме данных) и занижению оценки погрешности измерения почти в 3 раза.

Результаты расчета параметров, характеризующих напряжения сети на интервале 100 с, представлены на рис 5.5.

Указанные на рис. 5.5 параметры (размах выборки, размах выборочного среднего, доверительный интервал и оценка напряжения) рассчитаны по данным рис. 1.4 и 5.3 **б**.

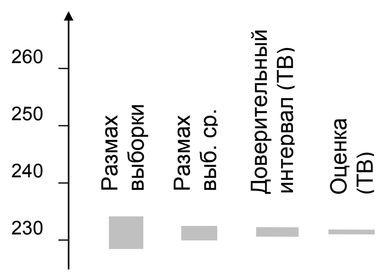


Рис. 5.5. Результаты расчета по методике теории вероятностей параметров, характеризующих напряжение электросети на протяжении 100 с наблюдения

Рассмотренная методика измерения и другие методики, основанные на детерминированно-случайной модели измерения, исходят из предположения, что элементы выборки и оценка адекватно описываются стохастическими моделями. В тех случаях, когда это предположение не отвечает действительности, возможны грубые ошибки. Об этом будет идти речь в главе 10.

5.4 Критический объем выборки

Средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z_N}$ определяется величиной смещения ε_0 и СКО оценки $\sigma_{\theta^*_N}$ (см. выражение (5.1)). При увеличении объема выборки N эта величина стремится к квадрату смещения ε_0^2.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий сказанное. Пусть оценка Θ^*_N представляет собой среднее выборки $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Элементы выборки независимы и имеют дисперсию D_x. Тогда дисперсия оценки

$$\sigma^2_{\theta^*_N} = D_x / N \tag{5.6}$$

и корень из среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{z_N} = \sqrt{\varepsilon_0^2 + D_x / N}\,. \tag{5.7}$$

Представление о зависимости величины Δ_{z_N} от определяющих параметров дает рис. 5.6. На рисунке более толстым линиям соответствует большая величина дисперсии D_x.

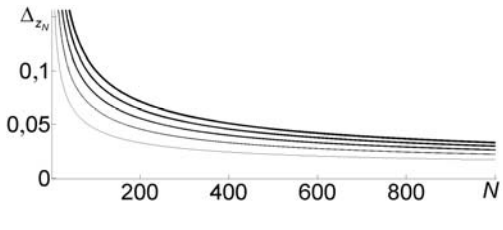


Рис. 5.6. Зависимость погрешности Δ_{z_N} от объема выборки N и дисперсии D_x. Смещение (систематическая погрешность) $\varepsilon_0 = 0{,}01$, $D_x = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$

На рисунке хорошо видно, что при $N \to \infty$ корень из среднего квадрата погрешности стремится к смещению ε_0 (систематической погрешности).

Когда систематическая погрешность ε_0 пренебрежимо мала, величина Δ_{z_N} обратно пропорциональна корню из объема выборки N. Отсюда следует, что теоретически при увеличении N точность измерения может беспрепятственно расти и при $N \to \infty$ стать бесконечно большой. Но это, как уже неоднократно упоминалось, противоречит опытным данным[8].

Если систематическая погрешность ε_0 мала, но пренебрегать ею нельзя, возникает вопрос: сколько элементов выборки имеет смысл брать *для минимизации погрешности*? Ответ, вроде бы, очевиден: чем больше отсчетов, тем лучше.

Но обратим внимание, что даже при очень большом объеме данных погрешность, как видно из выражения (5.7), оказывается не меньше смещения ε_0.

Поэтому имеет смысл поставить вопрос иначе: сколько элементов выборки *целесообразно* брать, учитывая, что при увеличении объема выборки затраты на получение дополнительных результатов измерений и их обработку возрастают?

При такой постановке вопроса ответ получается другой: имеет смысл выбирать минимальное количество отсчетов N_0, при котором дисперсия оценки $\sigma^2_{\theta^*_N}$ становится пренебрежимо малой по сравнению с квадратом смещения ε_0^2.

В метрологии принято считать [ГОСТ 8.207-76 1976], что можно пренебрегать случайной составляющей погрешности, если $\varepsilon_0 > 8\sigma_{\theta^*_N}$ [9]. Отсюда

$$\varepsilon_0^2 \,/\, \sigma^2_{\theta^*_{N_0}} \simeq 64. \qquad (5.8)$$

---

[8] Это противоречие между теорией и практикой стало отправной точкой углубленного исследования феномена статистической устойчивости и привело к разработке теории гиперслучайных явлений, учитывающей нарушения статистической устойчивости.

[9] В соответствии с тем же стандартом допустимо пренебрегать систематической составляющей погрешности, если $\varepsilon_0 < 0{,}8\sigma_{\theta^*_N}$.

Значение N_0, соответствующее равенству (5.8), можно назвать *критическим объемом выборки*.

Из выражений (5.6) и (5.8) следует, что критический объем

$$N_0 \simeq 64 D_x / \varepsilon_0^2. \tag{5.9}$$

Если, к примеру, дисперсия $D_x = \varepsilon_0^2$, то $N_0 = 64$ отсчета.

Формула (5.9) может служить ориентиром при выборе объема выборки.

Следует заметить, что указанной формулой можно пользоваться лишь тогда, когда квадрат смещения ε_0^2 не очень мал по сравнению с дисперсией D_x. Если $\varepsilon_0^2 \ll D_x$, то согласно формуле (5.9) $N_0 > 1000$.

В монографии [Джунь 2015] приведена классификация выборок в зависимости от их объема. Согласно этой классификации выборки объемом $N \in [2, 30]$ названы *малыми выборками* (*микровыборками*), объемом $N \in (30, 500]$ — *выборками среднего объема*, объемом $N \in (500, 5000]$ — *большими выборками*, а объемом $N > 5000$ — *колоссальными выборками*.

На практике редко удается существенно понизить погрешность измерения путем усреднения данных, число которых превосходит нескольких сотен, а тем более тысяч единиц.

Теория вероятностей не дает удовлетворительного объяснения, почему при малой систематической ошибке не удается достичь сверхвысокой точности измерения физических величин путем статистической обработки большого числа реальных данных. Объяснение этого эффекта приведено в главе 10 после изложения основ теории гиперслучайных явлений.

5.5 Интервальные оценки

Рассмотрим *интервальный подход* оценивания параметров.

Пусть измеряемый параметр θ — *детерминированная величина*, оценка Θ^* — *несмещенная случайная величина*, а случайная погрешность $Z = \Theta^* - \theta$ описывается плотностью распределения $f_z(z)$.

Вероятность того, что погрешность по модулю не превосходит величины ε:

$$\gamma = P(\left|\Theta^* - \theta\right| \le \varepsilon) \qquad (5.10)$$

называется *доверительной вероятностью* (*коэффициентом доверия*).

Выражение (5.10) характеризует вероятность нахождения истинного значения параметра θ в интервале

$$I_\gamma = [\Theta^* - \varepsilon,\ \Theta^* + \varepsilon] \qquad (5.11)$$

(рис. 5.8).

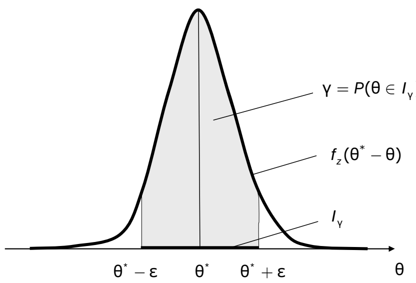


Рис. 5.8. Доверительный интервал

Этот интервал называется *доверительным интервалом* (*интервальной оценкой*) оцениваемого параметра θ.

Длина доверительного интервала — 2ε. Его средняя точка на оси θ — случайная оценка Θ^*. Поэтому доверительный интервал — *случайный интервал*[10].

Границы доверительного интервала называют *доверительными границами* (*нижней и верхней доверительными границами*).

Вероятность γ трактуют как вероятность того, что интервал I_γ накроет точку θ: $\gamma = P(\theta \in I_\gamma)$.

Очевидно, что описанный подход применим и в случае, когда оценка — *смещенная* на величину ε_0. Тогда доверительный интервал описывается выражением

$$I_\gamma(p) = [\Theta_N^* - \varepsilon_0 - \varepsilon, \Theta_N^* - \varepsilon_0 + \varepsilon],$$

[10] Случайной величиной может быть не только местонахождение доверительного интервала на оси параметра θ, но также его *длина*, т. е. величина 2ε.

а доверительная вероятность

$$\gamma = P(\left|\Theta_N^* - \varepsilon_0 - \theta\right| \le \varepsilon).$$

Заметим, что иногда погрешность измерения характеризуют интервалом $[-\varepsilon, \varepsilon]$ *без указания доверительной вероятности*. Трактовка такого варианта описания может быть разной.

Первый вариант предполагает, что погрешность имеет определенный, отражающий существо задачи, закон распределения и соответствующая этому интервалу доверительная вероятность близка к единице (без конкретизации точного значения).

Второй вариант предполагает, что закон распределения погрешности равномерный на интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и соответствующая доверительная вероятность равна единице.

Третий вариант (обычно не обсуждаемый в литературе) может предполагать, что интервал $[-\varepsilon, \varepsilon]$ представляет множество возможных значений изменяемой части погрешности без указания плотности распределения. Это означает, что погрешность носит интервальный характер и потому может трактоваться как случайная лишь в переносном смысле.

Четвертый вариант, описанный в п. 5.2.2, учитывает связь (через коэффициент доверия k (см. выражение (5.2))) величины погрешности с доверительной вероятностью. Следует иметь в виду, что доверительная вероятность γ зависит не только от величины коэффициента k, но и от закона распределения. Соотношение между параметрами γ и k для гауссовского закона распределения приведено в табл. 5.2.

Таблица 5.2

γ	0,80	0,87	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,9973
k	1,282	1,513	1,880	1,960	2,053	2,169	2,325	2,576	3,000

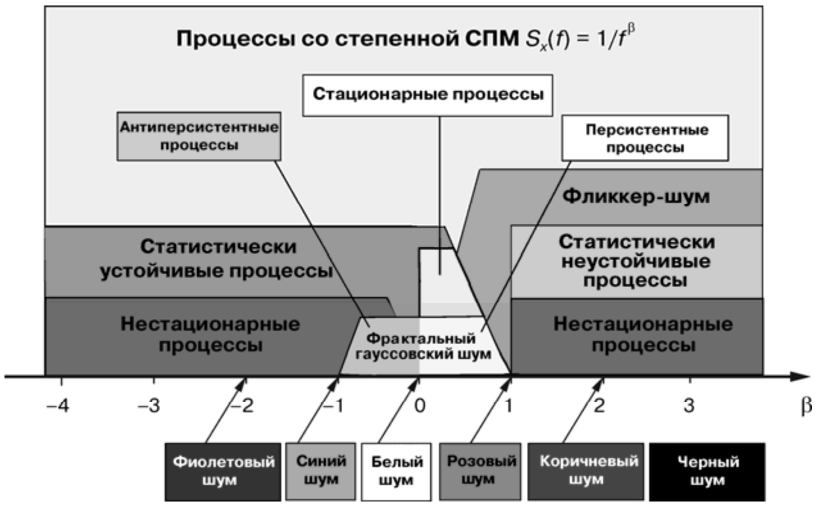
* * *

При изложении основ теории вероятностей и, в особенности, при описании основополагающих принципов математической статистики теории вероятностей неоднократно акцентировалось внимание на том, что некоторые результаты теории вероятностей *не согласуются с результатами экспериментальных исследований реальных* *физических величин и процессов*. Причина тому кроется в *неидеальном характере физического феномена статистической устойчивости и отсутствии тенденции к сходимости реальных статистик*.

В следующей главе представлены результаты экспериментальных исследований нарушений статистической устойчивости, послужившие основой для формирования физико-математической теории гиперслучайных явлений, ориентированной на формирование статистически устойчивых статистик.

ЧАСТЬ III

СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ



Процессы со степенной спектральной плотностью мощности

Академик АН УССР А.В. Скороход:

— Наиболее полно разработано понятие неопределенности, использующее вероятностную случайность... Замечу, что предположение, что некоторая последовательность, скажем чисел, получена независимыми наблюдениями некоторой случайной величины (неважно, известно или нет ее распределение), накладывает на эту последовательность весьма жесткие ограничения, которые вряд ли выполняются во многих реальных явлениях (Иваненко, Лабковский 1990).

Лауреат Нобелевской премии И.Р. Пригожин:

— Открытие неравновесных структур, как известно, сопровождалось революцией в изучении траекторий. Оказалось, что траектории многих систем нестабильны, а это значит, что мы можем делать достоверные предсказания лишь на коротких временных интервалах. Краткость же этих интервалов (называемых также темпоральным горизонтом или экспонентой Ляпунова) означает, что по прошествии определенного периода времени траектория неизбежно ускользает от нас, т. е. мы лишаемся информации о ней. Это, кстати, служит еще одним напоминанием, что наше знание — всего лишь небольшое оконце в универсум и что из-за нестабильности мира нам следует отказаться даже от мечты об исчерпывающем знании. Заглядывая в оконце, мы можем, конечно, экстраполировать имеющиеся знания за границы нашего видения и строить догадки по поводу того, каким мог бы быть механизм, управляющий динамикой универсума. Однако нам не следует забывать, что, хотя мы в принципе и можем знать начальные условия в бесконечном числе точек, будущее, тем не менее, остается принципиально непредсказуемым (Пригожин 1991).

Глава 6 Методика и результаты исследования статистической устойчивости процессов

Формализовано понятие статистической устойчивости. Рассмотрены параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению. Введены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Формализовано понятие интервала статистической устойчивости. Установлена зависимость статистической устойчивости процесса от его спектрально-корреляционных характеристик. Приведены результаты теоретических и модельных исследований зависимости статистической устойчивости процесса, описываемого степенной спектральной плотностью мощности, от параметра формы его спектра. Представлены результаты модельных исследований нарушений статистической устойчивости узкополосных процессов. Рассмотрены статистически неустойчивые стационарные процессы. Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости реальных процессов разной физической природы.

6.1 Формализация понятия статистической устойчивости

Как ни странно, до недавнего времени понятие статистической устойчивости не было формализовано. Остановимся на определении этого понятия.

6.1.1 Случайные последовательности и процессы, статистически неустойчивые по отношению к среднему и СКО

Прежде всего, обратим внимание, что процесс, статистически устойчивый по отношению к одной статистике, может быть статистически неустойчивым по отношению к другой статистике (см. п. 1.3). Это означает, что статистическая устойчивость является атрибутом не только процесса, но и рассматриваемой статистики.

Поэтому *понятие статистической устойчивости касается комплекса процесс—статистика.*

Формализовать понятие статистической устойчивости можно на базе *анализа динамики изменения выборочных дисперсий различных статистик.*

Определяя, к примеру, понятие *статистической устойчивости процесса по отношению к среднему*, в основу можно положить анализ *динамики изменения выборочной дисперсии*

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2 \qquad (6.1)$$

флуктуации выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = \overline{1, N}) \qquad (6.2)$$

(где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ — выборочное среднее флуктуации среднего), а определяя понятие *статистической устойчивости процесса по отношению к СКО* — анализ *динамики изменения выборочной дисперсии*

$$\bar{D}_{Z_N} = \frac{1}{N-2}\sum_{n=2}^{N}(Z_n - \bar{m}_{Z_N})^2 \qquad (6.3)$$

флуктуации выборочного СКО

$$Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}) \qquad (6.4)$$

(где $\bar{m}_{Z_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} Z_n$ — среднее флуктуации выборочного СКО).

Применительно к *случайной выборке* простейшие варианты формализации этих понятий следующие.

Случайная выборка (*последовательность случайных величин*) $X_1, X_2, ..., X_N$ считается *статистически устойчивой* (*стабильной*) *по отношению к среднему*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии (6.1) стремится к нулю.

Случайная выборка (*последовательность случайных величин*) $X_1, X_2, ..., X_N$ считается *статистически устойчивой* (*статистически стабильной*) *по отношению к СКО*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии (6.3) стремится к нулю.

Случайные выборки (*последовательности случайных величин*), не удовлетворяющие этим определениям, — *статистически неустойчивые по отношению соответственно к среднему и СКО.*

Тип сходимости в данном случае не играет существенной роли. Однако для придания определениям необходимой математической строгости будем подразумевать сходимость по вероятности.

Уменьшение дисперсии того или иного выборочного среднего при увеличении объема данных может происходить не только в результате стабилизации средней величины, но также из-за *уменьшения дисперсии элементов последовательности.* Для нивелирования этого эффекта имеет смысл понятие статистической устойчивости переопределить следующим образом.

Случайная выборка (*последовательность случайных величин*) $X_1, X_2, ..., X_N$ считается *статистически устойчивой по отношению к среднему*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности *параметр статистической неустойчивости*

$$\gamma_N == \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]}{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{X_N}\right]} \tag{6.5}$$

стремится к нулю.

Случайная выборка (*последовательность случайных величин*) $X_1, X_2, ..., X_N$ считается *статистически устойчивой по отношению к СКО*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности *параметр статистической неустойчивости*

$$\Gamma_N = \frac{\mathrm{M}[\bar{D}_{Z_N}]}{\mathrm{M}[\bar{D}_{X_N}]}. \tag{6.6}$$

стремится к нулю.

В выражениях (6.5) и (6.6)

$$\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_i - Y_N)^2 \tag{6.7}$$

— выборочная дисперсия процесса.

Случайные выборки (*последовательности случайных величин*), у которых параметры статистической неустойчивости γ_N и Γ_N не стремятся к нулю, считаются *статистически неустойчивыми соответственно по отношению к среднему и СКО.*

Сказанное относительно статистической устойчивости последовательности случайных величин распространяется на *случайные процессы.* Параметры статистической неустойчивости случайного процесса $X(t)$ описываются теми же формулами (6.1)—(6.7). При этом под последовательностью $X_1, X_2, ..., X_N$ понимается последовательность значений процесса $X(t)$ в последовательные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Приближенно детерминированную величину x_0 можно трактовать как вырожденную случайную величину, у которой функция распределения имеет вид функции единичного скачка в точке x_0: $F(x) = \mathrm{sign}[x - x_0]$. Поэтому приведенные определения распространяются и на *последовательности детерминированных величин, и на детерминированные процессы.*

Последовательности и процессы, у которых оба параметра статистической неустойчивости γ_N и Γ_N стремятся к нулю, называются *статистически устойчивыми в широком смысле*, а у которых хотя бы один из этих параметров не стремится к нулю, — *статистически неустойчивыми в широком смысле*[1].

Вместо параметров γ_N , Γ_N иногда удобнее использовать *параметры статистической неустойчивости* μ_N , M_N , определяемые следующим образом:

$$\mu_N = \sqrt{\gamma_N \,/\, (1 + \gamma_N)} \,, \tag{6.8}$$

$$\mathrm{M}_N = \sqrt{\Gamma_N / (1 + \Gamma_N)} \,. \tag{6.9}$$

[1] Наряду с понятием статистической устойчивости в широком смысле существует понятие *статистической устойчивости в узком смысле* [Горбань 2014 (1)]. Поскольку в дальнейшем оно не используется, останавливаться на нем не будем.

В отличие от параметров γ_N, Γ_N, ограниченных лишь снизу нулевым значением, параметры μ_N, M_N ограничены как снизу, так и сверху: минимально возможное их значение равно нулю, а максимально возможное — единице.

Чем меньше значения параметров γ_N, μ_N, Γ_N, M_N тем более устойчива последовательность (или процесс). Значения этих параметров, близкие к нулю при больших объемах выборки N, свидетельствует о высокой статистической устойчивости последовательности, большие же значения — о ее статистической неустойчивости.

Для количественной характеристики степени неустойчивости необходимо ввести эталонные единицы измерения, сравнение с которыми позволяло бы судить о степени неустойчивости, как по отношению к среднему, так и по отношению к СКО.

6.1.2 Единицы измерения параметров статистической неустойчивости

Для параметров статистической неустойчивости γ_N и Γ_N в качестве *единицы измерения* удобно использовать *величину* γ_{0N}, представляющую собой параметр γ_N, рассчитанный для эталонной статистически устойчивой последовательности некоррелированных отсчетов *белого гауссовского шума*, а для *параметров* μ_N и M_N — связанную с величиной γ_{0N} величину $\mu_{0N} = \sqrt{\gamma_{0N} / (1+\gamma_{0N})}$.

Особенностью величин γ_{0N} и μ_{0N} является их *зависимость от объема выборки* N.

Абсолютный уровень статистической неустойчивости по отношению к среднему и СКО в единицах измерения γ_{0N} характеризуют соответственно *параметры статистической неустойчивости*:

$$h_N = \gamma_N / \gamma_{0N} , \tag{6.10}$$

$$H_N = \Gamma_N / \gamma_{0N} . \tag{6.11}$$

Диапазон изменения этих параметров — $[0,\infty)$.

Единицей измерения параметров h_N *и* H_N *служит число* $h_{0N} = 1$, не зависящее от объема выборки.

Значения параметров h_N и H_N, меньшие или близкие к единице при больших объемах выборки N, свидетельствуют о высокой статистической устойчивости процесса, большие же значения этих параметров — о его статистической неустойчивости.

6.1.3 Интервалы статистической устойчивости

При решении практических задач обычно не важна специфика поведения статистик на бесконечно большом интервале наблюдения, хотя именно она заложена в основу формального определения статистической устойчивости. Более существенны особенности поведения статистик *на рассматриваемых интервалах наблюдения*: наличие или отсутствие *тенденций*, указывающих на нарушение статистической устойчивости.

Если на интервале наблюдения эти тенденции не прослеживаются, процесс можно считать статистически устойчивым, в противном же случае — статистически неустойчивым.

Разные статистики и разные процессы, как правило, имеют разные *интервалы статистической устойчивости*.

Формализовать понятие интервалов статистической устойчивости среднего τ_{sm} и СКО τ_{sd} позволяют *границы коридора статистической устойчивости*.

Для параметров статистической неустойчивости γ_N *и* Γ_N *верхняя граница* γ_{0N}^{+} *коридора статистической устойчивости* определяется выражением

$$\gamma_{0N}^{+} = \gamma_{0N} + \varepsilon\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}, \tag{6.12}$$

где ε — параметр, определяющий ширину коридора, $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ — СКО величины $\tilde{\gamma}_{0N} = \bar{D}_{Y_N} / \mathrm{M}[\bar{D}_{X_N}]$.

Для параметров статистической неустойчивости μ_N *и* M_N *верхняя граница коридора статистической устойчивости* описывается выражением $\mu_{0N}^{+} = \sqrt{\gamma_{0N}^{+}/(1+\gamma_{0N}^{+})}$, а *для параметров* h_N *и* H_N — выражением $h_{0N}^{+} = \gamma_{0N}^{+}/\gamma_{0N}$.

Критерием нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО, определяющим величины *интервалов статистической устойчивости* τ_{sm} и τ_{sd}, может служить выход соответственно параметров статистической неустойчивости γ_N и Γ_N за границу γ_{0N}^{+}, параметров статистической неустойчивости μ_N и M_N за границу μ_{0N}^{+} или параметров статистической неустойчивости h_N и H_N за границу h_{0N}^{+}.

Обратим внимание, что величина интервалов статистической устойчивости в общем случае зависит от порядка взятия отсчетов.

Поэтому при расчетах *нарушать естественный порядок следования отсчетов последовательности или процесса нельзя*.

6.1.4 Оценки параметров статистической неустойчивости

При практических расчетах ввиду ограниченного объема данных вместо параметров γ_N, μ_N, h_N и Γ_N, M_N, H_N приходится использовать соответствующие *оценки* γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и Γ_N^*, M_N^*, H_N^*.

Оценки γ_N^*, Γ_N^* могут вычисляться или путем усреднения данных по множеству имеющихся реализаций или, если реализация одна, — по формулам

$$\gamma_N^* = \bar{D}_{Y_N} \,/\, \bar{D}_{X_N}, \quad \Gamma_N^* = \bar{D}_{Z_N} \,/\, \bar{D}_{X_N}.$$

Оценки μ_N^*, M_N^* и h_N^*, H_N^* рассчитываются следующим образом:

$$\mu_N^* = \sqrt{\gamma_N^* / (1 + \gamma_N^*)}, \quad \mathrm{M}_N^* = \sqrt{\Gamma_N^* / (1 + \Gamma_N^*)},$$

$$h_N^* = \gamma_N^* / \gamma_{0N}, \quad H_N^* = \Gamma_N^* / \gamma_{0N}.$$

Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и Γ_N^*, M_N^*, H_N^* — *физические величины*, характеризующие процесс. Обычно для измерения физических величин требуются *физические эталоны единиц измерения*.

Обратим внимание, что в данном случае единицы измерения γ_{0N}, μ_{0N}, h_{0N} *не требуют физических эталонов*, поскольку являются математическими функциями, определяемыми лишь объемом выборки N. При фиксированном значении N они могут быть рассчитаны абсолютно точно.

В физике небольшое число физических констант типа скорости света, гравитационной постоянной и др. задаются *по определению* с нулевой погрешностью [Фундаментальные физические константы 2014]. Величины γ_{0N}, μ_{0N}, h_{0N} также имеют нулевую погрешность, однако связано это не с тем, что они полагаются таковыми по определению, а поскольку при фиксированной величине N являются математическими константами.

6.2 Статистическая устойчивость случайных процессов

6.2.1 Зависимость статистической устойчивости случайного процесса от его спектрально-корреляционных характеристик

Исследования показывают, что статистическая устойчивость случайного процесса по отношению к среднему и СКО определяется его спектрально-корреляционными характеристиками.

В частности для дискретного случайного процесса $X_1, X_2, \ldots, X_N$ с нулевым математическим ожиданием и СПМ $S_{x_N}(k)$ *параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему* γ_N при $N \to \infty$ описывается следующей асимптотической формулой [Горбань 2014 (1)]:

$$\gamma_N = \frac{\sum_{k=2}^{N/2} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\frac{\pi^2}{4} + \left(C + \ln(2\pi(k-1)) \right)^2 \right] S_{x_N}(k)}{4\pi^2 \sum_{k=2}^{N/2} S_{x_N}(k)}, \qquad (6.13)$$

где k — номер спектрального отчета $k = \overline{1, N}$, C — *постоянная Эйлера—Маскерони* ($C \approx 0,577216$).

Если математическое ожидание процесса равно нулю, а моменты второго порядка конечны, то [Горбань 2015 (2)] при $N \to \infty$ параметр γ_N описывается выражением

$$\gamma_N = \frac{1}{N(q_N - Q_N)} \sum_{n=1}^{N} Q_n ,$$

а *нижняя граница параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО* Γ_N — неравенством

$$\Gamma_N \geq \frac{1}{N(N-2)(q_N - Q_N)} \times \left[(N-1) \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{n-1} (q_n - Q_n) - \left(\sum_{k=2}^{N} \sqrt{\frac{k}{k-1} (q_k - Q_k)} \right)^2 \right], \qquad (6.14)$$

где

$$q_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}[X_i^2] \qquad (6.15)$$

— средняя дисперсия отсчетов, а

$$Q_n = \mathrm{M}[Y_n^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}[X_i X_j] \qquad (6.16)$$

— среднее корреляционных моментов $K_{x_i x_j} = \mathrm{M}[X_i X_j]$ начального фрагмента выборки объемом n.

6.2.2 *Физические процессы со степенной СПМ*

Многие реальные шумы хорошо аппроксимируются случайными процессами, СПМ которых описывается *степенным законом* $1/f^{\beta}$ с различным *показателем формы спектра* β.

Цветные шумы. В зависимости от величины параметра β различают *фиолетовый, синий* (*голубой*), *белый, розовый, коричневый* (*красный*) *и черный шумы* (табл. 6.1).

Таблица 6.1

№ п/п	Цвет шума	Показатель формы спектра β
1	фиолетовый	— 2
2	синий (голубой)	— 1
3	белый	0
4	розовый	1
5	коричневый (красный)	2
6	черный	> 2

СПМ некоторых из этих шумов спадает с увеличением частоты (когда $\beta > 0$), а некоторых — возрастает (когда $\beta < 0$).

Степенной зависимостью описываются также *фликкер-шумы и фрактальные* (*самоподобные*) *процессы.*

Фликкер-шум. *Фликкер-шум* присутствует повсеместно: в металлах, полуметаллах, полупроводниках, газах, жидкостях, электролитах, радиоэлектронных устройствах, однородных и неоднородных проводниках при высокой и низкой температуре, пленках и контактах, живых и неживых объектах. Исследования показывают, что фликкер-шум — чрезвычайно распространенное явление, характерное для многих электрических, магнитных, электромагнитных, акустических, гидроакустических, гидрофизических, астрофизических и др. процессов [Жигальский 2003, Коган 1985].

Различают *равновесные* и *неравновесные фликкер-шумы.* СПМ первых описывается законом, близким к $1/f$, а вторых — к $1/f^{\beta}$, где показатель формы спектра $\beta \geq 2$ [Жигальский 2003].

Фрактальные (самоподобные) процессы. Под *фрактальным в широком смысле случайным процессом* $X(t)$ подразумевается процесс, корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$ которого равна с точностью до множителя a^r корреляционной функции процесса, сжатого в a раз:

$$K_x(t_1,t_2) = \mathrm{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = a^r \mathrm{M}\left[X(at_1)X(at_2)\right] = a^r K_x(at_1,at_2),$$

где r — *параметр самоподобия.*

Фрактальные процессы разделяют на *персистентные процессы* с положительной корреляцией между отсчетами и *антиперсистентные* с отрицательной корреляцией между отсчетами.

Отрицательная корреляция наблюдается при $\beta \in (-1,0)$, а положительная корреляция — при $\beta \in (0,1)$.

6.2.3 Статистическая устойчивость процессов, описываемых степенной СПМ

Учитывая распространенность процессов, описываемых СПМ со степенной функцией, были проведены их исследования на предмет статистической устойчивости.

Исследования с использованием формул (6.13) и (6.14) показали, что при $\beta < 1$ параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N и по отношению к СКО Γ_N стремятся к нулю лишь тогда, когда показатель формы спектра $\beta < 1$.

Это означает, что *процесс со степенной СПМ статистически устойчив по отношению к среднему и по отношению к СКО, если* $\beta < 1$*, и статистически неустойчивый, если* $\beta \geq 1$.

В подтверждении корректности такого вывода на рис. 6.1 **а** и 6.1 **б** (сплошные линии) приведены результаты расчетов параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N и μ_N. Для сравнения пунктирными линиями изображены аналогичные кривые для эталонного белого шума.

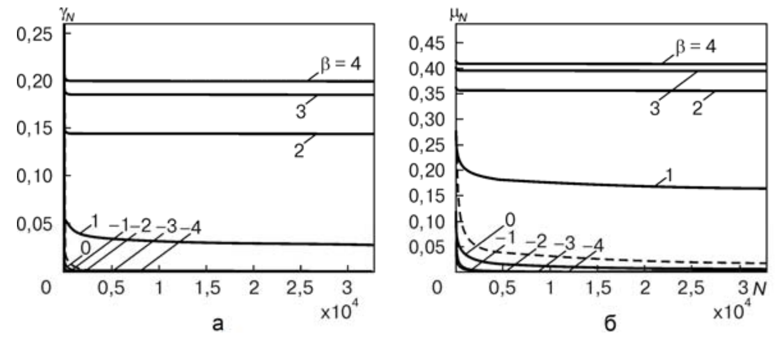


Рис. 6.1. Зависимость параметров γ_N и μ_N от объема выборки N

Поскольку при единичном значении параметра β происходит смена устойчивого состояния на неустойчивое, процесс с параметром $\beta = 1$ можно рассматривать как *предельный устойчивый процесс по отношению к среднему и СКО* (*устойчивый в широком смысле*).

Параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему, соответствующие предельно устойчивому процессу, при $N = 1024$ принимают следующие значения: $\gamma_N = 0,054$, $\mu_N = 0,23$, $h_N = 1,3$. При дальнейшем увеличении объема выборки они остаются примерно на том же уровне. Поэтому для объемов выборки $N > 1024$ указанные значения параметров можно использовать вместо рассчитываемых с использованием формулы (6.12) в качестве границ коридора статистической устойчивости γ_{0N}^+, μ_{0N}^+ и h_{0N}^+.

Исследования показывают, что *при* $\beta \leq 0$ процесс *более устойчив по отношению к среднему, чем по отношению к СКО* ($\gamma_N < \Gamma_N$), *а при* $\beta > 0$ — *наоборот* ($\gamma_N > \Gamma_N$).

Обобщая результаты п.п. 6.2.2—6.2.3, следует отметить (рис. 6.2), что

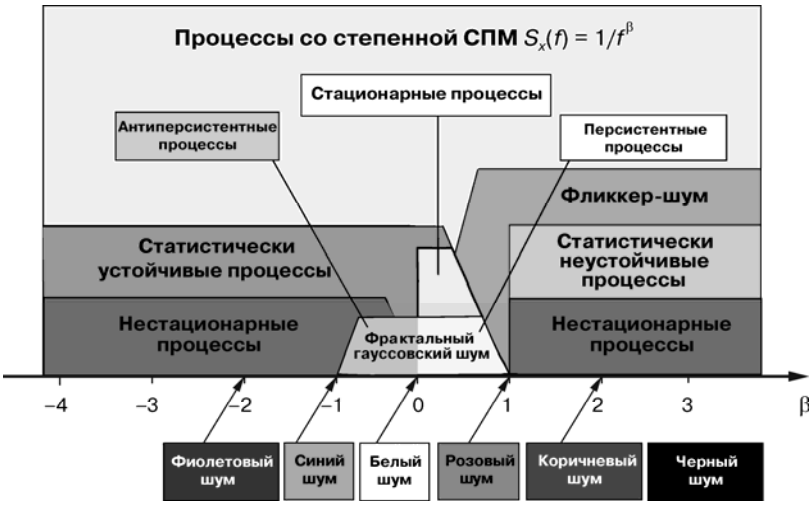


Рис. 6.2. Процессы со степенной СПМ

— *статистически устойчивыми по отношению к среднему и СКО* (*устойчивыми в широком смысле*) являются стационарные процессы, часть нестационарных процессов, фрактальный гауссовский шум, часть фликкер-шумов, а также фиолетовый, синий и белый шумы;

— *статистически неустойчивыми процессами по отношению к среднему и СКО* (*неустойчивыми в широком смысле*) являются часть нестационарных процессов, часть фликкер-шумов, а также розовый, коричневый и черный шумы.

6.2.4 Зависимость статистической устойчивости процесса по отношению к среднему от его корреляционных характеристик

В результате исследования зависимости статистической устойчивости от корреляции отсчетов выяснено, что

наличие положительной корреляции ведет к уменьшению устойчивости, а наличие отрицательной корреляции — к ее увеличению.

На рис. 6.3 приведены результаты моделирования, подтверждающие этот результат.

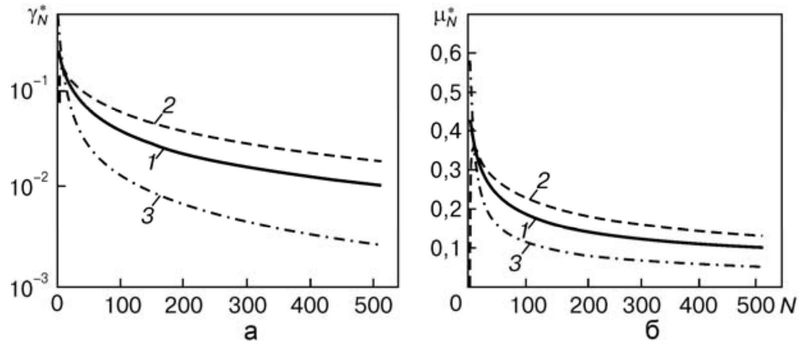


Рис. 6.3. Зависимость параметров γ_N (**а**) и μ_N (**б**) от объема выборки N при различных типах корреляции между ее элементами

На рисунке кривые *1* получены для эталонного белого гауссовского шума, кривые *2* — для положительно коррелированного шума, четные отсчеты которого повторяют отсчеты с предыдущими нечетными номерами, а кривые *3* — для отрицательно коррелированного шума, четные отсчеты которого повторяют отсчеты с предыдущими нечетными номерами, но с противоположным знаком.

6.2.5 Статистическая устойчивость полосовых случайных процессов

Статистически неустойчивые случайные процессы, описываемые степенной СПМ с параметром формы спектра $\beta \geq 1$, относятся к классу *низкочастотных процессов*. Исследования показывают, что нарушения статистической устойчивости наблюдаются не только в случае низкочастотных, но и в случае *полосовых процессов*.

Подтверждением тому служат приведенные на рис. 6.4 оценки, полученные на основе моделирования шумов, сформированных в результате прохождения белого гауссовского шума через *интегрирующую RC-цепь* (рис. 6.4 **а**, **в**) и *одиночный резонансный контур* (*ОРК*) (рис. 6.4 **б**, **г**).

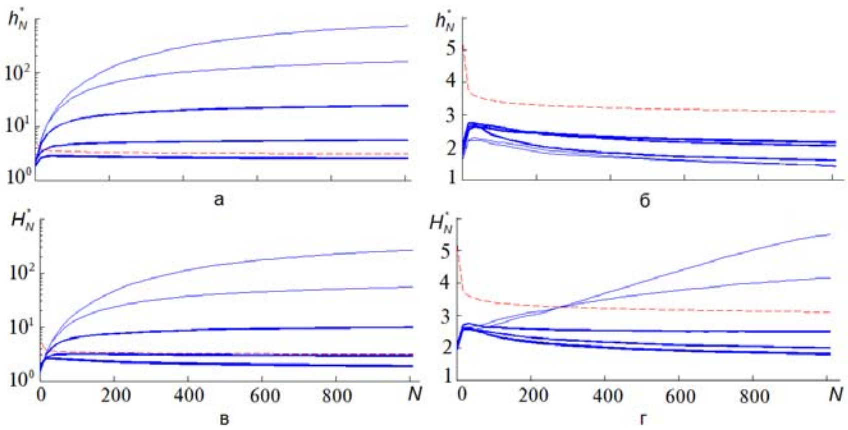


Рис. 6.4. Зависимость оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему h_N^* (**а**, **б**) и по отношению к СКО H_N^* (**в**, **г**) от количества отсчетов N для низкочастотных (**а**, **в**) и полосовых (**б**, **г**) шумов

ОРК имел среднюю частоту пропускания $f_0 = k_0 / T$, характеризуемую дискретным спектральным отсчетом с номером $k_0 = 128$.

На рисунке разным сплошным линиям соответствуют результаты, полученные для разной ширины полосы пропускания фильтров $\Delta f = f_2 - f_1 = \Delta k / T$. В случае RC-цепи величина $\Delta k = 1, 4, 16, 64, 256$, а в случае ОРК величина $\Delta k = 2, 8, 32, 128, 512$ (в обоих случаях большей величине Δk соответствует линия большей толщины).

Пунктирными линиями изображена верхняя граница h_{0N}^+ коридора устойчивости параметра h_N, соответствующая параметру $\varepsilon = 3$.

Количество используемых при усреднении реализаций равнялось 512.

Анализ приведенных кривых и множества подобных показывает:

- нарушение статистической устойчивости *по отношению к среднему* наблюдается лишь, когда шум низкочастотный и его спектр сосредоточен в узкой полосе. Нарушение же статистической устойчивости *по отношению к СКО* фиксируется как в случае низкочастотного шума, так и полосового. При этом нарушение устойчивости низкочастотного шума проявляется значительно сильнее, чем полосового;

- при наличии нарушений статистической устойчивости *увеличение объема выборки* приводит *к понижению устойчивости*, как по отношению к среднему, так и СКО, а *расширение ширины полосы частот* — к *повышению устойчивости*;
- *увеличение интервала корреляции* низкочастотного шума ведет *к понижению* его *статистической устойчивости по отношению к среднему*. Увеличение *интервала корреляции шума*, как низкочастотного, так и полосового, ведет *к снижению его статистической устойчивости по отношению к СКО*;
- в случае *низкочастотного узкополосного шума* нарушение статистической устойчивости *по отношению к СКО* проявляется *при меньшем объеме выборки*, чем в случае *полосового шума* с той же величиной рабочей полосы частот;
- местоположение рабочей полосы *полосового шума не* сильно влияет на степень нарушения устойчивости *по отношению к СКО.*

6.2.6 Статистически неустойчивые стационарные случайные процессы

Не только нестационарные, но и *стационарные в узком смысле* случайные процессы могут быть статистически неустойчивыми в широком смысле. Таковыми, например, являются стационарные случайные процессы, сечения которых описываются распределениями, которые не имеют вообще моментов или не имеют моментов выше первого.

К ним относятся *распределение Коши* (рис. 2.5 **б**), а также при определенном соотношении параметров *распределения Парето, Фишера—Снедекора* (*F распределение*), *Фреше* и др.

При отсутствии *математического ожидания* или *дисперсии*, как правило, плотность распределения и функция распределения имеют *«тяжелые хвосты»* (*heavy (fat) tails*). Такие распределения описывают реальные физические явления, в которых *наблюдаются редкие, но существенно влияющие на статистику, события.*

Функция распределение Коши описывается выражением (2.9), а плотность распределения — выражением (2.10). Плотность *распределения Парето* описывается выражением

$$f(x) = \frac{\alpha}{(x - x_0)^{\alpha+1}},$$

где параметр $\alpha > 0$.

В распределении Коши моменты всех порядков отсутствуют (хотя существует интеграл в смысле главного значения, описывающий первый момент). В распределении Парето при $\alpha \le 1$ отсутствуют моменты всех порядков, а при $\alpha \le 2$ — отсутствуют моменты, начиная со второго порядка.

Если сечение X случайного процесса не имеет момента m_ν порядка ν, то его оценка m_ν^* не имеет предела (расходится), т.е. *статистически неустойчива* (*несостоятельна*) и, поэтому *случайную величину* X*, ее распределение и соответствующую ей выборку* $X_1,\ldots,X_N$ *можно считать статистически неустойчивыми по отношению к рассматриваемой оценке* m_ν^*.

Поэтому распределения, не имеющие моментов, статистически неустойчивы по отношению к оценкам всех моментов.

Если случайная величина X или случайный процесс $X(t)$ не имеет дисперсии, то использовать оценки, описываемые выражениями

$$\gamma_N^* = \mathrm{M}^*[\bar{D}_{Y_N}]\big/\mathrm{M}^*[\bar{D}_{X_N}],\ \Gamma_N^* = \mathrm{M}^*[\bar{D}_{Z_N}]\big/\mathrm{M}^*[\bar{D}_{X_N}], \qquad (6.17)$$

нельзя (где $\mathrm{M}^*[\cdot]$ — оператор усреднения по ансамблю). Нельзя использовать и рассчитываемые на их основе оценки μ_N^*, h_N^* и M_N^*, H_N^*.

Указанную трудность можно обойти, заменив в выражении (6.17) выборочную дисперсию $\bar{D}_{X_N}$ на специально подобранную *робастную статистику*.

Для распределений Коши и Парето хороший результат дает величина $Ns_{x_N}^{*2}$, где $s_{x_N}^* = \mathrm{med}\left(\left|x_n - m_{x_N}^*\right|, n = \overline{1,N}\right)$ — абсолютное медианное отклонение, $m_{x_N}^* = \mathrm{med}\left(x_n, n = \overline{1,N}\right)$ — медианное смещение.

Результаты расчетов оценок h_N^*, H_N^* на основе моделирования с использованием такой статистики представлены на рис. 6.5. Пунктирными линиями на рисунке изображены верхние границы коридора устойчивости, соответствующие $\varepsilon = 3$. При моделировании использовалось 100 реализаций.

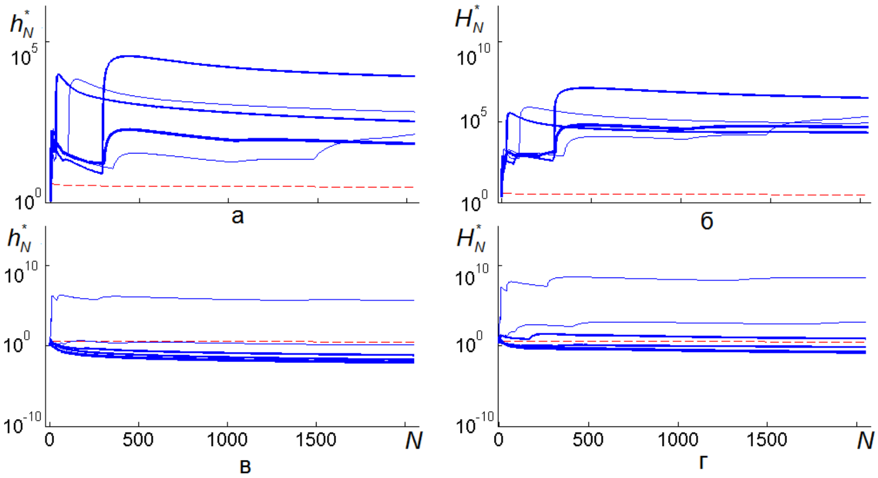


Рис. 6.5. Параметры статистической неустойчивости h_N^*, H_N^* для соответственно распределения Коши (**а**, **б**) и Парето (**в**, **г**). Параметр Коши γ принимал значения $1; 2; 3; 4; 5$, а параметр Парето α — $0{,}75; 1{,}25; 1{,}75; 2{,}25; 2{,}75$ (толщина линий на рисунках возрастает по мере увеличения значения параметра)

Согласно приведенным результатам процесс, описываемый распределением Коши, статистически неустойчивый по отношению к среднему и СКО при любых соотношениях параметров. Процесс же, описываемый распределением Парето, статистически неустойчивый по отношению к среднему при $\alpha = 0{,}75$ и устойчив при $\alpha > 1$. По отношению к СКО он статистически неустойчивый при $\alpha = 0{,}75; 1{,}25; 1{,}75$ и статистически устойчивый при $\alpha > 2$. Эти результаты полностью согласуются с теорией.

Обратим внимание, что описанная модификация расчета параметров статистической неустойчивости *ориентирована на процессы, не имеющие дисперсии.*

Применение этой модификации в тех случаях, когда дисперсия существует, *не всегда может быть оправданным.* Моделирование показывает, что хотя, например, в частном случае гауссовского шума при использовании рассматриваемой модификации получаемые оценки h_N^*, H_N^* не выходят за верхнюю границу коридора устойчивости (т. е. верно фиксируют наличие статистической устойчивости), однако они оказываются сильно заниженными по сравнению с теоретически расчетными. В результате при небольших нарушениях статистической устойчивости зафиксировать нарушения не представляется возможным.

Указанное обстоятельство, по-видимому, ограничивает *область практического применения робастных статистик процессами с редкими, но существенно влияющими на статистику, отсчетами.*

Перейдем к рассмотрению реальных физических процессов.

6.3 Результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости процессов разной физической природы

Для выяснения того, являются ли реальные процессы статистически устойчивыми или нет и, если в целом они неустойчивы, то на каком интервале наблюдения их можно считать устойчивыми, исследовались разнообразные физические процессы.

Изучались изменения напряжения в городской электросети, высоты и периода следования поверхностных волн, магнитного поля Земли, температуры воды в океане, температуры воздуха и количества осадков в разных городах, интенсивности рентгеновского излучения астрофизических объектов и др. Результаты некоторых из этих исследований приведены ниже.

6.3.1 Напряжение электросети

Параметры электросети, в том числе и напряжение, изменяются. Существует стандарт [ГОСТ Р 51317.3.3-99 1999], определяющий допустимые отклонения напряжения от номинального значения, вызываемые техническими средствами. Согласно этому стандарту максимальное относительное изменение напряжения не должно превышать 5,32%, если эти изменения «вызваны ручными переключениями или частота их повторения меньше 1/ч».

Для изучения статистической устойчивости медленных колебаний напряжения электросети был изготовлен макет, включающий понижающий трансформатор, согласующее устройство (делитель напряжения) и компьютер с 16-разрядной звуковой картой.

Ввод сигнала в компьютер осуществлялся с частотой дискретизации 5 кГц. По каждым 1024 отсчетам рассчитывалось *действующее* (*эффективное*) *значение* напряжения, записываемое в память компьютера. Запись велась сеансами на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней.

Продолжительность каждого сеанса составляла около 60 часов. За время сеанса регистрировалось $N = 2^{20} \approx 1$ млн значений напряжения.

Предварительный анализ полученных записей показал [Горбань 2011 (1)], что напряжение сети постоянно изменялось. В разных сеансах изменения носили разный характер. На рис. 1.8 в качестве примера приведена типичная зависимость напряжения сети от времени (в часах), полученная на протяжении одного из сеансов, и соответствующая зависимость от времени выборочного среднего.

Более детальный анализ полученного экспериментального материала выявил характерную особенность, присущую всем сделанным записям: *выборочные средние не проявляют тенденции к затуханию.*

Результаты расчетов параметров статистической неустойчивости выборочного среднего γ_N^* и μ_N^* для четырех сеансов приведены на рис. 6.6.

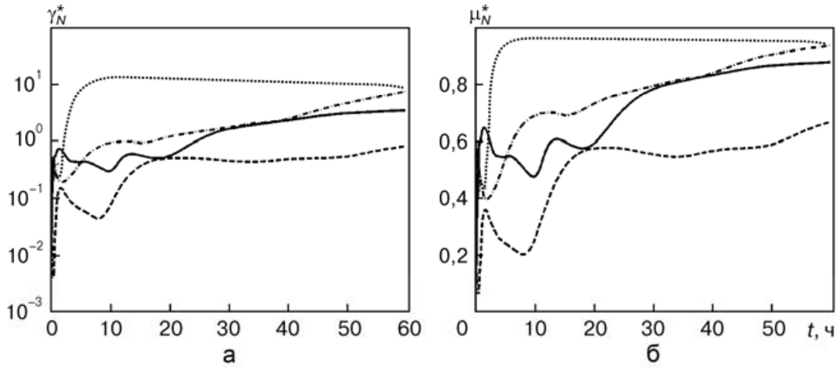


Рис. 6.6. Изменения во времени параметров статистической неустойчивости γ_N^* (**а**) и μ_N^* (**б**) для четырех 60-часовых записей колебаний напряжения электросети

Как видно, в области больших времен наблюдения значения этих параметров либо проявляют тенденцию к возрастанию, либо, достигнув максимума, остаются примерно на одном и том же уровне.

Для всех полученных записей (не только соответствующих приведенным на рис. 6.6) значения параметров статистической неустойчивости γ_N^* и μ_N^* в конце 60-часового наблюдения оказались большими. Это обстоятельство позволило сделать вывод, что *колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер.*

Интервал, на котором параметры статистической неустойчивости принимают большие значения, начинается от нескольких часов и доходит до конца записей. Таким образом, *интервал статисти-*

ческой устойчивости τ_{sm} колебаний напряжения городской электросети равен примерно часу.

6.3.2 Магнитное поле Земли

Зависимость от времени параметра статистической неустойчивости μ_N^* для магнитного поля Земли [Горбань 2011 (1)] приведена на рис. 6.7. Исходные данные, по которым проводились расчеты, получены в Институте земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.

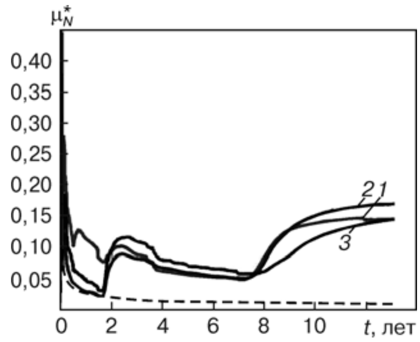


Рис. 6.7. Изменения за 13 лет наблюдения значений параметра μ_N^* для x, y и z составляющих индукции магнитного поля в районе Москвы (сплошные кривые *1*, *2* и *3*). Для сравнения приведены результаты расчета параметра μ_N^* для эталонного статистически устойчивого белого гауссовского шума (пунктирная кривая)

Из кривых на рисунке видно, что колебания магнитного поля носят статистически неустойчивый характер. На интервале времени, большем нескольким месяцев, статистический прогноз уровня магнитной индукции проблематичен, а на протяжении нескольких лет — практически невозможен.

6.3.3 Волнение моря

Результаты расчета [Горбань 2010 (5)] параметра статистической неустойчивости μ_N^* по экспериментальным данным, полученным в

Черном море с сентября 2001 г. по декабрь 2003 г. Институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН, приведены на рис. 6.8.

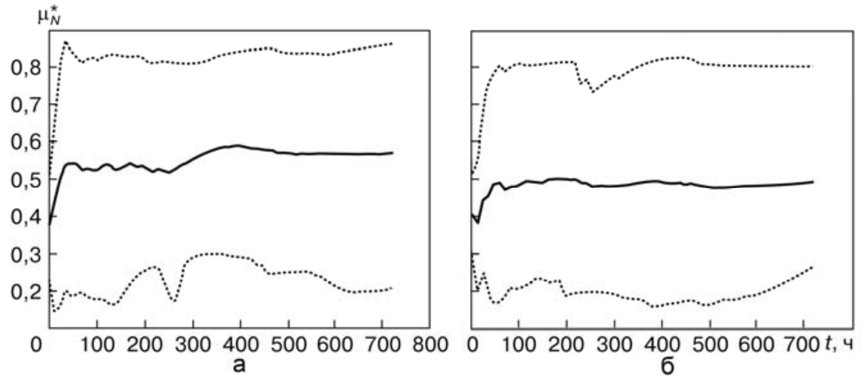


Рис. 6.8. Зависимости усредненных по 15 месяцам значений параметра статистической неустойчивоти μ_N^* (сплошные кривые) и границ изменения этого параметра (точечные кривые) от времени: **а** — для высоты максимальных волн, **б** — для периода следования максимальных волн

Из кривых на рисунке видно, что высота волн и период их следования носят статистически неустойчивый характер. Статистический прогноз на интервале времени, превышающий 10—12 часов, практически невозможен.

6.3.4 Температура воды в океане

Результаты расчета параметра статистической неустойчивости μ_N^* [Горбань, Горбань, Новотрясов, Ярощук 2011] по экспериментальным данным, полученным Тихоокеанским океанологическим институтом ДВО РАН в залив Посьета Тихого океана с октября 2010 по май 2011 г., приведены на рис. 6.9. Для устранения влияния сезонных изменений при расчете исходные данные подвергались предварительной низкочастотной фильтрации.

Из кривых видно, что колебания температуры носят выраженный статистически неустойчивый характер. Статистическая устойчивость теряется очень быстро.

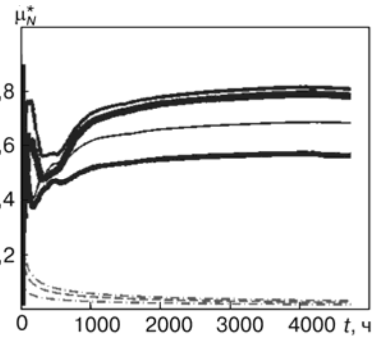


Рис. 6.9. Зависимости от времени параметра статистической неустойчивости μ_N^* для четырех датчиков температуры, расположенных на разных глубинах (сплошные кривые) в двух точках Тихого океана, а также для эталонного статистически устойчивого белого гауссовского шума (пунктирная кривая) с его отклонениями на величину СКО (штрихпунктирные кривые)

6.3.5 Температура воздуха и количество осадков

Представление о статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков дают приведенные на рис. 6.10 кривые [Горбань 2014 (2)], полученные на основе данных наблюдения за погодой в Москве с 1949 г. по 1992 г. и Киеве с 1881 г. по 1992 г.

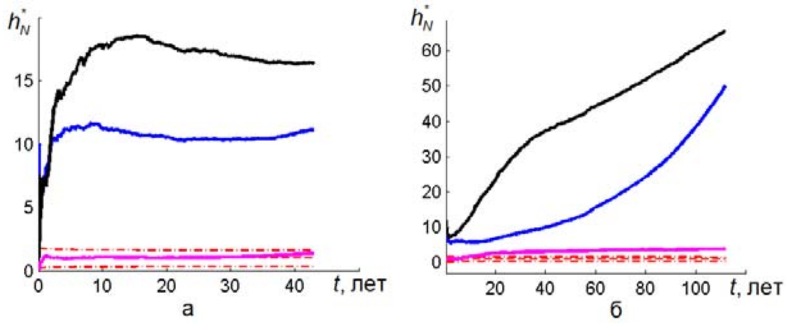


Рис. 6.10. Изменение во времени параметра статистической неустойчивости h_N^* для колебаний максимальной (верхние сплошные кривые) и минимальной (средние сплошные кривые) суточных температур, а также количества среднесуточных осадков (нижние сплошные кривые): **а** — для Москвы, **б** — для Киева. Для сравнения пунктирными прямыми изображен параметр статистической неустойчивости h_N^* для эталонного статистически устойчивого белого гауссовского шума, а штрихпунктирными линиями — отклонения от этих прямых на величину СКО

Из приведенных кривых следует, что колебания температуры воздуха носят выраженный статистически неустойчивый характер. Заметные нарушения устойчивости начинались уже после нескольких недель наблюдения. Колебания же количества осадков существенно более стабильны. Они оставались устойчивыми на протяжении многих десятилетий.

6.3.6 Котировка валют

Представление о статистической устойчивости котировки валют дают кривые на рис. 6.11, полученные по данным FOREX [FOREX 2011].

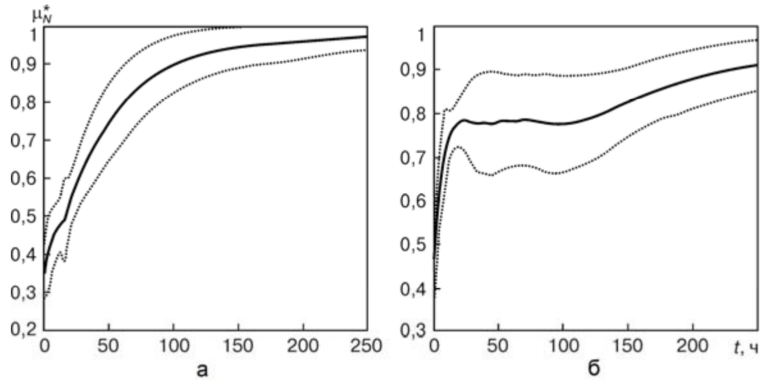


Рис. 6.11. Усредненный по 16 декадам параметр статистической неустойчивости μ_N^* (сплошные кривые) и границы изменения этого усредненного параметра (точечные кривые), определяемые СКО, для котировки конвертируемого австралийского доллара (AUD) по отношению к доллару США (USD) за 2001 г. (**а**) и 2002 г. (**б**)

Из графиков следует, что параметр статистической неустойчивости принимает большие значения с первых же часов наблюдения и постоянно возрастает.

Таким образом, *интервал статистической устойчивости* τ_{sm} *колебания курса валют равен примерно 1—2 ч.* Статистический прогноз на большем интервале времени практически невозможен.

6.3.7 Астрофизические объекты

Представление о статистической устойчивости колебаний интенсивности астрофизических объектов дают результаты расчетов (рис. 6.12 и 6.13) [Горбань 2014 (2)] по данным [All-Sky Monitor 2014] 16-летнего наблюдения за двумя аккрецирующими источниками рентгеновского излучения разного типа: GRS 1915+105 и PSRJ 1012+5307.

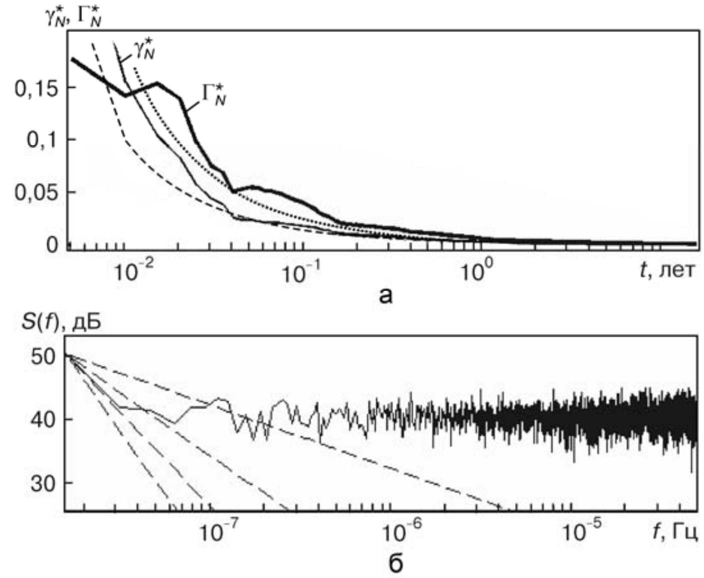


Рис. 6.12. Изменение во времени параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N^* и к СКО Γ_N^* для пульсара PSR J1012+5307 (**а**) и соответствующий спектр излучения (**б**)

На рис. 6.12 **а** и 6.13 **а** тонкими сплошными линиями изображены оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N^*, а полужирными сплошными линиями — оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО Γ_N^*.

Пунктирными линиям представлен параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему для эталонного статистически устойчивого белого гауссовского шума, а точечными — верхняя граница коридора статистической устойчивости $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + \sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$.

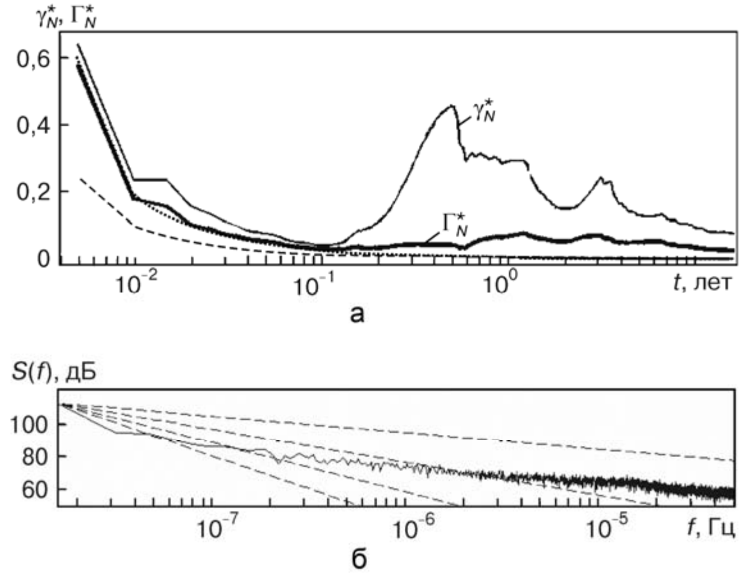


Рис. 6.13. Изменение во времени параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N^* и к СКО Γ_N^* для источника излучения GRS 1915+105 (**а**) и соответствующий спектр излучения (**б**)

Сплошными линиями на рис. 6.12 **б** и 6.13 **б** изображены СПМ излучения источников. Для сравнения пунктирными линиями представлены сдвинутые вдоль оси ординат до уровня первого отсчета спектров графики степенных функций $1/f^{\beta}$, $\beta = \overline{1,4}$.

Из кривых на рис. 6.12 **а** и 6.13 **а** следует, что колебания интенсивности источника GRS 1915+105 носят явно статистически неустойчивый характер, который начал проявляться на уровне выборочного среднего и выборочного СКО уже через месяц наблюдения. Колебания же интенсивности источника PSRJ 1012+5307 значительно более стабильны: на уровне выборочного среднего нарушения устойчивости не обнаруживались на протяжении всего времени наблюдения, на уровне же выборочного СКО они начали проявляться спустя несколько недель после начала наблюдения.

Для пульсара PSR J1012+5307 практически на всем интервале наблюдения справедливо неравенство $\gamma_N^* < \Gamma_N^*$, а для источника GRS 1915+105 — неравенство $\gamma_N^* > \Gamma_N^*$. Этот результат можно объяснить разным характером спектра излучения (см. п. 6.2.3). Шум пульсара PSR J1012+5307 близок к белому шуму, СПМ которого имеет небольшой подъем в области высоких частот (рис. 6.12 **б**), а шум источника GRS 1915+105 близок к сильно коррелированному шуму, СПМ которого в наиболее энергоемкой части спектра изменяется с частотой f по закону примерно $1/f^3$ (рис. 6.13 **б**).

* * *

Обобщая полученные результаты, следует обратить внимание на то, что

все процессы, подвергнутые исследованию, оказались статистически неустойчивыми в широком смысле.

Это указывает на то, что,

по всей видимости, *все реальные физические величины и процессы статистически неустойчивы* [Горбань 2007 (1), 2011 (1), 2014 (1)].

Исключение могут составлять, возможно, лишь мировые физические константы типа скорости света и гравитационной постоянной.

Применительно к статистически неустойчивым событиям, величинам и процессам понятия вероятности, математического ожидания, СКО, функции распределения и плотности распределения не имеют физической интерпретации. Поэтому для адекватного описания таких явлений классические методы и подходы теории вероятностей оказываются непригодными.

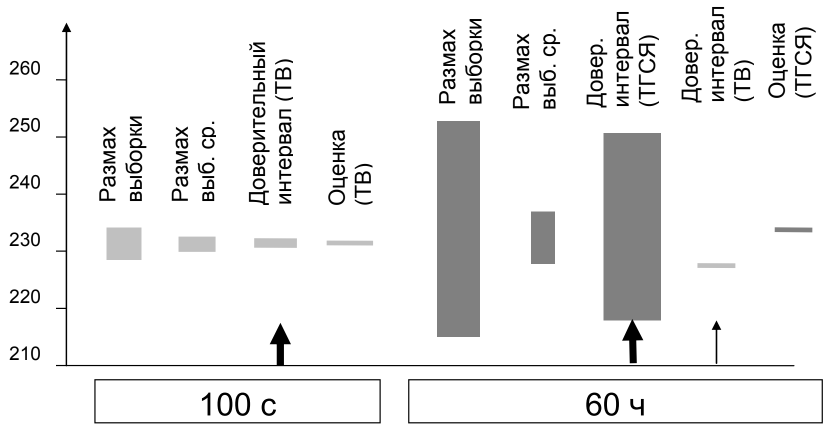
Возникает вопрос, каким же образом *описывать реальные события, величины и процессы с учетом нарушений статистической устойчивости*?

Для описания может быть использована *физико-математическая теория гиперслучайных явлений*, специально разработанная для этих целей.

Последующие четыре главы посвящены изложению основных положений этой теории.

ЧАСТЬ IV

ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ



Результаты расчета по методикам теории вероятностей (светло-серый оттенок) и теории гиперслучайных явлений (темно-серый оттенок) параметров, характеризующих напряжение электросети на протяжении 100 с и 60 ч наблюдения

Академик АН СССР А.Н. Колмогоров:

— Говоря о случайности в обыденном смысле этого слова, мы имеем ввиду те явления, в которых мы не обнаруживаем закономерностей, позволяющих нам предсказывать их поведение. Вообще нет причин предполагать, что случайные в этом смысле явления подчиняются каким-то вероятностным законам. Следовательно, нужно различать случайность в этом широком смысле и стохастическую случайность (которая является предметом теории вероятностей) (Колмогоров 1986).

Э. Борель:

— Если при очень большом числе испытаний эта частота не стремится к пределу, а более или менее колеблется между различными пределами, то надо утверждать, что вероятность *p* не остается постоянной, а изменяется в ходе испытаний. Это имеет место, например, для людской смертности в течение веков, так как успехи медицины и гигиены имеют своим следствием увеличение средней продолжительности жизни. Стало быть, вероятность *p* для родившегося ребенка достичь возраста 60 лет имеет тенденцию к росту. Эта эмпирическая точка зрения вполне приемлема для статистика, изучающего демографические явления, так как здесь мы должны, за неимением других научных средств для предвидения, ограничиться использованием бесчисленных наблюдений (Борель 1961, с. 28, 29).

Глава 7 Основы теории гиперслучайных явлений

Формализовано понятие гиперслучайного события. Рассмотрены свойства гиперслучайных событий. Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Приведены три способа ее описания: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Способы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Кратко рассмотрен вопрос о преобразовании гиперслучайных величин и об арифметических операциях над ними.

Приступая к изложению *физико-математической теории гиперслучайных явлений*, следует обратить внимание на то, что она состоит из двух частей: *физической* и *математической.*

В основе ее *физической части* лежат описанные в предыдущей главе результаты экспериментальных исследований, указывающих на отсутствие сходимости статистик, сформированных по реальным данным, и *физическая гипотеза* возможности адекватного описания реальных событий, величин и процессов гиперслучайными моделями — гиперслучайными событиями, величинами и функциями, учитывающими нарушения статистической устойчивости.

Под гиперслучайными событием, величиной или функцией (*гиперслучайным явлением*) подразумевается *множество случайных событий, величин* или *процессов.* Каждый элемент этого множества (*случайное явление*) ассоциируется с определенными статистическими условиями (см. п. 1.3).

Логика построения *математической части* теории гиперслучайных явлений во многом повторяет логику построения аксиоматической теории вероятностей и опирается на нее.

7.1 Гиперслучайные события

7.1.1 Определение понятия гиперслучайного события

По аналогии с аксиоматическим определением понятия случайного события (см. п. 2.2.5) понятие гиперслучайного события определяется следующим образом.

Гиперслучайное событие — математический объект, задаваемый аналитически тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — σ-алгебра подмножеств событий (борелевское поле) и P_g — вероятностная мера при фиксированном значении $g \in G$.

Гиперслучайное событие можно представить множеством случайных событий, зависящих от условий g. Для каждого g-го входящего в это множество случайного события определена вероятностная мера P_g, но *для условий* g *мера не определена.*

Гиперслучайное событие A характеризуется не одной вероятностью, как в теории вероятностей, а *множеством условных вероятностей* $P_g(A) = P(A / g)$, $g \in G$. Это множество вероятностей обеспечивает исчерпывающее описание гиперслучайного события.

Менее полно гиперслучайное событие A характеризуют *верхняя* $P_S(A)$ и *нижняя* $P_I(A)$ *границы вероятности* (рис. 7.1), описываемые выражениями

$$P_S(A) = \sup_{g \in G} P(A / g), \quad P_I(A) = \inf_{g \in G} P(A / g). \tag{7.1}$$

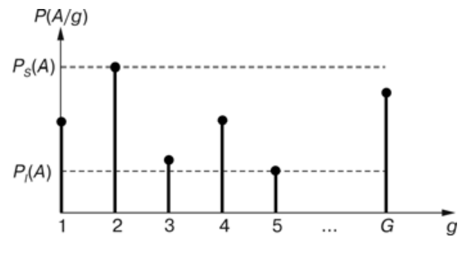


Рис. 7.1. Условные вероятности $P(A / g)$ (точки) и границы вероятности $P_S(A)$, $P_I(A)$ (пунктирные линии) гиперслучайного события A

Если множество условий состоит из одного элемента ($g = \text{const}$), то эти границы совпадают. Тогда гиперслучайное событие вырождается в случайное событие. При этом величина $P(A) = P_S(A) = P_I(A)$ представляет собой вероятность случайного события A.

Используя *статистический подход*, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N *не стабилизируется* (*не сходится*) и при $N \to \infty$ *не имеет предела*. Однако при фиксации условий $g \in G$ частота появления события $p_N(A/g)$ стабилизируется и при $N \to \infty$ имеет предел $P(A/g)$.

7.1.2 Свойства гиперслучайных событий

На основе аксиом теории вероятностей (см. п. 2.2.5) нетрудно показать, что

1) $P_S(A) \geq 0, \quad P_I(A) \geq 0;$ (7.2)

2) для попарно несовместных событий

$$P_S(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P_S(A_n), \quad P_I(\bigcup_n A_n) \geq \sum_n P_I(A_n); \tag{7.3}$$

3) $P_S(\Omega) = P_I(\Omega) = 1.$ (7.4)

Из выражений (7.1)—(7.4) следует, что

$$0 \leq P_S(A) \leq 1, \quad 0 \leq P_I(A) \leq 1, \quad P_S(\varnothing) = P_I(\varnothing) = 0.$$

Для гиперслучайных событий справедливы следующие формулы:

4) если $A_m \subset A_{m+1}$, $m \geq 1$, то

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \quad P_I(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{7.5}$$

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M);$$

5) если $A_{m+1} \subset A_m$, $m \geq 1$, то

$$P_S(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \quad P_I(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{7.6}$$

$$P_I(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M).$$

Для *гиперслучайных событий* A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cup A_2) \leq P_S(A_1) + P_S(A_2) - P_I(A_1 \cap A_2), \tag{7.7}$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \geq P_I(A_1) + P_I(A_2) - P_S(A_1 \cap A_2), \tag{7.8}$$

аналогичные выражению, описывающему *теорему сложения для случайных событий.*

Отметим, что когда события A_1 и A_2 *несовместные*, то $P_S(A_1 \cap A_2) = 0$, $P_I(A_1 \cap A_2) = 0$ и из выражений (7.7), (7.8) следует

$$\begin{aligned} &P_S(A_1 \cup A_2) \leq P_S(A_1) + P_S(A_2), \\ &P_I(A_1 \cup A_2) \geq P_I(A_1) + P_I(A_2). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Когда $A_1 \subset A_2$, то согласно соотношениям (7.5)

$$P_S(A_1 \cup A_2) = P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \cup A_2) = P_I(A_2).$$

В общем случае для *гиперслучайных событий* A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &P_S(A_1 \cap A_2) \leq P_S(A_1)P_S(A_2/A_1) \quad (P_S(A_1) \neq 0), \\ &P_I(A_1 \cap A_2) \geq P_I(A_1)P_I(A_2/A_1) \quad (P_I(A_1) \neq 0), \end{aligned} \tag{7.10}$$

аналогичные выражению

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ P(A_2/A_1) \quad (P(A_1) \neq 0),$$

описывающему *теорему умножения для случайных событий* при $P(A_1) \neq 0$. В данном случае под $P_S(A_2/A_1)$ и $P_I(A_2/A_1)$ подразумеваются соответственно верхняя и нижняя границы вероятности события A_2 при условии, что произошло событие A_1.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 называются *независимыми*, если *границы вероятности* пересечения этих событий факторизуются:

$$\begin{aligned} P_S(A_1 \cap A_2) &= P_S(A_1)P_S(A_2), \\ P_I(A_1 \cap A_2) &= P_I(A_1)P_I(A_2). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Смысл формул (7.11) в том, что при независимых гиперслучайных событиях A_1 и A_2 границы функции распределения пересечения событий определяются лишь границами функции распределения события A_1 и границами функции распределения события A_2. При этом несущественно, произошло или не произошло событие A_1 до выяснения, каковы границы события A_2, и произошло или не произошло событие A_2 до выяснения, каковы границы события A_1. Результат будет один и тот же.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 называются *независимыми при всех условиях*, если *для всех* $g \in G$ условные вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P(A_1 \cap A_2 / g) = P(A_1 / g)P(A_2 / g). \tag{7.12}$$

Обратим внимание, что независимые гиперслучайные события и гиперслучайные события, независимые при всех условиях, — разные понятия. Из независимости гиперслучайных событий при всех условиях *не следует* их независимость и, наоборот, из независимости гиперслучайных событий *не следует* их независимость при всех условиях.

7.2 Скалярные гиперслучайные величины

Скалярной гиперслучайной величиной X называется произвольная числовая функция, определенная на пространстве Ω элементарных событий ω, для которой при фиксированных условиях наблюдения $g \in G$ определена вероятностная мера, но для неопределенных условий наблюдения вероятностная мера не определена.

Значение x гиперслучайной величины X в условиях наблюдения $g \in G$ может быть получено с помощью некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Множество значений гиперслучайной величины при всех $g \in G$ образует *пространство значений гиперслучайной величины*.

Гиперслучайную величину X можно представить в виде *множества случайных величин* $X_g = X / g$: $X = \{X_g, \quad g \in G\}$.

Гиперслучайные величины связаны со случайными величинами так, как векторные величины — со скалярными величинами: вектор характеризуется множеством скалярных величин; гиперслучайная величина характеризуется множеством случайных величин. Частным случаем вектора является скаляр, частным случаем гиперслучайной величины — случайная величина.

7.2.1 Условные вероятностные характеристики и условные моменты скалярной гиперслучайной величины

Для описания скалярной гиперслучайной величины X можно использовать различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* X_g $(g \in G)$, в частности, *условные функции распределения* (рис. 7.2)

$$F_{x/g}(x) = P\{X_g < x\}, \tag{7.13}$$

где $P\{X_g < x\} = P\{X < x / g\}$ — вероятность выполнения неравенства $X < x$ в условиях g, и *условные плотности распределения*

$$f_{x/g}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{x/g}(x))}{\mathrm{d}x}. \tag{7.14}$$ [1]

Наиболее полное описание гиперслучайной величины дает ее *функция распределения* $\tilde{F}_x(x)$, представляющая собой *множество* условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ для всех $g \in G$: $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x), \quad g \in G\}$.

---

[1] Здесь и далее предполагается, что все рассматриваемые функции распределения непрерывны или кусочно-непрерывны.

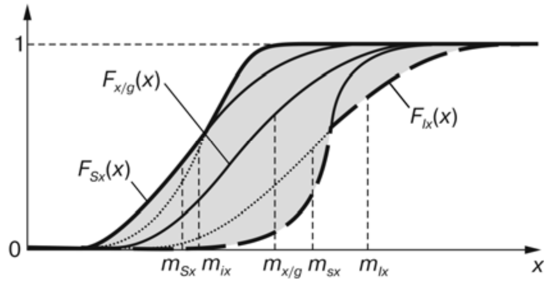


Рис. 7.2. Множество условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ (тонкие линии) и границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ (полужирные линии) гиперслучайной величины X

Функцию распределения $\tilde{F}_x(x)$ можно интерпретировать как *многозначную функцию*, ветви которой — условные функции распределения.

Заметим, что далее многозначные функции и многозначные величины, подобно $\tilde{F}_x(x)$, обозначены буквами со знаком тильды над ними.

Менее полное описание обеспечивают *условные математические ожидания* $\mathrm{M}[\varphi(X_g)]$ *различных функций* $\varphi(X_g)$ *случайных величин* X_g $(g \in G)$.

Под *условным математическим ожиданием* $\mathrm{M}[\varphi(X_g)]$ *функции* $\varphi(X_g)$ понимается среднее (с учетом условной плотности распределения $f_{x/g}(x) = f(x/g)$) значение этой функции:

$$\mathrm{M}[\varphi(X_g))] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{x/g}(x) \mathrm{d}x.$$

С помощью этого выражения определяются *условные центральные и нецентральные моменты гиперслучайной величины* $X = \{X_g, \quad g \in G\}$ (*условные моменты*), в частности, *условное математическое ожидание величины*

$$m_{x/g} = \mathrm{M}[X_g] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x/g}(x)\, \mathrm{d}x\,, \tag{7.15}$$

условная дисперсия

$$D_{x/g} = \mathrm{D}[X_g] = \mathrm{M}[(X_g - m_{x/g})^2]\,, \tag{7.16}$$

условное среднеквадратическое отклонение $\sigma_{x/g} = \sqrt{D_{x/g}}$ и пр.

При такой интерпретации *математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение гиперслучайной величины — многозначные величины*, которые аналитически описываются следующим образом:

$$\tilde{m}_x = \{m_{x/g}, \quad g \in G\},$$
$$\tilde{D}_x = \{D_{x/g}, \quad g \in G\},$$
$$\tilde{\sigma}_x = \{\sigma_{x/g}, \quad g \in G\}.$$

Для описания гиперслучайной величины X могут быть использованы также характеристики и параметры другого типа, рассматриваемые в следующем пункте.

7.2.2 Границы функции распределения и моменты границ скалярной гиперслучайной величины

Представление о скалярной гиперслучайной величине X дают функции

$$\begin{aligned} F_{Sx}(x) &= \sup_{g\in G} P\{X_g < x\} = \sup_{g\in G} F_{x/g}(x), \\ F_{Ix}(x) &= \inf_{g\in G} P\{X_g < x\} = \inf_{g\in G} F_{x/g}(x), \end{aligned} \tag{7.17}$$

где $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$ — соответственно верхняя и нижняя границы вероятности выполнения условия $X < x$ без конкретизации условий $g \in G$ (*границы функции распределения* $\tilde{F}_x(x)$) (см. рис. 7.2).

Для того чтобы функция $F_x(x)$ могла быть функцией распределения некоторой скалярной *случайной величины* X, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей при всех x, непрерывной слева и имела предельные значения $F_x(-\infty) = 0$, $F_x(+\infty) = 1$.

Условные функции распределения $F_{x/g}(x)$ $(g \in G)$ *гиперслучайной величины* X удовлетворяют этим условиям. Границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ также удовлетворяют этим условиям. Поэтому *границы функции распределения можно рассматривать как функции распределения неких виртуальных случайных величин.*

Отметим, что $F_{Sx}(x) \ge F_{Ix}(x)$, при минимальном значении гиперслучайной величины (если оно существует) границы $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$ совпадают и равны нулю, а при максимальном значении (если оно существует) границы $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$ совпадают и равны единице.

Между границами функции распределения расположена *область неопределенности* (затемненная область на рис. 7.2).

Подобно тому, как детерминированную величину приближенно можно рассматривать как вырожденную случайную величину (см. п. 2.3.3), *случайную величину* можно интерпретировать как *вырожденную гиперслучайную величину*.

Гиперслучайная величина называется *непрерывной*, если на любом конечном интервале границы ее функции распределения непрерывны и существуют их кусочно-непрерывные производные.

Для непрерывной гиперслучайной величины аналогами плотности распределения случайной величины служат *плотности распределения границ*

$$f_{Sx}(x) = \frac{\mathrm{d}\, F_{Sx}(x)}{\mathrm{d}\, x}, \quad f_{Ix}(x) = \frac{\mathrm{d}\, F_{Ix}(x)}{\mathrm{d}\, x}, \tag{7.18}$$

представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения.

Используя обобщенные функции, в частности δ-функцию, можно определить плотности распределения границ не только для непрерывных гиперслучайных величин, но и для тех, у которых границы функции распределения представляют собой *кусочно-непрерывные функции*.

Плотности распределения границ $f_{Sx}(x)$ и $f_{Ix}(x)$ обладают свойствами плотности распределения случайной величины.

Отметим, что плотности распределения границ $f_{Sx}(x)$ и $f_{Ix}(x)$, так же как и границы функции распределения $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$, определяют область неопределенности, хотя характеризуют ее не столь наглядно, как границы функции распределения.

Для описания гиперслучайных величин могут быть использованы *моменты границ распределения* и связанные с ними величины: математические ожидания границ, дисперсии границ, среднеквадратические отклонения границ и др.

Математическими ожиданиями границ $\mathrm{M}_S[\varphi(X)]$, $\mathrm{M}_I[\varphi(X)]$ *функции* $\varphi(X)$ *гиперслучайной величины* X с плотностями распределения границ $f_S(x)$, $f_I(x)$ называются интегралы

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_S[\varphi(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{Sx}(x)\mathrm{d}\,x, \\ \mathrm{M}_I[\varphi(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{Ix}(x)\mathrm{d}\,x. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Математические ожидания границ существуют не всегда: только когда существуют (в смысле абсолютной сходимости) интегралы (7.19).

Из выражений (7.19) следует, что *математические ожидания границ* m_{Sx}, m_{Ix} *гиперслучайной величины* X, представляемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X$, описываются выражениями

$$\begin{aligned} m_{Sx} &= \mathrm{M}_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{Sx}(x)\mathrm{d}\,x, \\ m_{Ix} &= \mathrm{M}_I[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{Ix}(x)\mathrm{d}\,x \end{aligned} \tag{7.20}$$

(см. рис. 7.2).

Для вещественной гиперслучайной величины X *дисперсии границ* D_{Sx} и D_{Ix} определяются как

$$\begin{aligned} D_{Sx} &= \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Sx})^2\right], \\ D_{Ix} &= \mathrm{M}_I\left[(X - m_{Ix})^2\right], \end{aligned} \tag{7.21}$$

а *среднеквадратические отклонения границ* σ_{Sx} и σ_{Ix} — как

$$\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}, \quad \sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}. \tag{7.22}$$

Математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} характеризуют средние значения, соответствующие верхней и нижней границам распределения гиперслучайной величины X. Дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix}, а также среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx} и

σ_{Ix} характеризуют разброс значений X относительно соответствующих математических ожиданий m_{Sx} и m_{Ix}.

Математические ожидания границ связаны между собой неравенством $m_{Sx} \leq m_{Ix}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда гиперслучайная величина X вырождается в случайную величину. Дисперсия верхней границы D_{Sx} может быть больше, меньше или равна дисперсии нижней границы D_{Ix}.

Представление о гиперслучайной величине дают также *границы моментов*.

7.2.3 Границы моментов скалярной гиперслучайной величины

Верхней и нижней границами математического ожидания функции $\varphi(X)$ *гиперслучайной величины* X называются величины

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_s[\varphi(X)] &= \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{x/g}(x) \mathrm{d}x, \\ \mathrm{M}_i[\varphi(X)] &= \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{x/g}(x) \mathrm{d}x. \end{aligned} \qquad (7.23)$$

Верхняя и нижняя границы математического ожидания описываются выражениями (см. рис. 7.2)

$$\begin{aligned} m_{sx} &= \mathrm{M}_s[X] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x/g}(x) \mathrm{d}x, \\ m_{ix} &= \mathrm{M}_i[X] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x/g}(x) \mathrm{d}x. \end{aligned} \qquad (7.24)$$

Верхняя и нижняя границы дисперсии

$$D_{sx} = \sup_{g\in G} D_{x/g}, \quad D_{ix} = \inf_{g\in G} D_{x/g}. \qquad (7.25)$$

Корни из этих величин $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$, $\sigma_{ix} = \sqrt{D_{ix}}$ представляют собой *границы среднеквадратического отклонения*.

7.2.4 Связь между границами моментов и моментами границ распределения

В общем случае операторы $M_s[\cdot]$, $M_i[\cdot]$ не совпадают с операторами $M_S[\cdot]$, $M_I[\cdot]$, а границы математического ожидания и дисперсии гиперслучайной величины m_{sx}, m_{ix}, D_{sx}, D_{ix} не совпадают с математическими ожиданиями и дисперсиями границ функции распределения m_{Sx}, m_{Ix}, D_{Sx}, D_{Ix}.

Заметим, что как границы плотности распределений $f_{sx}(x)=\sup_{g\in G} f_{x/g}(x)$ и $f_{ix}(x)=\inf_{g\in G} f_{x/g}(x)$, так и границы моментов несут информацию не о границах функции распределения $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$, а о диапазоне изменения соответствующих характеристик при изменении условий g в пределах множества условий G.

Границы плотности распределения и плотности распределения границ — разные характеристики, а границы моментов и моменты границ — разные параметры, по-разному представляющие гиперслучайную величину.

Для пояснения причин возможных отличий границ характеристик от соответствующих характеристик границ на рис. 7.3 приведены несколько примеров функции распределения гиперслучайной величины X.

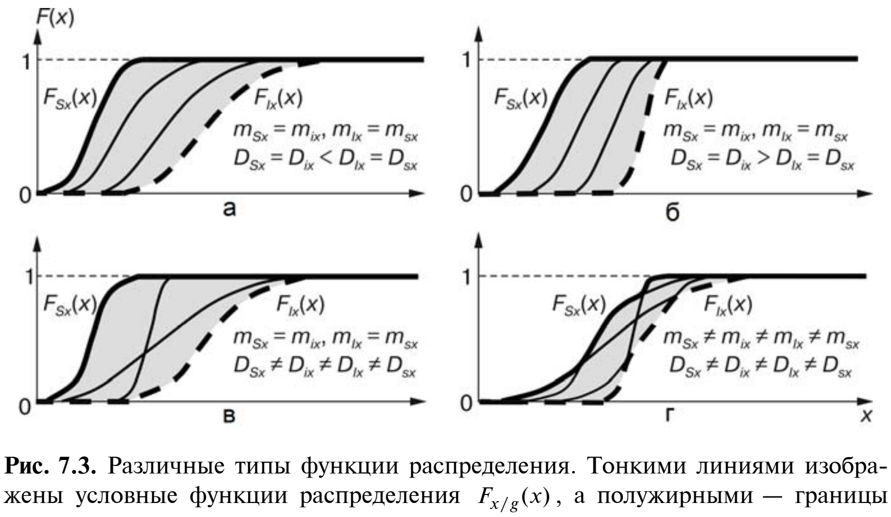


Рис. 7.3. Различные типы функции распределения. Тонкими линиями изображены условные функции распределения $F_{x/g}(x)$, а полужирными — границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$

Из рисунка видно, что условные функции распределения могут не пересекаться (рис. 7.3 **а**, **б**), а могут пересекаться между собой (рис. 7.3 **в**, **г**). В случаях «**а**» и «**б**» границы двух первых моментов совпадают с соответствующими моментами границ, в случае «**в**» наблюдается частичное, а в случае «**г**» — полное несовпадение соответствующих характеристик.

Если среди математических ожиданий условных случайных величин X_g, $g \in G$ существуют минимальные и максимальные значения, то математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} связаны с границами математических ожиданий m_{ix} и m_{sx} неравенством

$$m_{Sx} \le m_{ix} \le m_{sx} \le m_{Ix} .$$

7.3 Векторные гиперслучайные величины

Описанные в п. 7.2 базовые принципы описания скалярных гиперслучайных величин (с помощью условных вероятностных характеристик и условных моментов, границ функции распределения и моментов этих границ, а также границ моментов) распространяются на векторные гиперслучайные величины.

Под *векторной гиперслучайной величиной* подразумевается вектор, каждая компонента которого представляет собой скалярную гиперслучайную величину.

N-мерную векторную гиперслучайную величину $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$ можно рассматривать как множество векторных случайных величин $\left\{\vec{X}_g,\ g \in G\right\}$ или как вектор, состоящий из N скалярных гиперслучайных величин X_n $(n = \overline{1, N})$.

7.3.1 Условные вероятностные характеристики и условные моменты векторной гиперслучайной величины

Для описания векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$ используют различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* $\vec{X}_g = \vec{X} / g$ $(g \in G)$, в частности, *условные функции распределения*:

$$F_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = F_{\vec{x}/g}(x_1, \ldots, x_N) = P\left\{X_{1g} < x_1, \ldots, X_{Ng} < x_N\right\}, \qquad (7.26)$$

где $P\left\{X_{1g} < x_1, \ldots, X_{Ng} < x_N\right\}$ — вероятность выполнения системы неравенств $X_1 < x_1, \ldots, X_N < x_N$ в условиях g, и *условные плотности распределений:*

$$f_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = \frac{\partial^N F_{\vec{x}/g}(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}. \qquad (7.27)$$

Множество любых из этих условных характеристик для всех $g \in G$ дает наиболее полное описание векторной гиперслучайной величины.

Векторные гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ называются *независимыми при всех условиях* $g \in G$, если факторизуются все условные плотности распределения вектора $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})^{\mathrm{T}}$: для всех $g \in G$

$$f_{\vec{z}/g}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{\vec{x}/g}(\vec{x})\, f_{\vec{y}/g}(\vec{y}).$$

Для независимых гиперслучайных величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ при всех условиях $g \in G$ факторизуются не только все условные плотности распределения, но и все условные функции распределения:

$$F_{\vec{z}/g}(\vec{x}, \vec{y}) = F_{\vec{x}/g}(\vec{x})\, F_{\vec{y}/g}(\vec{y}).$$

Следует обратить внимание на то, что независимость гиперслучайных величин при всех условиях *не означает, что между этими величинами отсутствует связь.* Просто на уровне рассматриваемых характеристик она не проявляется (см. п. 2.4.1).

Векторную гиперслучайную величину $\vec{X}$ характеризуют различные числовые характеристики составляющих случайных величин $\vec{X}_g$, в частности *условные моменты.*

Двумерную гиперслучайную величину $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ в условиях $g \in G$, например, характеризует *вектор условных математических ожиданий*

$$\vec{m}_{\vec{x}/g} = (m_{x_1/g}, m_{x_2/g})^{\mathrm{T}}, \qquad (7.28)$$

вектор условных дисперсий

$$\vec{D}_{\vec{x}/g} = (D_{x_1/g}, D_{x_2/g})^{\mathrm{T}} = \mathrm{D}\left[\vec{X}_g\right], \qquad (7.29)$$

вектор условных среднеквадратических отклонений

$$\vec{\sigma}_{\vec{x}/g} = (\sigma_{x_1/g}, \sigma_{x_2/g})^{\mathrm{T}} = \left(\sqrt{D_{x_1/g}}, \sqrt{D_{x_2/g}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.30}$$

и другие величины, где $m_{x_1/g}$, $m_{x_2/g}$ — математические ожидания случайных величин X_{1g} и X_{2g}, $D_{x_1/g}$, $D_{x_2/g}$ — дисперсии этих величин, а $\sigma_{x_1/g}$, $\sigma_{x_2/g}$ — их среднеквадратические отклонения.

Для фиксированных условий $g \in G$ *условный корреляционный момент гиперслучайных величин* X_1 и X_2 описывается выражением

$$K_{x_1x_2/g} = \mathrm{M}\left[X_{1g}X_{2g}\right], \tag{7.31}$$

условный ковариационный момент — выражением

$$R_{x_1x_2/g} = \mathrm{M}\left[(X_{1g} - m_{x_1/g})(X_{2g} - m_{x_2/g})\right], \tag{7.32}$$

а *условный коэффициент корреляции* — выражением

$$r_{x_1x_2/g} = \frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}. \tag{7.33}$$

Условный ковариационный момент $R_{x_1x_2/g}$, условный корреляционный момент $K_{x_1x_2/g}$ и условные математические ожидания $m_{x_1/g}$, $m_{x_2/g}$ гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношением

$$R_{x_1x_2/g} = K_{x_1x_2/g} - m_{x_1/g}m_{x_2/g}. \tag{7.34}$$

7.3.2 Границы функции распределения и моменты границ векторной гиперслучайной величины

Границы функции распределения векторной N *-мерной гиперслучайной величины* $\vec{X} = (X_1, \dots, X_N)^{\mathrm{T}}$ определяются как

$$F_{S\vec{x}}(\vec{x}) = \sup_{g \in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x}), \quad F_{I\vec{x}}(\vec{x}) = \inf_{g \in G} F_{\vec{x}/g}(\vec{x}), \tag{7.35}$$

а *плотности распределения границ* — как

$$f_{S\vec{x}}(\vec{x})=\frac{\partial^N F_{S\vec{x}}(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}, \quad f_{I\vec{x}}(\vec{x})=\frac{\partial^N F_{I\vec{x}}(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}. \tag{7.36}$$

Границы функции распределения $F_{S\vec{x}}(\vec{x})$ и $F_{I\vec{x}}(\vec{x})$ связаны между собой неравенством $F_{S\vec{x}}(\vec{x}) \geq F_{I\vec{x}}(\vec{x})$. При устремлении компонент вектора $\vec{x}$ к минус бесконечности и плюс бесконечности эти границы приближаются друг к другу.

Совместные плотности распределения границ $f_{S\vec{z}}(\vec{x},\vec{y})$, $f_{I\vec{z}}(\vec{x},\vec{y})$ системы гиперслучайных величин $\vec{Z}=(\vec{X},\vec{Y})^{\mathrm{T}}$ связаны с условными плотностями распределения границ $f_{S\vec{y}/\vec{x}}(\vec{y})$, $f_{I\vec{y}/\vec{x}}(\vec{y})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ и плотностями распределения границ $f_{S\vec{x}}(\vec{x})$, $f_{I\vec{x}}(\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{X}$ неравенствами

$$f_{S\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) \leq f_{S\vec{x}}(\vec{x}) f_{S\vec{y}/\vec{x}}(\vec{y}),$$
$$f_{I\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) \geq f_{I\vec{x}}(\vec{x}) f_{I\vec{y}/\vec{x}}(\vec{y}),$$

следующими из выражений (7.10).

Гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ называют *независимыми*, если плотности распределения границ $f_{S\vec{z}}(\vec{x},\vec{y})$, $f_{I\vec{z}}(\vec{x},\vec{y})$ допускают факторизацию:

$$f_{S\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) = f_{S\vec{x}}(\vec{x}) f_{S\vec{y}}(\vec{y}),$$
$$f_{I\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) = f_{I\vec{x}}(\vec{x}) f_{I\vec{y}}(\vec{y}),$$

Для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ факторизуются не только плотности распределения границ, но также границы функции распределения:

$$F_{S\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) = F_{S\vec{x}}(\vec{x}) F_{S\vec{y}}(\vec{y}),$$
$$F_{I\vec{z}}(\vec{x},\vec{y}) = F_{I\vec{x}}(\vec{x}) F_{I\vec{y}}(\vec{y}),$$

Заметим, что независимость гиперслучайных величин и их независимость при всех условиях — *разные понятия*.

Границы распределения векторной гиперслучайной величины могут быть охарактеризованы различными числовыми характеристиками, в частности *нецентральными и центральными моментами границ*.

Для двумерной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$, характеризуемой плотностями распределения границ $f_{S\vec{x}}(x_1, x_2)$ и $f_{I\vec{x}}(x_1, x_2)$, *математические ожидания границ* $\vec{m}_{S\vec{x}}$ и $\vec{m}_{I\vec{x}}$ описываются векторами

$$\begin{aligned} \vec{m}_{S\vec{x}} &= (m_{Sx_1}, m_{Sx_2})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}_S\left[\vec{X}\right], \\ \vec{m}_{I\vec{x}} &= (m_{Ix_1}, m_{Ix_2})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}_I\left[\vec{X}\right], \end{aligned} \tag{7.37}$$

дисперсии границ $\vec{D}_{S\vec{x}}$, $\vec{D}_{I\vec{x}}$ — векторами

$$\begin{aligned} \vec{D}_{S\vec{x}} &= (D_{Sx_1}, D_{Sx_2})^{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_S\left[\vec{X}\right], \\ \vec{D}_{I\vec{x}} &= (D_{Ix_1}, D_{Ix_2})^{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_I\left[\vec{X}\right], \end{aligned} \tag{7.38}$$

а *среднеквадратические отклонения границ* $\vec{\sigma}_{S\vec{x}}$, $\vec{\sigma}_{I\vec{x}}$ — векторами

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{S\vec{x}} &= (\sigma_{Sx_1}, \sigma_{Sx_2})^{\mathrm{T}} = \left(\sqrt{D_{Sx_1}}, \sqrt{D_{Sx_2}}\right)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{\sigma}_{I\vec{x}} &= (\sigma_{Ix_1}, \sigma_{Ix_2})^{\mathrm{T}} = \left(\sqrt{D_{Ix_1}}, \sqrt{D_{Ix_2}}\right)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{7.39}$$

где m_{Sx_1}, m_{Ix_1} и m_{Sx_2}, m_{Ix_2} — математические ожидания границ соответственно гиперслучайных величин X_1 и X_2, D_{Sx_1}, D_{Ix_1} и D_{Sx_2}, D_{Ix_2} — дисперсии границ этих величин, а σ_{Sx_1}, σ_{Ix_1} и σ_{Sx_2}, σ_{Ix_2} — среднеквадратические отклонения границ этих величин.

Корреляционные моменты границ $K_{Sx_1x_2}$, $K_{Ix_1x_2}$ описываются выражениями

$$\begin{aligned} K_{Sx_1x_2} &= \mathrm{M}_S\left[X_1 X_2\right], \\ K_{Ix_1x_2} &= \mathrm{M}_I\left[X_1 X_2\right], \end{aligned} \tag{7.40}$$

ковариационные моменты границ $R_{Sx_1x_2}$ и $R_{Ix_1x_2}$ — выражениями

$$R_{Sx_1x_2} = \mathrm{M}_S\left[(X_1 - m_{Sx_1})(X_2 - m_{Sx_2})\right],$$
$$R_{Ix_1x_2} = \mathrm{M}_I\left[(X_1 - m_{Ix_1})(X_2 - m_{Ix_2})\right], \quad (7.41)$$

а коэффициенты корреляции границ $r_{Sx_1x_2}$, $r_{Ix_1x_2}$ — выражениями

$$r_{Sx_1x_2} = \frac{R_{Sx_1x_2}}{\sigma_{Sx_1}\sigma_{Sx_2}}, \qquad r_{Ix_1x_2} = \frac{R_{Ix_1x_2}}{\sigma_{Ix_1}\sigma_{Ix_2}}. \quad (7.42)$$

Ковариационные моменты границ $R_{Sx_1x_2}$ и $R_{Ix_1x_2}$, корреляционные моменты границ $K_{Sx_1x_2}$ и $K_{Ix_1x_2}$, а также математические ожидания границ m_{Sx_1}, m_{Ix_1} и m_{Sx_2}, m_{Ix_2} гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$R_{Sx_1x_2} = K_{Sx_1x_2} - m_{Sx_1}m_{Sx_2},$$
$$R_{Ix_1x_2} = K_{Ix_1x_2} - m_{Ix_1}m_{Ix_2}, \quad (7.\ 43)$$

аналогичными соотношению (2.19) для случайных величин.

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 называются *некоррелированными*, если их ковариационные моменты границ равны нулю: $R_{Sx_1x_2} = R_{Ix_1x_2} = 0$. При этом $r_{Sx_1x_2} = r_{Ix_1x_2} = 0$ и согласно выражению (7.43) корреляционные моменты границ связаны следующими зависимостями с математическими ожиданиями границ:

$$K_{Sx_1x_2} = m_{Sx_1}m_{Sx_2}, \quad K_{Ix_1x_2} = m_{Ix_1}m_{Ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 называются *ортогональными*, если корреляционные моменты границ равны нулю: $K_{Sx_1x_2} = K_{Ix_1x_2} = 0$. При этом ковариационные моменты границ $R_{Sx_1x_2}$ и $R_{Ix_1x_2}$ связаны с математическими ожиданиями границ следующим образом:

$$R_{Sx_1x_2} = -m_{Sx_1}m_{Sx_2}, \quad R_{Ix_1x_2} = -m_{Ix_1}m_{Ix_2}.$$

Из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

7.3.3 Границы моментов векторной гиперслучайной величины

Для характеристики векторных гиперслучайных величин используют также границы различных моментов.

Для двумерной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ *границы математического ожидания* описываются векторами

$$\begin{aligned} \vec{m}_{s\vec{x}} &= \mathrm{M}_s[\vec{X}] = (m_{sx_1}, m_{sx_2})^{\mathrm{T}}, \\ \vec{m}_{i\vec{x}} &= \mathrm{M}_i[\vec{X}] = (m_{ix_1}, m_{ix_2})^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{7.44}$$

границы дисперсии — векторами

$$\vec{D}_{s\vec{x}} = (D_{sx_1}, D_{sx_2})^{\mathrm{T}}, \quad \vec{D}_{i\vec{x}} = (D_{ix_1}, D_{ix_2})^{\mathrm{T}}, \tag{7.45}$$

а *границы среднеквадратического отклонения* — векторами

$$\vec{\sigma}_{s\vec{x}} = (\sqrt{D_{sx_1}}, \sqrt{D_{sx_2}})^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\sigma}_{i\vec{x}} = (\sqrt{D_{ix_1}}, \sqrt{D_{ix_2}})^{\mathrm{T}}, \tag{7.46}$$

где m_{sx_1}, m_{ix_1} и m_{sx_2}, m_{ix_2} — границы математических ожиданий соответственно гиперслучайных величин X_1 и X_2, а D_{sx_1}, D_{ix_1} и D_{sx_2}, D_{ix_2} — границы дисперсий этих величин.

Границы корреляционного момента $K_{sx_1x_2}$, $K_{ix_1x_2}$ описываются выражениями

$$K_{sx_1x_2} = \sup_{g \in G} K_{x_1x_2/g}, \quad K_{ix_1x_2} = \inf_{g \in G} K_{x_1x_2/g}, \tag{7.47}$$

границы ковариационного момента $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$ — выражениями

$$R_{sx_1x_2} = \sup_{g \in G} R_{x_1x_2/g}, \quad R_{ix_1x_2} = \inf_{g \in G} R_{x_1x_2/g}, \tag{7.48}$$

а *границы коэффициента корреляции* $r_{sx_1x_2}$ и $r_{ix_1x_2}$ — выражениями

$$r_{sx_1x_2} = \sup_{g \in G} \frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}, \quad r_{ix_1x_2} = \inf_{g \in G} \frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}. \tag{7.49}$$

Границы моментов находятся в результате отбора экстремальных значений моментов из множества значений, соответствующих разным условиям $g \in G$. При этом границам разных моментов соответствуют в общем случае разные условия g. Поэтому в общем случае границы ковариационного момента

$$R_{sx_1x_2} \neq K_{sx_1x_2} - m_{sx_1} m_{sx_2}, \quad R_{ix_1x_2} \neq K_{ix_1x_2} - m_{ix_1} m_{ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 называются *некоррелированными при всех условиях*, если границы их ковариационных моментов $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 называются *ортогональными при всех условиях*, если границы их корреляционных моментов $K_{sx_1x_2}$ и $K_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы при всех условиях и условные законы распределения — гауссовские, то оси *эллипсов рассеяния* ориентированы вдоль осей координат.

Из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 при всех условиях следует их некоррелированность при всех условиях. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях *отличаются* от понятий некоррелированности и ортогональности, связанных с равенством нулю соответственно ковариационных и корреляционных моментов границ функции распределения.

Границы моментов не используют информацию о границах функции распределения. Поэтому их расчет требует, как правило, меньших вычислительных затрат, чем расчет моментов границ.

7.4 Операции над гиперслучайными величинами

Скалярные гиперслучайные величины X_1 и X_2, описываемые соответственно функциями распределения $\tilde{F}_{x_1}(x) = \{F_{x_1/g}(x), \quad g \in G\}$ и $\tilde{F}_{x_2}(x) = \{F_{x_2/g}(x), \quad g \in G\}$, считаются *равными при всех условиях*, если для всех условий $g \in G$ при одинаковых g совпадают их условные функции распределения: $F_{x_1/g}(x) = F_{x_2/g}(x)$ (см. п. 2.5).

Скалярные гиперслучайные величины X_1 и X_2, описываемые соответственно функциями распределения $\tilde{F}_{x_1}(x)$ и $\tilde{F}_{x_2}(x)$, считаются *равными*, если их верхние и нижние границы распределения совпадают: $F_{Sx_1}(x) = F_{Sx_2}(x)$, $F_{Ix_1}(x) = F_{Ix_2}(x)$.

Аналогично формализуется *равенство векторных гиперслучайных величин при всех условиях* и просто *равенство векторных гиперслучайных величин*.

При линейных и нелинейных преобразованиях параметры и характеристики гиперслучайных величин изменяются.

Параметры и характеристики преобразованных гиперслучайных величин сложным образом выражаются через параметры и характеристики исходных гиперслучайных величин. Подробно останавливаться на этом вопросе не будем, а отметим лишь основные результаты анализа различных способов представления гиперслучайных величин [Горбань 2014 (1)]:

- все способы представления гиперслучайных величин (с помощью условных функций распределения (условных плотностей распределения) и их моментов, границ функции распределения и их моментов и границ моментов распределения) могут быть эффективно использованы для описания преобразований скалярных гиперслучайных величин;
- для описания преобразований векторных гиперслучайных величин удобными оказываются способы представления величин с помощью условных функций распределения и условных моментов, а также с помощью границ моментов;
- возможности использования границ функции распределения и моментов границ для описания преобразований *векторных* гиперслучайных величин *ограничены*, что вызвано значительными вычислительными трудностями расчета характеристик и параметров границ преобразованной векторной гиперслучайной величины по данным исходной векторной гиперслучайной величины.

Глава 8 Гиперслучайные функции

Формализовано понятие гиперслучайной функции. Приведена классификация гиперслучайных функций. Представлены три способа описания гиперслучайного процесса: с помощью условных характеристик (в частности, условных функций распределения и условных моментов), границ функции распределения и их моментов, а также границ моментов. Дано определение стационарного гиперслучайного процесса. Представлен спектральный способ описания стационарных гиперслучайных процессов. Формализованы понятия эргодического гиперслучайного процесса и фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса. Приведены результаты анализа эффективности использования различных подходов к описанию гиперслучайных процессов.

8.1 Основные понятия

Представленные в предыдущей главе способы описания гиперслучайных величин могут быть использованы для описания гиперслучайных функций.

Гиперслучайной функцией $X(t)$ называется *многозначная числовая функция* независимого аргумента t, значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$ (где T — область определения аргумента) представляет собой гиперслучайную величину, называемую *сечением.* Множество значений всех сечений гиперслучайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й реализацией гиперслучайной функции $X(t)$ (*выборочной функцией*) называется детерминированная функция $x_{ig}(t) = x_i(t) / g = x_i(t; g)$, которая для фиксированного опыта $i \in I$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ и конкретным условиям $g \in G$ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайная функция может быть представлена *множеством случайных функций* $X_g(t) = X(t) / g = X(t; g)$: $X(t) = \{X_g(t), \quad g \in G\}$ (рис. 8.1).

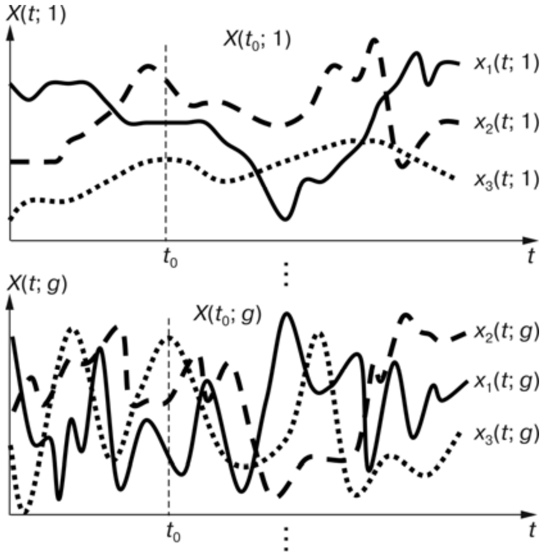


Рис. 8.1. Реализации гиперслучайной функции $X(t)$

Гиперслучайная функция имеет черты как гиперслучайной величины, так и детерминированной функции: при фиксации значения аргумента t превращается в гиперслучайную величину, а при фиксации опыта i и условий g — в детерминированную функцию.

Множество реализаций I гиперслучайной функции может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Размерность L области T определения аргумента t может быть разной. Если $L = 1$, то гиперслучайную функцию $X(t)$ называют *гиперслучайным процессом* и представляют множеством случайных процессов $X_g(t)$. При этом аргумент обычно ассоциируют со временем.

Если $L > 1$, то аргумент t — векторная величина. В этом случае функция $X(t)$ называется *гиперслучайным полем*. Такую гиперслучайную функцию можно представить множеством случайных полей $X_g(t)$.

Если пространство состояний одномерно, то гиперслучайная функция — *скалярная*, если размерность этого пространства больше единицы, то гиперслучайная функция — *векторная*. В первом случае гиперслучайная функция представляется множеством скалярных случайных функций, во втором — множеством векторных случайных функций.

Ограничимся рассмотрением скалярного гиперслучайного процесса.

8.2 Описание гиперслучайных процессов с помощью условных характеристик и моментов

Подобно тому, как *случайный процесс* может рассматриваться как *векторная случайная величина, гиперслучайный процесс* $X(t)$ может интерпретироваться как *векторная гиперслучайная величина.*

Как любую N -мерную векторную гиперслучайную величину, ее можно описать с помощью множества N -мерных *условных функций распределения* $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t}) = F_{\vec{x}/g}(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N)$ или N -мерных *условных плотностей распределения* $f_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t}) = = f_{\vec{x}/g}(x_1,\ldots,x_N;t_1,\ldots,t_N)$, где $g \in G$.

В этих выражениях по аналогии с тем, как это принято при описании вероятностных характеристик случайных процессов, после указания множества сечений $x_1,\ldots,x_N$ (вектора $\vec{x}$) через точку с запятой указывается множество значений $t_1,\ldots,t_N$ (вектор $\vec{t}$), к которым эти сечения относятся.

Условные функции распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$ могут быть охарактеризованы центральными и нецентральными моментами случайных функций $X_g(t)$ ($g \in G$), в частности, *условными математическими ожиданиями*

$$m_{x/g}(t) = \mathrm{M}[X_g(t)],$$

условными дисперсиями

$$D_{x/g}(t) = \mathrm{D}[X_g(t)] = \mathrm{M}[(X_g(t) - m_{x/g}(t))^2],$$

условными корреляционными функциями

$$K_{x/g}(t_1,t_2) = \mathrm{M}[X_g(t_1)X_g(t_2)],$$

условными ковариационными функциями

$$R_{x/g}(t_1,t_2) = \mathrm{M}[(X_g(t_1) - m_{x/g}(t_1))(X_g(t_2) - m_{x/g}(t_2))],$$

и пр.

Для описания гиперслучайного процесса $X(t)$ используют также границы распределения и их моменты.

8.3 Описание гиперслучайных процессов с помощью границ распределения и их моментов

К числу вероятностных характеристик гиперслучайного процесса $X(t)$ относят *границы функции распределения* $F_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})$, $F_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})$ и соответствующие им *плотности распределения границ* $f_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})$, $f_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t})$.

Ширина *области неопределенности* определяется функцией

$$\Delta F_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = F_{S\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) - F_{I\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) .$$

Для случайных процессов эта функция равна нулю. При полной *неопределенности* $\Delta F_{\vec{x}}(\vec{x};\vec{t}) = 1$.

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайного процесса* $X(t)$ называются *независимыми,* если соответствующие двумерные плотности распределения границ $f_{S\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ и $f_{I\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ факторизуются:

$$\begin{aligned} f_{S\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{Sx_1}(x_1; t_1) f_{Sx_2}(x_2; t_2), \\ f_{I\vec{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{Ix_1}(x_1; t_1) f_{Ix_2}(x_2; t_2), \end{aligned} \tag{8.1}$$

Математические ожидания границ гиперслучайного процесса $X(t)$ описываются выражениями

$$m_{Sx}(t) = \mathrm{M}_S[X(t)], \quad m_{Ix}(t) = \mathrm{M}_I[X(t)], \tag{8.2}$$

дисперсии границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$ — формулами

$$D_{Sx}(t) = \mathrm{D}_S[X(t)] \quad D_{Ix}(t) = \mathrm{D}_I[X(t)], \tag{8.3}$$

а *среднеквадратические отклонения границ* (*СКО*) — соотношениями

$$\sigma_{Sx}(t) = \sqrt{D_{Sx}(t)}, \quad \sigma_{Ix}(t) = \sqrt{D_{Ix}(t)}. \tag{8.4}$$

Математические ожидания границ $m_{Sx}(t)$, $m_{Ix}(t)$ характеризуют средние значения гиперслучайного процесса $X(t)$, рассчитанные для верхней и нижней границ функции распределения, а дисперсии границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$ и СКО границ $\sigma_{Sx}(t)$, $\sigma_{Ix}(t)$ — разброс этой гиперслучайной функции относительно соответствующих математических ожиданий $m_{Sx}(t)$ и $m_{Ix}(t)$.

Нетрудно убедиться, что $m_{Sx}(t) \le m_{Ix}(t)$, а соотношение между дисперсиями границ $D_{Sx}(t)$ и $D_{Ix}(t)$ может быть любым.

Корреляционными функциями границ гиперслучайного процесса называются функции

$$\begin{aligned} K_{Sx}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)], \\ K_{Ix}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)], \end{aligned} \tag{8.5}$$

а *ковариационными функциями границ* — функции

$$\begin{aligned} R_{Sx}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_S[(X(t_1)-m_{Sx}(t_1))(X(t_2)-m_{Sx}(t_2))], \\ R_{Ix}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_I[(X(t_1)-m_{Ix}(t_1))(X(t_2)-m_{Ix}(t_2))]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Ковариационные и корреляционные функции границ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} R_{Sx}(t_1,t_2) &= K_{Sx}(t_1,t_2) - m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2), \\ R_{Ix}(t_1,t_2) &= K_{Ix}(t_1,t_2) - m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Ковариационные и корреляционные функции границ, а также *нормированные ковариационные функции границ*

$$r_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1,t_2)}{\sigma_{Sx}(t_1)\sigma_{Sx}(t_2)}, \quad r_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ix}(t_1,t_2)}{\sigma_{Ix}(t_1)\sigma_{Ix}(t_2)} \tag{8.8}$$

характеризуют взаимозависимость сечений гиперслучайного процесса.

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайного процесса* $X(t)$ называются *некоррелированными*, если для этих сечений *ковариационные функции границ* $R_{Sx}(t_1,t_2) = R_{Ix}(t_1,t_2) = 0$, *ортогональными*, если для них *корреляционные функции границ* $K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Ix}(t_1,t_2) = 0$.

При отсутствии корреляции

$$\begin{aligned} K_{Sx}(t_1,t_2) &= m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2), \\ K_{Ix}(t_1,t_2) &= m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2), \end{aligned}$$

а при наличии ортогональности

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = -m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2),$$
$$R_{Ix}(t_1,t_2) = -m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2).$$

Понятия независимости, некоррелированности и ортогональности сечений гиперслучайного процесса, как видим, аналогичны таким же понятиям случайного процесса.

Если сечения гиперслучайного процесса коррелированные, то они *зависимы*. Обратное утверждение *неверно*. Если сечения независимые, то они некоррелированные. Если сечения ортогональные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми, как коррелированными, так и некоррелированными. Если математические ожидания границ хотя бы одного из двух рассматриваемых сечений равны нулю, то из ортогональности сечений следует их некоррелированность, а из некоррелированности — их ортогональность.

8.4 Описание гиперслучайных процессов с помощью границ моментов

Для описания гиперслучайного процесса используют также другие характеристики, аналогичные рассмотренным для гиперслучайных величин, в частности границы моментов.

Границы математического ожидания

$$m_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[X(t)] = \sup_{g\in G} m_{x/g}(t),$$
$$m_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[X(t)] = \inf_{g\in G} m_{x/g}(t),$$

а *границы дисперсии*

$$D_{sx}(t) = \sup_{g\in G} D_{x/g}(t),$$
$$D_{ix}(t) = \inf_{g\in G} D_{x/g}(t).$$

Границы корреляционной функции

$$K_{sx}(t_1,t_2) = \sup_{g\in G} K_{x/g}(t_1,t_2),$$
$$K_{ix}(t_1,t_2) = \inf_{g\in G} K_{x/g}(t_1,t_2),$$

а *границы ковариационной функции*

$$R_{sx}(t_1,t_2) = \sup_{g \in G} R_{x/g}(t_1,t_2),$$
$$R_{ix}(t_1,t_2) = \inf_{g \in G} R_{x/g}(t_1,t_2).$$

Обратим внимание, что границы корреляционной функции, границы ковариационной функции и границы математического ожидания могут соответствовать различным условиям g. Поэтому в общем случае

$$R_{sx}(t_1,t_2) \neq K_{sx}(t_1,t_2) - m_{sx}(t_1)m_{sx}(t_2),$$
$$R_{ix}(t_1,t_2) \neq K_{ix}(t_1,t_2) - m_{ix}(t_1)m_{ix}(t_2).$$

Сечения гиперслучайного процесса $X(t)$ в моменты t_1, t_2 называются *некоррелированными при всех условиях,* если $R_{sx}(t_1,t_2) = R_{ix}(t_1,t_2) = 0$, и *ортогональными при всех условиях*, если $K_{sx}(t_1,t_2) = K_{ix}(t_1,t_2) = 0$.

Заметим, что понятия некоррелированности и ортогональности отсчетов гиперслучайного процесса *отличаются* от приведенных здесь понятий.

Из некоррелированности и ортогональности отсчетов не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность при всех условиях. В общем случае и из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность.

Следует также обратить внимание, что множество границ всех моментов *неоднозначно* определяет границы распределения.

8.5 Стационарные гиперслучайные процессы

Известные для случайных процессов понятия стационарности и эргодичности допускают обобщение на гиперслучайные процессы.

Применительно к гиперслучайным процессам различают стационарность в узком и широком смыслах для всех условий, а также просто стационарность в узком и широком смыслах.

Гиперслучайный процесс $X(t) = \{X_g(t), \quad g \in G\}$ называется *стационарной в узком смысле при всех условиях* $g \in G$, если при всех g его компоненты $X_g(t)$ — случайные процессы, стационарные в узком смысле.

Одномерные условные вероятностные характеристики стационарного при всех условиях гиперслучайного процесса не зависят от времени, в частности одномерные условные функции распределения $F_{x/g}(x;t) = F_{x/g}(x)$ и условные плотности распределения $f_{x/g}(x;t) = f_{x/g}(x)$.

Гиперслучайный процесс $X(t) = \{X_g(t), \quad g \in G\}$ называется *стационарным в широком смысле при всех условиях* $g \in G$, если при любом фиксированном условии g условное математическое ожидание $m_{x/g}(t)$ не зависит от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$), а условная корреляционная функция $K_{x/g}(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности значений аргумента t и условий g: $K_{x/g}(t_1, t_2) = K_{x/g}(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Отметим, что при этом условная ковариационная функция $R_{x/g}(t_1, t_2)$ также зависит только от величин τ и g.

Границы математического ожидания $m_{sx}(t)$ и $m_{ix}(t)$ стационарного в широком смысле при всех условиях g гиперслучайного процесса не зависят от времени t, т. е. $m_{sx}(t) = m_{sx}$, $m_{ix}(t) = m_{ix}$, а границы корреляционной функции

$$K_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{x/g}(\tau), \quad K_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{x/g}(\tau)$$

и границы ковариационной функции

$$R_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} R_{x/g}(\tau), \quad R_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} R_{x/g}(\tau)$$

зависят только от величины τ.

Гиперслучайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если границы его N-мерных распределений при любом N зависят только от длительности интервалов $t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Гиперслучайные процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются *нестационарными в узком смысле.*

У стационарного гиперслучайного процесса границы многомерной функции распределения и многомерные плотности распределения границ не зависят от смещения по t. Кроме того, одномерные вероятностные характеристики границ не зависят от аргумента t, а двумерные характеристики границ зависят от разности $\tau = t_2 - t_1$ значений аргумента t, т. е.

$$f_{Sx}(x;t) = f_{Sx}(x), \quad f_{Ix}(x;t) = f_{Ix}(x),$$

$$f_{Sx}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{Sx}(x_1,x_2;\tau), \quad f_{Ix}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{Ix}(x_1,x_2;\tau).$$

Моментные функции границ стационарного гиперслучайного процесса $X(t)$ обладают следующими свойствами: математические ожидания границ и дисперсии границ постоянны ($m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix}$, $D_{Sx}(t) = D_{Sx}$, $D_{Ix}(t) = D_{Ix}$), а корреляционные функции границ $K_{Sx}(t_1,t_2)$, $K_{Ix}(t_1,t_2)$, ковариационные функции границ $R_{Sx}(t_1,t_2)$, $R_{Ix}(t_1,t_2)$ и нормированные ковариационные функции границ $r_{Sx}(t_1,t_2)$, $r_{Ix}(t_1,t_2)$ не зависят от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси t:

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Sx}(\tau), \quad K_{Ix}(t_1,t_2) = K_{Ix}(\tau),$$
$$R_{Sx}(t_1,t_2) = R_{Sx}(\tau), \quad R_{Ix}(t_1,t_2) = R_{Ix}(\tau),$$
$$r_{Sx}(\tau) = R_{Sx}(\tau) / D_{Sx}, \quad r_{Ix}(\tau) = R_{Ix}(\tau) / D_{Ix}.$$

Гиперслучайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если математические ожидания его границ постоянны ($m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix}$), а корреляционные функции границ зависят только от разности значений аргумента t: $K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Sx}(\tau)$, $K_{Ix}(t_1,t_2) = K_{Ix}(\tau)$.

Следует обратить внимание, что понятия стационарного в широком смысле гиперслучайного процесса и процесса, стационарного в широком смысле при всех условиях, — *разные понятия*.

8.6 Спектральное описание стационарных гиперслучайных процессов

Спектральное представление гиперслучайных процессов в ряде случаев существенно облегчает их анализ. В первую очередь это касается функций, обладающих свойством стационарности.

Спектральными плотностями мощности (*энергетическими спектрами*) *верхней и нижней границ стационарного гиперслучайного процесса* $X(t)$ называются функции $S_{Sx}(f)$, $S_{Ix}(f)$, связанные с корреляционными функциями границ $K_{Sx}(f)$, $K_{Ix}(f)$ следующими соотношениями:

$$S_{Sx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Sx}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{Ix}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Ix}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$K_{Sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Sx}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ix}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ix}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

Спектральные плотности мощности границ гиперслучайного процесса обладают свойствами, характерными для спектральной плотности мощности случайного процесса.

Гиперслучайным белым шумом называется стационарный гиперслучайный процесс $N(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями границ, у которого спектральные плотности мощности границ представляют собой постоянные величины, т. е. $S_{Sn} = N_S/2$, $S_{In} = N_I/2$, где N_S, N_I — константы.

Корреляционные функции границ гиперслучайного белого шума описываются с помощью δ-функции следующим образом:

$$K_{Sn}(\tau) = N_S\delta(\tau)/2, \quad K_{In}(\tau) = N_I\delta(\tau)/2.$$

Отметим, что этими же выражениями описываются и *ковариационные функции границ* гиперслучайного белого шума.

Условный спектр мощности $S_{x/g}(f)$ *гиперслучайного процесса* $X(t)$ определяется как преобразование Фурье условной корреляционной функции $K_{x/g}(\tau)$:

$$S_{x/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{x/g}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $K_{x/g}(\tau)$ связана с $S_{x/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{x/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x/g}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

Границами энергетического спектра гиперслучайного процесса $X(t)$ называются следующие функции:

$$S_{sx}(f) = \sup_{g \in G} S_{x/g}(f), \quad S_{ix}(f) = \inf_{g \in G} S_{x/g}(f).$$

Гиперслучайным белым шумом при всех условиях называют стационарный при всех условиях гиперслучайный процесс $N(t)$, у которого условные математические ожидания равны нулю, а условные спектры мощности не зависят от частоты, т. е. $S_{n/g} = N_g/2$, где N_g — константа, в общем случае зависящая от условий g.

Условные корреляционные функции такого шума представляют собой δ-функции: $K_{n/g}(\tau) = N_g \delta(\tau)/2$. Этим же выражением описываются и их ковариационные функции $R_{n/g}(\tau)$.

8.7 Эргодические гиперслучайные процессы

Некоторые стационарные гиперслучайные процессы обладают свойством эргодичности.

Стационарный гиперслучайный процесс $X(t) = \{X_g(t), g \in G\}$ называется *эргодическим при всех условиях* g, если для всех g составляющие его случайные процессы $X_g(t)$ являются эргодическими.

В частности, *стационарный в широком смысле гиперслучайный процесс* $X(t)$ называется *эргодическим в широком смысле при всех условиях* g, если для всех $g \in G$ условное математическое ожидание $m_{x/g}$ совпадает с *условным средним по времени*

$$\bar{m}_{x/g} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_g(t) \mathrm{d} t, \tag{8.9}$$

рассчитанным для *любой реализации* $x_g(t)$ случайного процесса $X_g(t)$, а условная ковариационная функция $R_{x/g}(\tau)$ — с *условной автоковариационной функцией*

$$\bar{R}_{x/g}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x/g} \right) \left(x_g(t) - \bar{m}_{x/g} \right) \mathrm{d} t. \tag{8.10}$$

При этом условная корреляционная функция $K_{x/g}(\tau)$ совпадает с *условной автокорреляционной функцией* $\bar{K}_{x/g}(\tau)$, определяемой следующим образом:

$$\bar{R}_{x/g}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x_g(t+\tau) x_g(t) \mathrm{d}t \,.$$

На этом основании условные математические ожидания и условные ковариационные и корреляционные функции могут быть рассчитаны по формулам $m_{x/g} = \bar{m}_{x/g}$, $R_{x/g}(\tau) = \bar{R}_{x/g}(\tau)$, $K_{x/g}(\tau) = \bar{K}_{x/g}(\tau)$.

Если элементы множества G одинаковые, гиперслучайный эргодический процесс вырождается в случайный эргодический процесс.

Границами среднего по времени эргодического гиперслучайного процесса $X(t) = \left\{X_g(t),\, g \in G\right\}$ называются величины

$$\bar{m}_{sx} = \sup_{g\in G} \bar{m}_{x/g}, \quad \bar{m}_{ix} = \inf_{g\in G} \bar{m}_{x/g},$$

границами автокорреляционной функции — функции

$$\bar{K}_{sx}(\tau) = \sup_{g\in G} \bar{K}_{x/g}(\tau), \quad \bar{K}_{ix}(\tau) = \inf_{g\in G} \bar{K}_{x/g}(\tau),$$

а *границами автоковариационной функции* — функции

$$\bar{R}_{sx}(\tau) = \sup_{g\in G} \bar{R}_{x/g}(\tau), \quad \bar{R}_{ix}(\tau) = \inf_{g\in G} \bar{R}_{x/g}(\tau).$$

Границы среднего по времени $\bar{m}_{sx}$, $\bar{m}_{ix}$ эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$ равны соответствующим границам математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, границы автокорреляционной функции $\bar{K}_{sx}(\tau)$, $\bar{K}_{ix}(\tau)$ — соответствующим границам корреляционной функции $K_{sx}(\tau)$, $K_{ix}(\tau)$, а границы автоковариационной функции $\bar{R}_{sx}(\tau)$, $\bar{R}_{ix}(\tau)$ — соответствующим границам ковариационной функции $R_{sx}(\tau)$, $R_{ix}(\tau)$.

Вся информация о характеристиках *случайного эргодического процесса* содержится в любой его реализации. Это дает возможность вычислять моменты и другие характеристики по одной реализации.

К сожалению, для расчета характеристик *гиперслучайного эргодического процесса одной реализации недостаточно*. Необходимо множество реализаций — *по одной для каждых условий*. Это существенно усложняет расчеты.

Обойтись *одной реализацией можно* в том случае, когда гиперслучайный процесс проявляет свойства стационарности и эргодичности на *интервалах конечной длительности*. О таких гиперслучайных процессах идет речь в следующем пункте.

8.8 Фрагментарно-эргодические гиперслучайные процессы

Рассмотрим вспомогательный эргодический гиперслучайный процесс $U(t) = \{U_h(t), \quad h = 1, 2, \ldots, H\}$ со *стационарными эргодическими случайными составляющими* $U_h(t)$, описываемыми плотностями распределения $f_h(x)$, $h = \overline{1, H}$.

Пусть на интервалах конечной длительностью T *эти составляющие* $U_h(t)$ — *практически эргодические*, т. е. их характеристики могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации длительностью T.

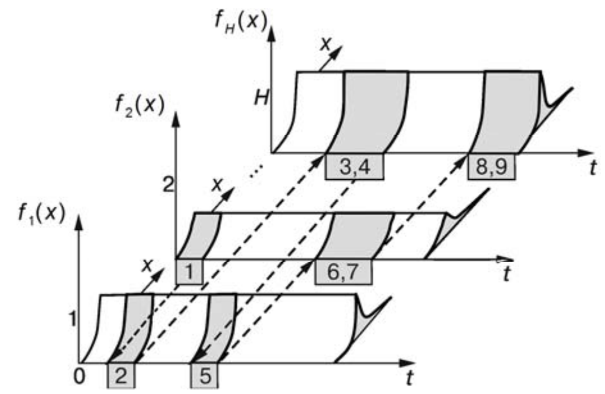


Рис. 8.2. Схема формирования одномерной плотности распределения $f_{x/g}(x;t)$ фрагментарно-эргодического случайного процесса $X_g(t)$ из плотностей распределения $f_h(x)$ вспомогательного эргодического гиперслучайного процесса $U(t) = \{U_h(t),\ h = 1, 2,\ \ldots, H\}$

Фрагментарно-эргодическим гиперслучайным процессом называется гиперслучайный процесс $X(t)=\{X_g(t),\quad g=1,2,\ldots,G\}$, каждая составляющая которого $X_g(t)$ при фиксированном g — фрагментарно-эргодический случайный процесс, сформированный из фрагментов эргодических случайных составляющих $U_h(t)$ длительностью T вспомогательного процесса $U(t)$ (рис. 8.2, 8.3).

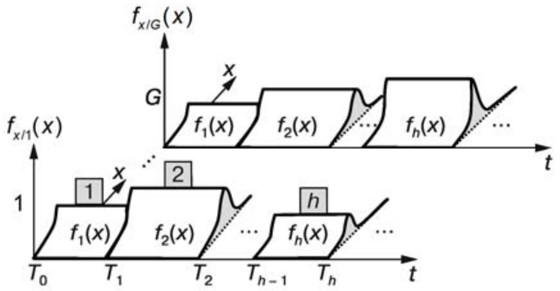


Рис. 8.3. Одномерные условные плотности распределения $f_{x/g}(x;t)$ фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса $X(t)=\{X_g(t),\quad g=1,2,\ldots,G\}$ с фрагментами, описываемыми плотностями распределения $f_h(x)$, $h=1,2,\ldots,H$

Каждая реализация фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса несет информацию о характеристиках *всех его фрагментов*. Поэтому для расчета характеристик такого процесса достаточно одной (любой) реализации.

Следует обратить внимание на то, что для *фрагментарно-эргодического случайного процесса* $X_g(t)$ (см. рис. 3.3) порядок следования плотностей распределений $f_h(x)$ *детерминирован*; для *фрагментарно-эргодического гиперслучайного процесса* (см. рис. 8.3), когда условия g фиксированы, этот порядок тоже *детерминирован*, однако, когда условия не фиксированы, порядок *не определен*.

8.9 Преобразование гиперслучайных процессов

В результате преобразования гиперслучайного процесса формируется гиперслучайный процесс, характеристики которого определяются характеристиками исходного процесса и характеристиками оператора преобразования.

На основе известной методики расчета характеристик случайных процессов при различных линейных, безынерционных и инерционных преобразованиях разработана аналогичная методика расчета характеристик гиперслучайных процессов. Читатели, интересующиеся этим вопросом, могут познакомиться с этой методикой по монографиям [Горбань 2011 (1), 2014 (1)].

Здесь же отметим лишь два основных результата анализа эффективности использования различных подходов к описанию гиперслучайных процессов:

- для описания безынерционных преобразований гиперслучайных процессов можно использовать формулы, описывающие преобразования векторных гиперслучайных величин;
- при инерционных преобразованиях основными способами представления гиперслучайных процессов являются условные моменты распределения (в первую очередь, условные математические ожидания и условные ковариационные функции), границы этих моментов, а также границы спектральной плотности мощности.

Глава 9 Основы математической статистики теории гиперслучайных явлений

Формализованы понятия гиперслучайной выборки и статистики гиперслучайной величины. Рассмотрены оценки характеристик гиперслучайных величин. Формализованы понятия обобщенного предела, сходимости в обобщенном смысле и спектра предельных точек. Определены понятия сходимости в обобщенном смысле последовательности гиперслучайных величин по вероятности и по функции распределения. Обобщены закон больших чисел и центральная предельная теорема. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие справедливость обобщенного закона больших чисел и обобщенной центральной предельной теоремы.

Математическая статистика обычно ассоциируется с теорией вероятностей и часто рассматривается как ее составная часть. До недавнего времени такой взгляд на статистику был вполне оправдан и не вызывал серьезных возражений.

Однако со временем стало очевидно, что математическая статистика не ограничивается рамками лишь теории вероятностей. Она применима, в частности, в теории гиперслучайных явлений. Выяснилось, что при большом объеме данных гиперслучайные статистические модели, учитывающие нарушения статистической устойчивости, обеспечивают существенно более адекватное описание реальности, чем их случайные статистические аналоги.

Настоящая глава посвящена изложению основ математической статистики гиперслучайных явлений.

9.1 Выборка гиперслучайной величины

Основные понятия математической статистики теории гиперслучайных явлений базируются на понятиях математической статистики теории вероятностей.

Начнем с математической статистики применительно к *скалярной гиперслучайной величине*, представляющей собой *множество скалярных случайных величин* $X_g = X / g$, наблюдаемых в условиях $g \in G$: $X = \left\{X_g,\ g \in G\right\}$.

Генеральной совокупностью гиперслучайной величины $X = \left\{X_g,\ g \in G\right\}$ называется бесконечное множество всех ее *реали-*

заций (*членов* или *элементов*), *наблюдаемых во всех условиях* $g \in G$. Это множество может быть как счетным, так и несчетным.

Из определения следует, что генеральная совокупность гиперслучайной величины X представляет собой объединение генеральных совокупностей всех ее *случайных составляющих* X_g, $g \in G$.

Генеральную совокупность можно описать с помощью *многозначной функции распределения* $\tilde{F}_x(x)$ гиперслучайной величины X, множества условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ ($g \in G$), верхней и нижней границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моментов границ, границ моментов и других характеристик.

Множество членов генеральной совокупности

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_N) = \left\{x_{1g}, \ldots, x_{Ng},\ g \in G\right\} = \left\{\vec{x}_g,\ g \in G\right\}$$

гиперслучайной величины X, полученное при конечном числе N опытов в различных нефиксированных или фиксированных условиях $g \in G$, называется *выборкой из генеральной совокупности*, а ее элементы $x_1, ..., x_N$ или $x_{1g}, \ldots, x_{Ng}$ — *выборочными значениями* или *реализациями*.

Без конкретизации условий g каждое выборочное значение x_n ($n = \overline{1, N}$) представляет собой *множество детерминированных величин* (*множество чисел*), а при конкретизации условий g каждое выборочное значение x_{ng} — *детерминированную величину* (*число*).

Полагают, что выборка $x_1, ..., x_N$ принадлежит гиперслучайной величине $X = \left\{X_g,\ g \in G\right\}$ с условными функциями распределения $F_{x/g}(x)$, $g \in G$, если она получена из генеральной совокупности, описываемой при фиксированных условиях g функцией распределения $F_{x/g}(x)$.

Бесконечное множество выборок $\vec{x} = (x_1, ..., x_N)$ объемом N, сформированных из одной генеральной совокупности, образует N-мерный *гиперслучайный вектор*

$$\vec{X} = (X_1, ..., X_N) = \left\{X_{1g}, \ldots, X_{Ng},\ g \in G\right\} = \left\{\vec{X}_g,\ g \in G\right\},$$

называемый *гиперслучайной выборкой* или *выборочной совокупностью*, а бесконечное число выборок $\vec{x}_g = (x_{1g}, \ldots, x_{Ng})$ объемом N, сформированных из одной генеральной совокупности в конкретных условиях g, образует N-мерный *случайный вектор* $\vec{X}_g = (X_{1g}, \ldots, X_{Ng})$.

Обычно полагают, что все элементы гиперслучайного вектора описываются одной и той же *многозначной функцией распределения* $\tilde{F}_x(x)$, а каждая компонента X_{ng} $(n = \overline{1, N})$ случайного вектора $\vec{X}_g$, соответствующая конкретным условиям g, — одной и той же *однозначной функцией распределения* $F_{x/g}(x)$ (или плотностью распределения $f_{x/g}(x)$, рис. 9.1 **а**).

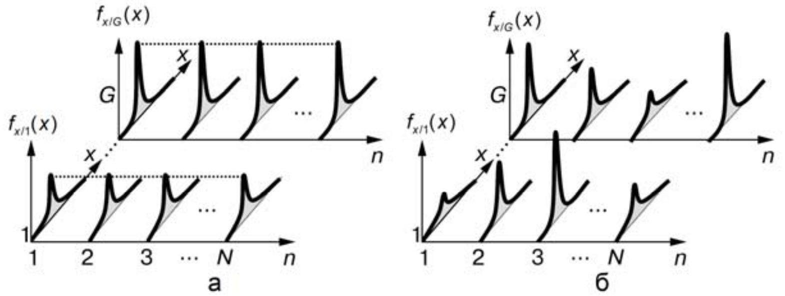


Рис. 9.1. Плотности распределения случайных компонент $X_{1g}, \ldots, X_{Ng}$, $g = 1, \ldots, G$ гиперслучайной выборки $\vec{X} = \{X_{1g}, \ldots, X_{Ng}, g = 1, \ldots, G\}$: однородной (**а**) и неоднородной (**б**)

Кроме описанной *однородной модели гиперслучайной выборки* иногда используют другую, *неоднородную*, модель, в которой случайные компоненты X_{ng} гиперслучайной выборки $\vec{X}$ имеют разные законы распределения (рис. 9.1 **б**).

Компоненты X_n гиперслучайной выборки $\vec{X}$ обычно полагают взаимно независимыми при всех условиях. Тогда условная функция распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $g \in G$ факторизуется: $F_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_{x/g}(x_n)$.

В теории гиперслучайных явлений *статистикой* называют любую функцию *гиперслучайной* выборки $\vec{X}$, *случайной* выборки $\vec{X}_g$ в фиксированных условиях $g \in G$, *детерминированной многозначной* выборки $\vec{x}$, а также *детерминированной однозначной* выборки $\vec{x}_g$ в фиксированных условиях $g \in G$.

9.2 Оценки характеристик и параметров гиперслучайной величины

9.2.1 Общие соображения

По генеральной совокупности гиперслучайной величины теоретически можно вычислить различные ее *точные детерминированные характеристики и параметры*, например, условные функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, условные математические ожидания $m_{x/g}$, математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, границы математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, условные дисперсии $D_{x/g}$, дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, границы дисперсии D_{sx}, D_{ix} и пр.

По реализациям с использованием определенных статистик можно вычислить *приближенные оценки* этих же характеристик, в частности, оценки условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценки границ функции распределения $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, оценки условных математических ожиданий $m^*_{x/g}$, оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки границ математического ожидания m^*_{sx}, m^*_{ix}, оценки условных дисперсий $D^*_{x/g}$, оценки дисперсии границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, оценки границ дисперсии D^*_{sx}, D^*_{ix} и др.

Если *выборка гиперслучайная*, то эти оценки — *гиперслучайные*, если же *выборка детерминированная*, то оценки — *детерминированные*.

9.2.2 Методика формирования оценок

Процедура формирования оценок может строиться по следующей схеме. Для всего множества G условий g формируются выборки $x_{1g},\ldots,x_{Ng}$.

Для каждых условий g по выборке $\vec{x}_g = (x_{1g},\ldots,x_{Ng})$ рассчитываются оценки условных характеристик и параметров: оценка условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценка условного математического ожидания $m^*_{x/g}$, оценка условной дисперсии $D^*_{x/g}$ и др.

По оценкам условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$ для всех $g \in G$ вычисляются оценки границ функции распределения:

$$F^*_{Sx}(x) = \sup_{g \in G} F^*_{x/g}(x), \quad F^*_{Ix}(x) = \inf_{g \in G} F^*_{x/g}(x)$$

и оценки характеристик, характеризующие эти границы: оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки дисперсий границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix} и пр.

По оценкам условных величин определяются оценки границ соответствующих величин, например, по оценкам математических ожиданий $m^*_{x/g}$ — оценки границ математического ожидания $m^*_{sx} = \sup_{g \in G} m^*_{x/g}$, $m^*_{ix} = \inf_{g \in G} m^*_{x/g}$, по оценкам условных дисперсий $D^*_{x/g}$ — оценки границ дисперсии $D^*_{sx} = \sup_{g \in G} D^*_{x/g}$, $D^*_{ix} = \inf_{g \in G} D^*_{x/g}$ и т. д.

Определенные трудности можно ожидать при формировании требуемой выборки $\vec{x} = \{\vec{x}_g,\ g \in G\}$ *из-за сложности обеспечения, контроля и поддержания условий* g. Однако вопрос облегчается тем, что часто реальные выборки обладают *эргодичными свойствами* и для расчета ряда искомых характеристик *не требуется* информация о том, в каких именно условиях получены условные характеристики.

Главное, чтобы на уровне условных характеристик были представлены все возможные условия g множества G и в массив данных, используемый для расчета условных характеристик в конкретных условиях, *не попадали данные*, соответствующие другим условиям.

Обычно при наличии *одной длинной реальной выборки* последнее требование можно обеспечить, поскольку закон распределения, хотя и изменяется зачастую непрерывно, но *изменяется медленно*, и на основе наблюдения за физическим явлением удается определить примерное число последовательных элементов выборки N_s, для которых плотность распределения остается *практически неизменной* (рис. 9.2).

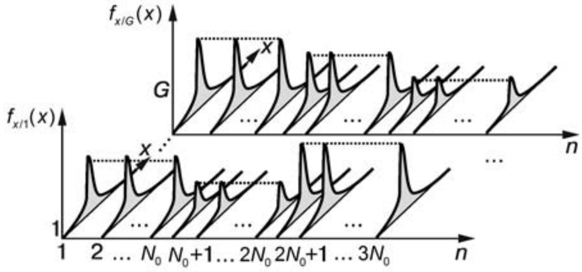


Рис. 9.2. Плотности распределения случайных компонент $X_{1g},\ldots,X_{Ng}$, $g=1,\ldots,G$ неоднородной гиперслучайной выборки $\vec{X}=\{X_{1g},\ldots,X_{Ng},\quad g=1,\ldots,G\}$ при медленном изменении закона распределения

Это позволяет собирать данные на интервале наблюдения, не заботясь о том, каковы в конкретный момент времени условия и в какой последовательности они чередуются. Далее полученные данные можно разделять на фрагменты по N_s последовательных элементов и использовать для расчета искомых оценок. Главное при таком подходе — обеспечить охват всех возможных условий наблюдения.

Естественно возникает ряд вопросов: при каких условиях *гиперслучайные оценки* сходятся к точным характеристикам и параметрам, какого типа эти параметры и характеристики и какой их закон распределения? Ответы на эти вопросы дает *обобщенный закон больших чисел* и *обобщенная центральная предельная теорема.*

Для понимания этого материала необходимо познакомиться с некоторыми новыми математическими понятиями, такими как *обобщенный предел* и *сходимость последовательностей в обобщенном смысле.*

9.3 Обобщенный предел и сходимость последовательностей в обобщенном смысле

Результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения реальных процессов разной физической природы показывают (см. п. 6.3), что реальные оценки не проявляют тенденции стремления ни к определенным конечным пределам, ни к бесконечности. При увеличении объема выборки они флуктуируют в определенных интервалах.

Такое поведение оценок можно описать математически с помощью расходящихся последовательностей.

Остановимся вкратце на математическом аппарате исследования расходящихся последовательностей.

9.3.1 Обобщенный предел

Согласно классическим представлениям, *числовая последовательность* $x_1, x_2, ..., x_n$ считается *сходящейся*, если существует *необходимо единственный предел* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (см. п. 4.2.1). Последовательность, не имеющая предела, считается *расходящейся.*

Примерами расходящейся числовой последовательности могут служить последовательности $1,-1,1,-1,\ldots$ и $1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,\ldots$ (рис. 9.3).

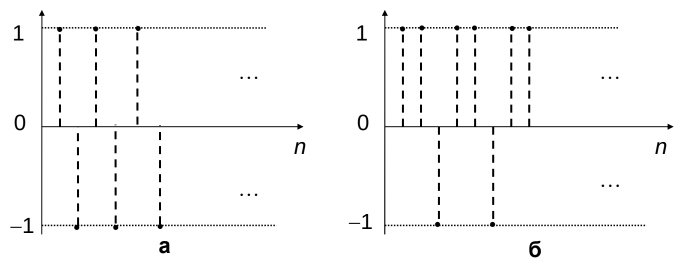


Рис. 9.3. Примеры расходящихся числовых последовательностей: $1,-1,1,-1,\ldots$ и $1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,\ldots$ (соответственно **а** и **б**)

Заметим, что для наглядности выбраны примеры последовательностей с повторяющимися членами. Однако все приводимые далее в этом пункте рассуждения справедливы и для расходящихся последовательностей, у которых члены не повторяются.

Из любой бесконечной последовательности можно сформировать множество *частичных последовательностей* (*подпоследовательностей*), получаемых из исходной последовательности путем отбрасывания части ее членов *при сохранении порядка следования* оставшихся ее членов.

Доказано, что в случае, когда последовательность сходится, сходятся все ее частичные последовательности. Если же последовательность расходится, то необязательно расходятся все ее частичные последовательности. Некоторые из них могут сходиться к определенным пределам a_m, $m = 1, 2, \ldots$ (*предельным точкам*).

Множество всех предельных точек последовательности $x_1, x_2, ..., x_n$, называемых также *частичными пределами*, образуют *спектр предельных точек* $\tilde{S}_x$.

Спектр предельных точек $\tilde{S}_x$ представляет собой обобщение понятия предела на случай любой последовательности, в том числе расходящейся. Если последовательность сходится, то спектр предельных точек состоит из одного элемента (числа), если же она расходится, то он состоит из множества чисел.

Спектр предельных точек можно описать выражением

$$\tilde{S}_x = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n, \tag{9.1}$$

где, в отличие от обычного предела $\lim\limits_{n\to\infty}$, используется символ *обобщенного предела* $\operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty}$.

Спектры предельных точек, к примеру, последовательностей $1, -1, 1, -1, \ldots$ и $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots$ состоят из двух частичных пределов, равных -1 и $+1$.

Выражение (9.1) можно трактовать как *сходимость последовательности к спектру предельных точек*. Спектр может быть дискретным, непрерывным или смешанным — дискретно-непрерывным. Если спектр образует непрерывный интервал, то говорят, что *последовательность сходится к интервалу*.

Расходящуюся последовательность можно охарактеризовать не только спектром предельных точек, но и *множеством* (в общем случае) *мер*, описываемым *многозначной* (в общем случае) *функцией распределения предельных точек*

$$\tilde{F}_x(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{m_n(x)}{n}, \tag{9.2}$$

где $m_n(x)$ — количество членов последовательности $x_1, x_2, ..., x_n$, меньших x.

Если последовательность сходится в обычном смысле к числу a, то функция распределения предельных точек описывается однозначной функцией распределения $F_x(x)$ в виде функции единичного скачка в точке a (рис. 9.4 **а**) (тогда мера равна единице в точке $x = a$ и нулю во всех остальных точках).

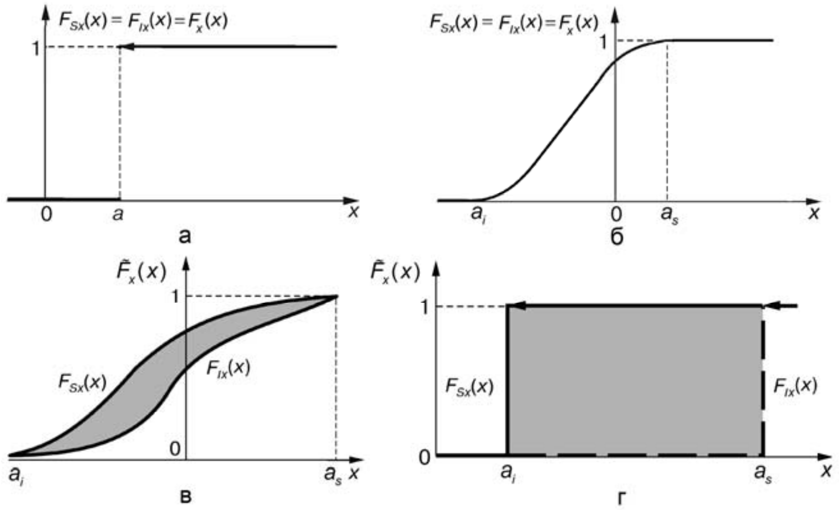


Рис. 9.4. Однозначные $F_x(x)$ (**а**, **б**) и многозначные $\tilde{F}_x(x)$ (**в**, **г**) функции распределения предельных точек и их границы $F_{Ix}(x)$, $F_{Sx}(x)$ для последовательностей, сходящихся к числу a (**а**) и к интервалу $[a_i, a_s]$ (**б—г**)

Если же эта последовательность расходится (сходится к множеству чисел (в частном случае сходится к интервалу)), то функция распределения представляет собой или однозначную неубывающую функцию $F_x(x)$, отличную от функции единичного скачка, (рис. 9.4 **б**), или многозначную функцию $\tilde{F}_x(x)$ (рис. 9.4 **в**).

Обратим внимание, что *частным случаем гиперслучайной величины* является *интервальная величина*, функция распределения которой описывается прямоугольником единичной высоты (рис. 9.4 **г**).

Когда функция распределения однозначная и спектр предельных точек дискретный, функция распределения описывается скачкообразной функцией (рис. 9.5).

Пользуясь терминологией теории гиперслучайных явлений, можно сказать, что *спектр предельных точек числовой последовательности* может быть

- *числом* (интерпретируемым множеством действительных чисел с единичной мерой в точке $x = a$ и нулевой мерой во всех остальных точках) (рис. 9.4 **а**),
- *случайной величиной* (рис. 9.4 **б**),
- *гиперслучайной величиной* (рис. 9.4 **в**) (в вырожденном случае *интервальной величиной* (рис. 9.4 **г**)).

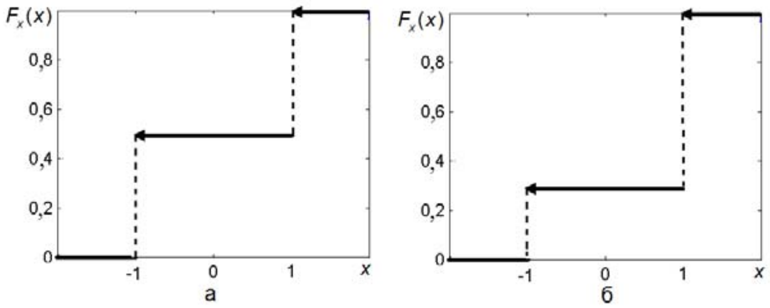


Рис. 9.5. Функции распределения $F_x(x)$ предельных точек последовательностей $1,-1,1,-1,\ldots$ и $1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,\ldots$ (соответственно **а** и **б**)

Иначе говоря, *числовая последовательность* может сходиться к *числу* или к *множеству чисел* (в частном случае к *интервалу*). В последнем случае спектр предельных точек может представлять собой или *случайную величину*, или *гиперслучайную величину*.

9.3.2 Сходимость последовательности гиперслучайных величин

По аналогии со сходимостью *последовательности случайных величин* (см. п. 4.2.3) в теории гиперслучайных явлений введено понятие *сходимости* (*в обобщенном смысле*) *последовательности гиперслучайных величин*. Различают сходимость *по функции распределения*, *в среднеквадратическом*, *почти наверное* (*с вероятностью единица*) и *по вероятности* (*по мере*).

Рассмотрим сходимость последовательности в обобщенном смысле по вероятности и по функции распределения.

Пусть имеется *последовательность гиперслучайных величин* $\mathrm{X} = X_1,\ldots,X_N$ и гиперслучайная величина X, где члены последовательности $X_n = \{X_{ng},\ g \in G\}$ ($n = \overline{1,N}$) и $X = \{X_g,\ g \in G\}$.

Для всех гиперслучайных величин $X_1,\ldots,X_N$ и X определены функции распределения $\tilde{F}_{x_1}(x) = \{F_{x_1/g}(x),\ g \in G\},\ldots$, $\tilde{F}_{x_N}(x) = \{F_{x_N/g}(x),\ g \in G\}$ и $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x),\ g \in G\}$.

Тогда последовательность гиперслучайных величин Χ сходится к гиперслучайной величине X *в обобщенном смысле по вероятности* $(P(|X_N - X| > \varepsilon) \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$

$$P(|X_{Ng} - X_g| > \varepsilon) \to 0, \tag{9.3}$$

т. е. для всех $g \in G$ случайная последовательность $X_{1g}, \ldots, X_{Ng}$ сходится по вероятности к случайной величине X_g.

Последовательность гиперслучайных величин Χ сходится к гиперслучайной величине X *в обобщенном смысле по функции распределения* ($\tilde{F}_{x_N}(x) \to \tilde{F}_x(x)$), если в каждой точке x, где $F_{x/g}(x)$ непрерывна, для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$

$$F_{x_N/g}(x) \to F_{x/g}(x). \tag{9.4}$$

Как и в случае последовательности случайных величин, сходимость по распределению *более слабая*, чем сходимость по вероятности, т. е. последовательности гиперслучайных величин, которые сходятся по вероятности, сходятся и по распределению. Обратное утверждение справедливо не всегда.

Из определений следует, что, также как и детерминированная последовательность, *гиперслучайная последовательность* может сходиться *к числу* (детерминированной величине, описываемой функцией распределения в виде функции единичного скачка), *к случайной величине* или *гиперслучайной величине*.

Очевидно, что *случайная последовательность* также *может сходиться к числу, случайной величине* или *гиперслучайной величине*.

Интересно проследить динамику изменения представлений о сходимости последовательностей (табл. 9.1) в рамках разных дисциплин (см. п.п. 4.2.1, 4.2.3, 9.3.1).

В классическом математическом анализе рассматриваются числовые последовательности, в которых в роли предела могут выступать только числа.

Теория вероятностей распространила идеи сходимости на случайные последовательности. Согласно теории вероятностей случайная последовательность может сходиться либо к числу, либо к случайной величине.

Таблица 9.1

Дисциплина	Последовательность	Предел (спектр предельных точек)		
Мат. анализ	числовая	число		
Теория вероятностей	случайная	число	случайная величина	
Теория гиперслучайных явлений	числовая случайная гиперслучайная	число	случайная величина	гиперслучайная величина

Теория гиперслучайных явлений ввела понятие обобщенного предела. Это существенно расширило рамки представлений о сходимости. Выяснилась возможность сходимости в обобщенном смысле числовых, случайных и гиперслучайных последовательностей. Оказалось, что любая из этих последовательностей может сходиться к числу, к случайной величине или к гиперслучайной величине.

Располагая необходимыми сведениями о возможности описания расходящихся последовательностей, рассмотрим *обобщенный закон больших чисел для случайных последовательностей.*

9.4 Обобщенный закон больших чисел

В типичной для теории вероятностей интерпретации закон больших чисел описывается выражением (4.4) (см. п. 4.3), смысл которого в том, что *случайное выборочное среднее* m^*_{xN} *случайных величин* $X_1, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к некоторому числу m_x, представляющему собой предел (обычный) среднего m_{xN} математических ожиданий $m_{x_1}, \ldots, m_{x_N}$ случайных величин $X_1, \ldots, X_N$.

Анализ доказательства этого утверждения (который приводить здесь не будем) показывает, что при доказательстве *не использовано предположение* о том, что выборочное среднее m^*_{xN} и среднее математических ожиданий m_{xN} имеют обычные пределы. Это означает, что последовательности $\{m^*_{xN}\} = m^*_{x1}, \ldots, m^*_{xN}$ и

$\{m_{xN}\} = m_{x1}, \ldots, m_{xN}$ *могут не иметь пределов в обычном смысле*, т. е. последовательности *могут быть расходящимися* .

Но если они не сходятся в обычном смысле, то могут *сходиться в обобщенном смысле к многозначным величинам*: случайным или гиперслучайным.

В дальнейшем, следуя указанной выше договоренности, касающейся обозначений однозначных и многозначных величин и функций, однозначные пределы последовательностей $\{m^*_{xN}\}$ и $\{m_{xN}\}$ будем обозначать m^*_x и m_x, а многозначные — со знаком тильда: $\tilde{m}^*_x$ и $\tilde{m}_x$.

Вне зависимости от того, являются ли рассматриваемые обобщенные пределы однозначными или многозначными, согласно выражению (4.3) по мере увеличения объема выборки N *выборочное среднее* m^*_{xN} *приближается к среднему математических ожиданий* m_{xN} .

При $N \to \infty$ возможны два случая:

1. Величина m^*_{xN} сходится к *однозначному* выборочному среднему математических ожиданий m_x (*числу*).

2. Величина m^*_{xN} , становясь в пределе *многозначной* величиной $\tilde{m}^*_x$, сходится к *многозначной величине* $\tilde{m}_x$.

Случай 1 — идеализированный, рассматриваемый в теории вероятностей. В этом случае предел m_x среднего математических ожиданий описывается функцией распределения $F_{m_x}(x)$ в виде функции единичного скачка в точке m_x. К ней стремится функция распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ выборочного среднего m^*_{xN} при $N \to \infty$ (рис. 9.6 **а**).

Случай 2 более реалистичен. Здесь предельное выборочное среднее $\tilde{m}^*_x$ и предельное среднее математических ожиданий $\tilde{m}_x$ описываются многозначными спектрами $\tilde{S}_{m^*_x}$ и $\tilde{S}_{m_x}$. При этом возможны два варианта:

2.1. Предельное выборочное среднее $\tilde{m}^*_x$ и предельное среднее математических ожиданий $\tilde{m}_x$ являются *случайными величинами*. Тогда спектры $\tilde{S}_{m^*_x}$ и $\tilde{S}_{m_x}$ характеризуются *однозначными функциями распределения* $F_{m^*_x}(x)$ и $F_{m_x}(x)$ (рис. 9.6 **б**).

2.2. Величины $\tilde{m}_x^*$, $\tilde{m}_x$ являются гиперслучайными величинами. Тогда спектры $\tilde{S}_{m_x^*}$ и $\tilde{S}_{m_x}$ характеризуются *многозначными функциями распределения* $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ и $\tilde{F}_{m_x}(x)$ (рис. 9.6 **в**).

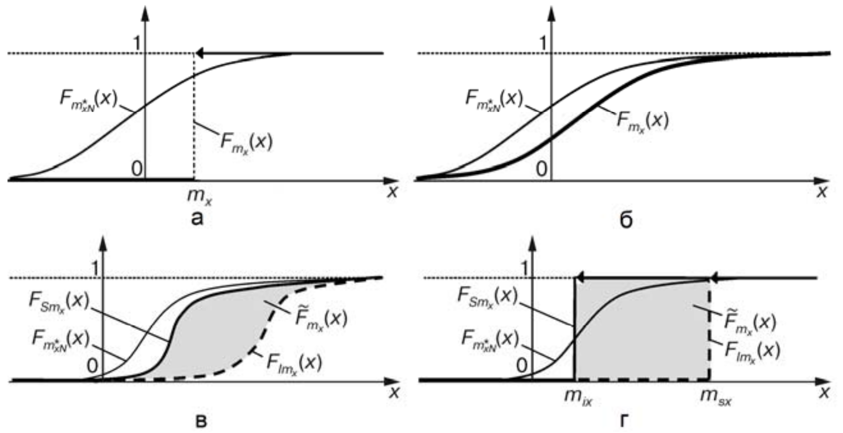


Рис. 9.6. Формирование предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$, когда предельные выборочное среднее и среднее математических ожиданий — числа (**а**), когда они — случайные величины (**б**) и когда они — гиперслучайные величины (**в**, **г**) (**в** — общий случай, **г** — частный случай)

Сходимость *по распределению последовательности случайных величин* менее сильная, чем сходимость *по вероятности*. Поэтому в варианте 2.1 предельная функция распределения $F_{m_x^*}(x)$ совпадает с предельной функцией распределения $F_{m_x}(x)$.

Сходимость *по распределению последовательности гиперслучайных величин* также менее сильная, чем сходимость *по вероятности*. Поэтому в варианте 2.2 предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ совпадает с предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$. При этом нижняя граница $F_{Im_x^*}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ совпадает с нижней границей $F_{Im_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$, а верхняя граница $F_{Sm_x^*}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ — с верхней границей $F_{Sm_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$.

На рис. 9.6 **в** расположенная между указанными границами область неопределенности затемнена.

Доказана теорема [Горбань 2014 (1, 4)], которая утверждает, что если функция распределения, описывающая спектр последовательности средних детерминированных величин, — многозначная функция, то соответствующая область неопределенности *непрерывная*. На этом основании *область неопределенности функции распределения* $\tilde{F}_{m_x}(x)$ *— непрерывная.*

Интервал, в котором флуктуирует выборочное среднее m_{xN}^* при $N \to \infty$, характеризуется нижней границей m_{ix}^* достижения функцией $F_{Sm_x^*}(x)$ минимального (нулевого) значения и верхней границей m_{sx}^* достижения функцией $F_{Im_x^*}(x)$ максимального (единичного) значения. Естественно, эти границы совпадают с соответствующими границами m_{ix}, m_{sx} функций $F_{Sm_x}(x)$, $F_{Im_x}(x)$: $m_{ix}^* = m_{ix}$, $m_{sx}^* = m_{sx}$. Указанные границы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Таким образом, теоретически среднее случайной выборки может сходиться к *определенному числу*, стремиться к *плюс или минус бесконечности* или *флуктуировать в пределах интервала* $[m_{ix}, m_{sx}]$.

В последнем случае можно говорить о *сходимости выборочного среднего к интервалу*.

Особый интерес представляют первый и третий случаи. В первом случае (не подтверждаемом экспериментально) при увеличении объема выборки флуктуации среднего затухают и стремятся к нулю; в третьем же случае (подтверждаемом экспериментально) — эти флуктуации не затухают и остаются в пределах интервала $[m_{ix}, m_{sx}]$.

9.5 Обобщенная центральная предельная теорема

Обратимся к центральной предельной теореме для *последовательности случайных величин* (см. п. 4.4) .

Используя описанную схему вывода равенства (4.6), можно показать, что при принятых в теореме допущениях справедливо более общее утверждение, а именно: разность между функцией распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ выборочного среднего m^*_{xN} и гауссовской функцией распределения $F(x/m_{xN}, D_{xN})$, описываемой выражением (4.5), сходится равномерно к нулю:

$$\lim_{N\to\infty}\left[F_{m^*_{xN}}(x) - F(x/m_{xN}, D_{xN})\right] = 0\,. \tag{9.5}$$

Между формулами (4.6) и (9.5) имеется существенное различие. Формула (4.6) предполагает наличие у выборочного среднего m^*_{xN} *однозначной* предельной функции распределения $F_{m^*_x}(x)$, к которой стремится функция $F_{m^*_{xN}}(x)$ при $N \to \infty$, и наличие *однозначной* предельной функции распределения $F_{m_x}(x) = F(x/m_x, D_x)$, к которой стремится функция $F(x/m_{xN}, D_{xN})$, где m_x и D_x — соответственно математическое ожидание и дисперсия предельной гауссовской функции распределения.

Формула же (9.5) допускает, что рассматриваемые предельные функции распределения в общем случае — *многозначные функции*.

Многозначность предельной функции распределения, к которой стремится функция $F(x/m_{xN}, D_{xN})$, может быть обусловлена многозначностью математического ожидания и (или) дисперсии. Поэтому в выражении $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$, представляющем предельную функцию распределения, фигурируют многозначные параметры $\tilde{m}_x$ и $\tilde{D}_x$. Поскольку эти параметры в общем случае гиперслучайные, гиперслучайной оказывается и функция $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Ее можно трактовать как множество однозначных гауссовских функций распределения с различными однозначными математическими ожиданиями $m_x \in \tilde{m}_x$ и дисперсиями $D_x \in \tilde{D}_x$.

Выражение (9.5) означает, что имеет место сходимость по распределению последовательности детерминированных функций $F_{m^*_{xN}}(x)$ к гиперслучайной функции $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Иными словами многозначные предельные функции распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$, $\tilde{F}(x/\tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$ описываются одинаковыми множествами однозначных функций распределения.

Когда $\tilde{m}_x = m_x$ и $\tilde{D}_x = D_x$ (т. е. оба параметра представляют собой числа), причем $D_x = 0$, предельная гауссовская функция распределения $F_{m_x}(x) = F(x / m_x, D_x)$ имеет вид функции единичного скачка, изображенной на рис. 9.6 **а** полужирной линией; когда $\tilde{m}_x = m_x$ и $\tilde{D}_x = D_x$, но $D_x \neq 0$, эта функция распределения имеет вид кривой, изображенный на рис. 9.6 **б** полужирной линией.

Когда предельное математическое ожидание $\tilde{m}_x$ — многозначная величина или когда и предельное математическое ожидание $\tilde{m}_x$, и предельная дисперсия $\tilde{D}_x$ — многозначные величины, предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$ — многозначная функция. На рис. 9.6 **в**, **г** она изображена в виде затемненной области.

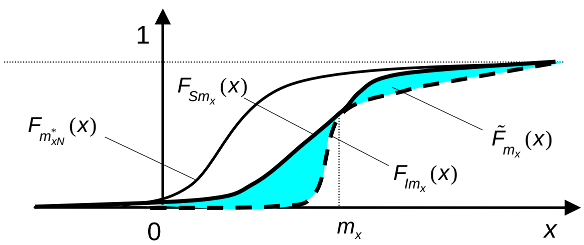


Рис. 9.7. Формирование предельной функции распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$, когда математическое ожидание m_x — число, а дисперсия $\tilde{D}_x$ — многозначная величина

Когда предельное математическое ожидание — число ($\tilde{m}_x = m_x$), а предельная дисперсия $\tilde{D}_x$ — многозначная величина, предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x / m_x, \tilde{D}_x)$ — многозначная функция. В этом случае она имеет определенную специфику: состоит из двух областей, соприкасающихся в одной точке (затемненные области на рис. 9.7). Абсцисса точки соприкосновения этих областей равна математическому ожиданию m_x.

9.6 Экспериментальные исследования реальных выборочных средних

Приведенные в п. п. 9.4 и 9.5 результаты теоретических исследований указывают на то, что при увеличении объема выборки выборочные средние *не обязательно нормализуются* (*т. е. не обязательно приобретают гауссовский характер*) *и стремятся к определенному фиксированному значению.* Этот результат в корне отличается от выводов классической теории вероятностей. В этой связи возникает чрезвычайно важный вопрос: как себя ведут *реальные выборочные средние*?

Для ответа на него в дополнение к описанным результатам экспериментальных исследований колебаний напряжения городской электросети (см. п. 6.3.1) и интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 (см. п. 6.3.7) приведем результаты экспериментальных исследований функций распределения указанных процессов.

Выбор для исследования именно этих процессов связан с желанием получить обобщенный результат, охватывающий процессы разной степени устойчивости. Как следует из п.п. 6.3.1 и 6.3.7, колебания напряжения сети — одно из наиболее *неустойчивых*, а колебания интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 — одно из наиболее *устойчивых колебаний.*

9.6.1 Дополнительные исследования колебаний напряжения городской электросети

Дополнительные исследования колебаний напряжения электросети проводилось с использованием 60-часовой записи (рис. 1.8 **а**), по которой проводились расчеты в п. 6.3.1.

Исследования сводились к расчету и анализу оценок функций распределения колебания напряжения $F_g^*(x)$ на прилегающих друг к другу интервалах наблюдения длительностью около часа ($g=\overline{1,64}$), а также оценок функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ (рис. 9.8).

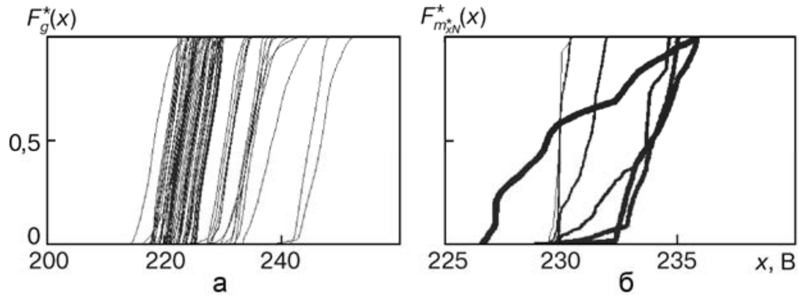


Рис. 9.8. Оценки функции распределения напряжения электросети $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (**а**) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ $(r = 8,10,12,14,16,18,20)$ (**б**) (толщина линий возрастает с увеличением значения параметра r)

Как следует из рис. 1.8 **а**, качество электросети — низкое. За время наблюдения напряжение изменялось от $x_i = 215$ В до $x_s = 255$ В.

На рассматриваемом временном интервале выборочное среднее не проявляло тенденции к стабилизации (рис. 1.8 **б**), что свидетельствует о явном нарушении статистической устойчивости процесса.

Кривые функции распределения $F_g^*(x)$, соответствующие разным значениям параметра g, сильно отличаются друг от друга (в первую очередь по своему местоположению) (рис. 9.8 **а**), что свидетельствует о выраженной *нестационарности* исследуемого колебания.

Кривые функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 9.8 **б**), демонстрируют полное отсутствие тенденции стремления этой функции распределения к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$ и, тем более, стремления выборочного среднего m_{xN}^* к какому-то определенному предельному значению m_x.

При небольших значениях параметра r (8 и 10) по виду кривых функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ (рис. 9.8 **б**) можно предположить наличие стремления ее к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей, с уменьшающейся дисперсией при росте объема выборки). Однако при больших значениях r (начиная от 10 до 20), как видно из рисунка, предполагаемая тенденция не наблюдается: закон распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ становится явно негауссовским.

Дисперсия выборочного среднего m^*_{xN} с увеличением объема выборки (рис. 9.8 **б**) то нарастает (для значений r от 8 до 14 и от 18 до 20), то спадает (для значений r от 14 до 18). В целом при переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия не только не проявляет тенденции стремления к нулю, предсказываемой теорией вероятностей (см. рис. 9.6 **а**), а *возрастает*, причем во много раз (размах выборочного среднего увеличивается примерно от 1 В до 8 В).

Судя по полученным результатам, *функция распределения выборочного среднего стремится к многозначной функции* $\tilde{F}_{m_x}(x)$ *общего вида* (типа изображенной на рис. 9.6 **в**). К такому же выводу приводит анализ результатов обработки данных, полученных в других сеансах записи колебаний напряжения электросети.

9.6.2 Дополнительные исследования колебаний интенсивности излучения пульсара

Дополнительные исследования интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 проводилось с использованием 16-летней записи, по которой проводились расчеты параметров статистической неустойчивости γ^*_N и Γ^*_N в п. 6.3.7. Результаты этих исследований представлены на рис. 9.9.

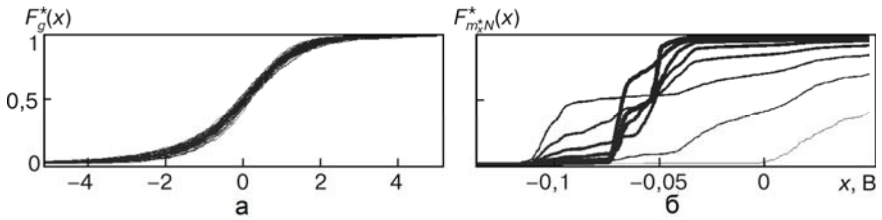


Рис. 9.9. Оценки функции распределения $F^*_g(x)$ колебания интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (**а**) и оценки функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ $(r = \overline{8,15})$ (**б**) (толщина линий возрастает с увеличением значения параметра r)

В отличие от сильно отличающихся друг от друга кривых оценок функций распределения $F_g^*(x)$, полученных для электросети (см. рис. 9.8 **а**), аналогичные кривые $F_g^*(x)$, рассчитанные для пульсара (рис. 9.9 **а**), практически совпадают между собой. Это обстоятельство указывает *на отсутствие явных нарушений статистической устойчивости.*

Однако кривые оценок функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 9.9 **б**), демонстрируют *отсутствие стремления выборочного среднего* m^*_{xN} *к какому-то определенному предельному значению* m_x и даже отсутствие тенденции стремления функции распределения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$.

По динамике изменения функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ при небольших значениях параметра r (от 8 до 13) можно предположить наличие стремления этой функции распределения к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей, с уменьшающейся дисперсией при росте объема выборки). Но при больших значениях r (начиная от 13 до 15) предполагаемая тенденция *не прослеживается*: закон распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ становится явно негауссовским.

При переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия выборочного среднего m^*_{xN} вначале проявляет тенденцию к уменьшению (при изменении r от 8 до 13), но затем перестает уменьшаться. Размах выборочного среднего остается приблизительно на одном и том же уровне (примерно $0,04$ В).

Судя по виду кривых функции распределения выборочного среднего, можно предположить стремление функции $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к многозначной функции $\tilde{F}_{m_x}(x)$ типа изображенной на рис. 9.7.

Исследования функций распределения выборочных средних других процессов показывают, что при большом объеме данных тенденция стремления оценки функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к какому-то определенному закону распределения, а тем более к гауссовскому закону с дисперсией, стремящейся к нулю, *не наблюдается.*

Таким образом, экспериментальные исследования реальных физических процессов показывают, что при *небольшом объеме данных* фиксируется *тенденция нормализации и стабилизации значений* выборочных средних, при *большом же объеме данных эта тенденция не наблюдается*.

Изменение характера поведения выборочных средних можно объяснить нарушением статистической устойчивости реальных процессов на больших интервалах наблюдения.

Эти нарушения приводят к ограничению точности измерения реальных физических величин. К рассмотрению этого вопроса мы и переходим.

Глава 10 Оценка точности измерений на основе теории гиперслучайных явлений

Описаны различные модели измерения. Исследована точечная детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Показано, что в общем случае погрешность, соответствующая такой модели, носит гиперслучайный характер и не может быть представлена в виде суммы систематической и случайной составляющих. Применительно к гиперслучайным оценкам определены понятия «смещенная оценка», «состоятельная оценка», «эффективная оценка» и «достаточная оценка». Введено понятие критического объема гиперслучайной выборки. Описана методика измерения физических величин, соответствующая детерминированно-гиперслучайной модели измерения. Показано, что в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях классическая детерминированно-случайная модель измерения искаженно отражает реальную ситуацию, а детерминированно-гиперслучайная модель — представляет ее адекватно.

10.1 Гиперслучайные модели измерений

Современная метрология исходит из того, что

• истинное значение физической величины детерминировано, однозначно и за время проведения измерения не изменяется,

• за время проведения измерения средства измерения не изменяют своих характеристик,

• за время проведения измерения статистические условия постоянны,

• результат конкретного измерения однозначен.

Все эти пункты представляются, мягко говоря, не очень обоснованными.

Все реальные физические объекты и описывающие их физические величины подвержены изменению во времени (за исключением, возможно, мировых констант). Изменяется все: объект измерения, средства измерения и условия проведения измерений.

Поскольку любое измерение осуществляется не мгновенно, а на протяжении некоторого интервала времени, *результат измерения представляет собой некоторую усредненную величину, от-*

ражающую на протяжении этого интервала различные состояния измеряемого объекта, различные состояния средства измерения и различные условия измерения.

Конечно, удобно представлять измеряемую величину детерминированной, однозначной и неизменной величиной, а результат измерения — случайной величиной. Но эта примитивная модель не отражает множество нюансов реальной ситуации.

Первый шаг к их учету — предположить, что не только оценка Θ^*, но и измеряемая величина носит случайный характер. На рис. 10.1 схематично изображены функции распределения $F_\theta(x)$ и $F_{\theta^*}(x)$ измеряемой величины и оценки, соответствующие указанной модели. Такую модель измерения естественно назвать *случайно-случайной*.

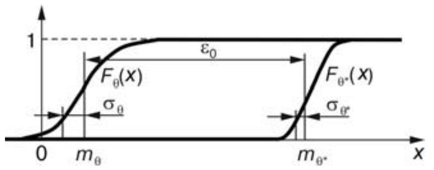


Рис. 10.1. Случайно-случайная модель измерения

В данном случае смещение оценки $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - m_\theta$, где m_{θ^*} — математическое ожидание оценки Θ^*; m_θ — математическое ожидание измеряемой случайной величины Θ; σ_θ, σ_{θ^*} — среднеквадратические отклонения соответственно измеряемой случайной величины Θ и ее оценки Θ^*.

Обобщением детерминированно-случайной и случайно-случайной моделей являются *детерминированно-гиперслучайная* (рис. 10.2 **а**) и *случайно-гиперслучайная* (рис. 10.2 **б**) *модели*. В первой из них измеряемая величина описывается детерминированной, а во второй — случайной величиной. В обеих моделях оценка представляется гиперслучайной величиной.

На рисунках $F_{S\theta^*}(x)$ и $F_{I\theta^*}(x)$ — соответственно верхняя и нижняя границы функции распределения гиперслучайной оценки Θ^*; ε_{S0} и ε_{I0} — смещения верхней и нижней границ функции распределения гиперслучайной оценки относительно измеряемой величины (если эта величина — детерминированная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - \theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - \theta$, если случайная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - m_\theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - m_\theta$); $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ — математические ожидания верхней и нижней границ гиперслучайной оценки; $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ — среднеквадратические отклонения соответствующих границ гиперслучайной оценки. Область неопределенности гиперслучайной оценки затемнена.

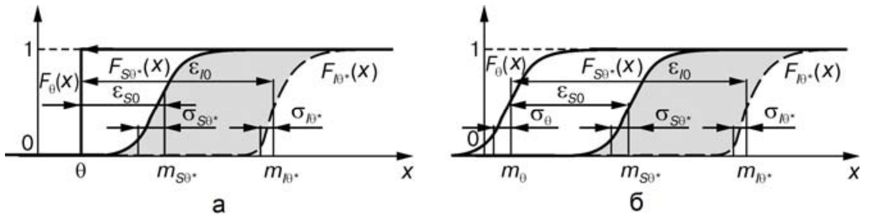


Рис. 10.2. Детерминированно-гиперслучайная (**а**) и случайно-гиперслучайная (**б**) модели измерения

Частным случаем детерминированно-гиперслучайной модели измерения является *детерминированно-интервальная модель* (рис. 10.3). В этом случае измеряемая величина рассматривается как детерминированная, а оценка — как интервальная величина. На рисунке область неопределенности интервальной величины затемнена.

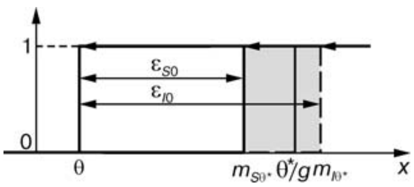


Рис. 10.3. Детерминированно-интервальная модель измерения

Наиболее общая — *гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения* (рис. 10.4), в которой измеряемая величина и ее оценка представлены гиперслучайными величинами.

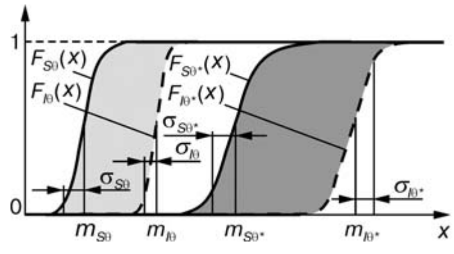


Рис. 10.4. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

Остановимся более подробно на детерминированно-гиперслучайной модели. Более сложная гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения описана в монографиях [Горбань 2011(1), 2014(1)].

10.2 Точечная гиперслучайная оценка детерминированной величины

10.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оценки *детерминированной величины* θ по результатам наблюдения *гиперслучайной величины* $X = \left\{X_g,\ g \in G\right\}$.

Точечную гиперслучайную оценку Θ^* будем рассматривать как некоторую статистику — функцию выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ объемом N из гиперслучайной генеральной совокупности[1]. Оценку Θ^* можно представить множеством *случайных оценок* $\Theta_g^* = \Theta^* / g$, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\Theta^* = \left\{\Theta_g^*,\ g \in G\right\}$, где Θ_g^* является функцией случайной выборки $\vec{X}_g = \vec{X} / g$.

Конкретную величину θ^* гиперслучайной оценки Θ^* можно представить множеством детерминированных величин $\theta_g^* = \theta^* / g$, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\theta^* = \left\{\theta_g^*,\ g \in G\right\}$.

В зависимости от постановки задачи *точность точечной оценки* можно характеризовать по-разному. В общем случае точность характеризует *гиперслучайная погрешность* $Z = \Theta^* - \theta$. *В фиксированных условиях* g параметром, характеризующим точность случайной оценки Θ_g^*, является величина $\Delta_{z_g}^2$ — математическое ожидание квадрата *случайной погрешности* $Z_g = \Theta_g^* - \theta$ (см. формулу (5.1)):

$$\Delta_{z_g}^2 = \mathrm{M}\left[\left|\Theta_g^* - \theta\right|^2\right].$$

Точность конкретной оценки θ_g^*, полученной в фиксированных условиях g, характеризует *детерминированная погрешность* $z_g = \theta_g^* - \theta$.

---

[1] Далее для упрощения обозначений индекс N, указывающий на зависимость величин от объема выборки, будем опускать.

Точность оценки *в изменяющихся условиях* характеризует интервал, в котором находятся величины $\Delta^2_{z_g}$, $g \in G$. Погрешность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому верхняя граница рассматриваемого интервала описывается выражением

$$\Delta^2_z = \max[\Delta^2_{Sz}, \Delta^2_{Iz}],$$

где $\Delta^2_{Sz} = \mathrm{M}_S[|\Theta^* - \theta|^2]$, $\Delta^2_{Iz} = \mathrm{M}_I[|\Theta^* - \theta|^2]$ — *средние квадраты погрешности* Z, рассчитанные с использованием соответственно верхней $F_{S\theta^*}(\theta)$ и нижней $F_{I\theta^*}(\theta)$ границ функции распределения оценки.

Точность оценки характеризуют также *границы среднего квадрата погрешности* Z

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[|\Theta^*_g - \theta|^2], \quad \Delta^2_{sz} = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[|\Theta^*_g - \theta|^2],$$

и корни из этих величин Δ_{iz}, Δ_{sz}.

10.2.2 Смещенные и несмещенные оценки

Гиперслучайная оценка Θ^* детерминированной величины θ называется *несмещенной* (*при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\Theta^*_g]$ условной случайной величины Θ^*_g, рассчитанное по совокупности выборок *любого конечного объема* N, равно оцениваемой величине θ: $m_{\theta^*/g} = \theta$.

В противном случае оценка называется *смещенной*. Величина смещения (*систематическая погрешность*) в условиях g описывается выражением $\varepsilon_{0/g} = m_{z/g} = m_{\theta^*/g} - \theta$.

Заметим, что при наличии смещения *математические ожидания* $m_{\theta^*/g}$ и *смещения* $\varepsilon_{0/g}$ обычно полагают *не зависящими от объема выборки* N (также, как и в случае детерминированно-случайной модели измерения (см. п. 5.2.2)).

Границы Δ^2_{Sz}, Δ^2_{Iz} и Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} можно представить следующим образом:

$$\Delta_{Sz}^2 = m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2, \quad \Delta_{Iz}^2 = m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2, \tag{10.1}$$

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2], \tag{10.2}$$

где $m_{Sz} = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$, $m_{Iz} = m_{I\theta^*} - \theta = \varepsilon_{I0}$ — *математические ожидания границ погрешности*, представляющие собой смещения оценки относительно соответственно верхней и нижней границ функции распределения;

$$\sigma_{Sz}^2 = \mathrm{M}_S\left[\left(Z - m_{Sz}\right)^2\right] = \sigma_{S\theta^*}^2, \quad \sigma_{Iz}^2 = \mathrm{M}_I\left[\left(Z - m_{Iz}\right)^2\right] = \sigma_{I\theta^*}^2$$

— *дисперсии границ погрешности*, совпадающие с дисперсиями границ оценки; $\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 = \mathrm{M}\left[\left(\Theta_g^* - m_{\theta^*/g}\right)^2\right]$ — *условная дисперсия погрешности*, совпадающая с условной дисперсией оценки (рис. 10.5).

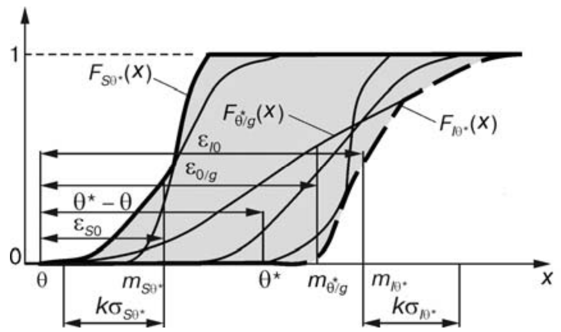


Рис. 10.5. Веер условных функций распределения $F_{\theta^*/g}(x)$ (тонкие линии) для различных условий g, верхняя $F_{S\theta^*}(x)$ (полужирная сплошная линия) и нижняя $F_{I\theta^*}(x)$ (полужирная пунктирная линия) границы функции распределения

В изменяющихся условиях погрешность z описывается неравенством

$$\varepsilon_{S0} - k\sigma_{Sz} < z < \varepsilon_{I0} + k\sigma_{Iz} \tag{10.3}$$

(рис. 10.6), а интервал нахождения измеряемой величины θ (доверительный интервал) — неравенством

$$\theta^* - \varepsilon_{I0} - k\sigma_{I\theta^*} < \theta < \theta^* - \varepsilon_{S0} + k\sigma_{S\theta^*}$$

(рис. 10.5), где k — константа, определяющая степень доверия.

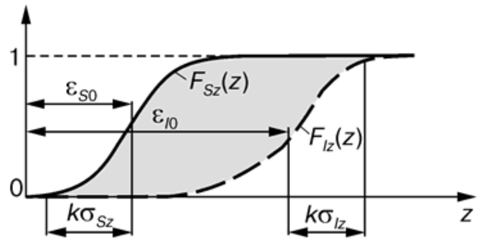


Рис. 10.6. Модель погрешности измерения

Если условные функции распределения оценки Θ_g^* не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ их условные дисперсии $\sigma^2_{\theta^*/g}$ увеличиваются (тип распределения «**а**» в соответствии с классификацией п. 7.2.4) или уменьшаются (тип распределения «**б**»), этот интервал определяется границами смещения $\varepsilon_{i0} = \inf_{g\in G} \varepsilon_{0/g}$, $\varepsilon_{s0} = \sup_{g\in G} \varepsilon_{0/g}$ и границами среднеквадратического отклонения оценки $\sigma_{i\theta^*}$, $\sigma_{s\theta^*}$.

Для распределения типа «**а**»

$$\theta \in [\theta^* - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{s\theta^*}, \theta^* - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{i\theta^*}],$$

а для распределения типа «**б**» —

$$\theta \in [\theta^* - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{i\theta^*}, \theta^* - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{s\theta^*}].$$

10.2.3 Состоятельные оценки

Гиперслучайная оценка Θ^* *детерминированной величины* θ называется *состоятельной*, если *при всех условиях* $g \in G$ составляющие ее случайные оценки Θ_g^* сходятся по вероятности *к этой величине*:

$$\lim_{N\to\infty} P\{|\Theta_g^* - \theta| > \varepsilon\} = 0 ,$$

где $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число. Гиперслучайная оценка, не удовлетворяющая этому условию, называется *несостоятельной*.

Обратим внимание, что состоятельная гиперслучайная оценка удовлетворяет очень жестким требованиям, а именно: мало того, что при всех условиях она должна обладать свойством сходимости, но еще к тому же *при всех условиях* она должна сходиться к одной и той же величине (числу).

Судя по результатам экспериментальных исследований, из-за статистически непрогнозуемых изменений условий *реальные оценки свойством сходимости не обладают*. При увеличении объема выборки они *стремятся не к определенному числу, а к множеству чисел*. Поэтому реальные оценки хорошо описываются *несостоятельными гиперслучайными оценками*, характеризуемыми спектрами предельных точек (см. п. 9.3).

10.2.4 Погрешность измерения

В *детерминированно-случайной* модели измерения погрешность представляет собой *случайную величину* и описывается *систематической и случайной составляющими*, характеризуемые *двумя параметрами: смещением* ε_0 и *среднеквадратическим отклонением оценки* σ_{θ^*}.

В *детерминированно-гиперслучайной* модели измерений погрешность представляет собой *гиперслучайную величину*. Она содержит область неопределенности и описывается неравенством (10.3), в котором фигурируют *четыре параметра*: $\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}, \sigma_{Sz}, \sigma_{Iz}$, задающие на оси погрешности местоположение и размер области неопределенности (рис. 10.6).

В *частном случае*, когда границы функции распределения различаются лишь математическими ожиданиями (тогда $\sigma_{Sz} = \sigma_{Iz} = \sigma_z$), погрешность Z может быть представлена аддитивной моделью $Z = \mathrm{E}_0 + V$ с двумя составляющими: *неопределенной составляющей* E_0, характеризующей местоположение и протяженность области неопределенности, и *случайной составляющей* V *с нулевым математическим ожиданием*, характеризующей форму этой области.

Неопределенная составляющая погрешности E_0 — *статистически непрогнозируемая* — может быть охарактеризована *интервальной величиной* $\Delta\varepsilon_0 = [\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}]$, а случайная составляющая погрешности V — среднеквадратическим отклонением оценки σ_z.

Неопределенная составляющая E_0 может быть разделена на две составляющие (рис. 10.7): *систематическую погрешность* $\varepsilon_0 = \varepsilon_{S0} = m_{Sz}$, характеризующую начало области неопределенности, и *интервальную погрешность* $[0, \Delta\varepsilon_0]$, характеризующую протяженность области неопределенности, где $\Delta\varepsilon_0 = \varepsilon_{I0} - \varepsilon_{S0}$.

Тогда суммарная погрешность имеет три составляющие: *систематическую* ε_{S0}, *случайную* V и *интервальную* $[0, \Delta\varepsilon_0]$.

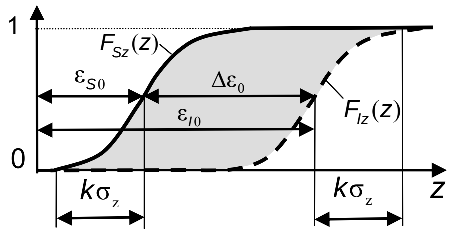


Рис. 10.7. Модель погрешности измерения в частном случае, когда границы функции распределения отличаются лишь математическими ожиданиями

Заметим, что даже в том случае, когда среднеквадратические отклонения границ различаются ($\sigma_{Sz} \neq \sigma_{Iz}$), имеет смысл выделять систематическую погрешность, определяя ее как $\varepsilon_0 = \varepsilon_{S0} = m_{Sz}$.

Таким образом, в детерминированно-случайной и детерминированно-гиперслучайной моделях измерения погрешности оказываются разного типа и описываются разным числом параметров. В первом случае погрешность носит *случайный характер* и содержит систематическую и случайную составляющие. Во втором случае она носит *гиперслучайный характер* и *в общем случае не может быть разложена на составляющие. В частном же случае погрешность может быть представлена тремя составляющими: систематической, случайной и интервальной.*

10.2.5 Эффективные и достаточные оценки

Важной характеристикой оценки является ее эффективность.

Гиперслучайная оценка Θ_e^* *детерминированной величины* θ называется *эффективной* (*при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ условные математические ожидания квадрата отклонения оценки $\Theta_{eg}^* = \Theta_e^* / g$ от величины θ по совокупности выборок заданного объема N не больше, чем для любых других оценок $\Theta_{ig}^* = \Theta_i^* / g$:

$$\mathrm{M}[(\Theta_{eg}^* - \theta)^2] \le \mathrm{M}[(\Theta_{ig}^* - \theta)^2], \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Величина $\mathrm{M}\left[(\Theta_g^* - \theta)^2\right]$ в общем случае *не является* дисперсией оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$. Она оказывается таковой лишь для несмещенных оценок. Для таких оценок условие эффективности может быть записано в виде $\sigma_{\theta_e^*/g}^2 \le \sigma_{\theta_i^*/g}^2$, $i = 1, 2, \ldots$ для всех $g \in G$.

Гиперслучайная оценка Θ^* *детерминированной величины* θ называется *достаточной* (*при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятностей $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1, \ldots, x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о величине θ.

10.3 Статистические измерения физических величин в непрогнозируемо изменяющихся условиях

10.3.1 Исходные предположения

Рассмотрим конкретную задачу: измерение физической величины *в непрогнозируемо изменяющихся условиях.*

Как уже отмечалось, любая методика проведения измерений базируется на ряде допущений (предположений).

Будем исходить из того, что измеряется *скалярная детерминированная однозначная величина*, *не изменяющая значения в процессе из-*

мерения, а результаты измерения носят *гиперслучайный характер* и адекватно описываются *гиперслучайной выборкой* $X_1, ..., X_N$.

В процессе измерения статистические условия *непрогнозируемо* изменяются. При этом изменяются они *медленно*, что позволяет разделить интервал наблюдения на G одинаковых по длительности фрагментов, соответствующих практически постоянным статистическим условиям (см. п. 9.2.2). Элементы выборки берутся с равномерным шагом. Количество отсчетов, соответствующих фрагменту, равно N_s.

В фиксированных статистических условиях g ($g = \overline{1, G}$) элементы случайной выборки $X_{1g}, ..., X_{N_s g}$ *некоррелированные* и имеют *один и тот же неизвестный* закон распределения $F_g(x)$ и *неизвестную дисперсию* $D_{x/g}$.

Результаты *конкретных* N измерений $x_1, ..., x_N$ представляют собой *реализацию* гиперслучайной выборки, а результаты *конкретных* N_s измерений $x_{1g}, ..., x_{N_s g}$ в условиях g — *реализацию* случайной выборки $X_{1g}, ..., X_{N_s g}$.

На интервалах $m_{x/g} \pm 3\sigma_{x/g}$ функции распределения $F_g(x)$ ($g = \overline{1, G}$) *не пересекаются*, где $m_{x/g}$ и $\sigma_{x/g} = \sqrt{D_{x/g}}$ — соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) элементов случайной выборки $X_{1g}, ..., X_{N_s g}$ [2].

В качестве *оценки* измеряемой величины θ^* используется среднее оценок математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, сформированных по результатам наблюдения $x_1, ..., x_N$:

$$\theta^* = (m^*_{Sx} + m^*_{Ix}) / 2 . \tag{10.4}$$

[2] Это предположение позволяет упростить расчет границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ гиперслучайной величины X: представить их функциями распределения случайных величин X_g с минимальным и максимальным математическим ожиданием $m_{x/g}$ ($m_{Sx} = m_{ix}$, $m_{Ix} = m_{sx}$).

10.3.2 Методика статистических измерений

Учитывая указанные предположения, методика измерения величины θ состоит из следующих этапов:

1) проведение N измерений $x_1,...,x_N$ искомой величины θ;
2) определение по описанной в п. 6.1.3 методике количества отсчетов N_s, соответствующих интервалу статистической устойчивости среднего τ_{sm};
3) разбивка выборки на фрагменты по N_s отсчетов в каждом фрагменте;
4) для каждого g-го фрагмента ($g = \overline{1,G}$) расчет оценки математического ожидания $m^*_{x/g}$;
5) определение оценок, m^*_{Sx}, m^*_{Ix} математических ожиданий границ ($m^*_{Sx} = m^*_{ix} = \inf\limits_g m^*_{x/g}$, $m^*_{Ix} = m^*_{sx} = \sup\limits_g m^*_{x/g}$) и номеров фрагментов g_S, g_I, соответствующих математическим ожиданиям верхней и нижней границ;
6) расчет по фрагментам g_S, g_I оценок СКО σ^*_{Sx} σ^*_{Ix} верхней и нижней границ;
7) расчет по формуле (10.4) оценки θ^*;
8) расчет границ доверительного интервала θ_i, θ_s с учетом систематической погрешности $\varepsilon_0 = m_{S\theta^*} - \theta$ и уменьшения СКО границ распределения в $\sqrt{N_s}$ раз за счет усреднения данных:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta^* - \varepsilon_0 - (m^*_{Ix} - m^*_{Sx}) - k\sigma^*_{Ix} / \sqrt{N_s}, \\ \theta_s &= \theta^* - \varepsilon_0 + k\sigma^*_{Sx} / \sqrt{N_s}; \end{aligned} \tag{10.5}$$

9) расчет границ интервала погрешности измерения

$$\begin{aligned} z_i &= \varepsilon_0 - k\sigma^*_{Sx} / \sqrt{N_s}, \\ z_s &= \varepsilon_0 + (m^*_{Ix} - m^*_{Sx}) + k\sigma^*_{Ix} / \sqrt{N_s}. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае наличия корреляции между отсчетами в расчетных формулах величина N_s должна быть заменена на T_s / τ_c

отсчетов, где T_s — длительность фрагмента, содержащего N_s отсчетов, а τ_c — интервал корреляции.

Для иллюстрации необходимости использования разных методик измерения при решении разных задач на рис. 10.8 приведены результаты расчета по двум методикам параметров, характеризующих колебание напряжения электросети на 100-секундном и 60-часовом интервалах наблюдения.

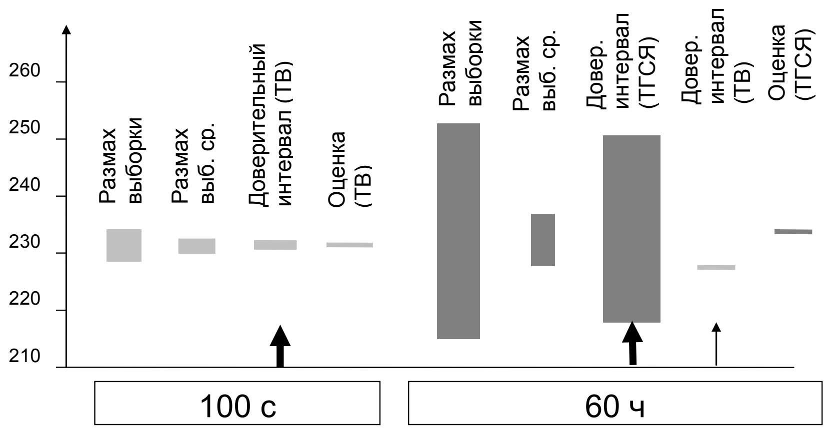


Рис. 10.8. Результаты расчета по методикам теории вероятностей (светло-серый оттенок) и теории гиперслучайных явлений (темно-серый оттенок) параметров, характеризующих напряжение электросети на протяжении 100 с и 60 ч наблюдения

Левая часть рис. 10.8, соответствующая 100-секундному интервалу наблюдения, (она повторяет рис. 5.5) представляет параметры, полученные с использованием детерминированно-случайной модели измерения, основанной на положениях теории вероятностей (см. п. 5.3).

Правая часть рис. 10.8, соответствующая 60-часовому интервалу наблюдения, представляет параметры, полученные с использованием детерминированно-гиперслучайной модели измерения, основанной на положениях теории гиперслучайных явлений (за исключением параметра, отмеченного тонкой стрелкой).

Для 60-часового интервала наблюдения размах выборки и размах выборочного среднего вычислены по данным рис. 1.8 **а**, **б**, а доверительный интервал (ТГСЯ), отмеченный жирной стрелкой, и оценка (ТГСЯ) рассчитаны по методике, описанной в настоящем пункте. Доверительный интервал (ТВ), отмеченный тонкой стрелкой, рассчитан по методике, описанной в п. 5.3.

Результаты, приведенные на рисунке, существенно различаются.

Параметры в левой части рисунка отражают состояние электрической сети в *конкретных статистических условиях*, которые имели место на рассматриваемом 100-секундном интервале наблюдения. Параметры в правой части рисунка (за исключением отмеченного тонкой стрелкой) представляют состояние сети во *множестве различных статистических условий*, которые, как предполагалось, *непрогнозируемо* сменяли друг друга на протяжении рассматриваемого 60-часового интервала наблюдения. Параметр, отмеченный тонкой стрелкой, характеризует состояние сети во *множестве различных, но вполне конкретных, статистических условий*, которые сменяли друг друга на протяжении того же 60-часового интервала наблюдения.

Для 100-секундного интервала наблюдения наиболее информативным параметром является доверительный интервал, рассчитанный по методике теории вероятностей, а для 60-часового интервала — по методике теории гиперслучайных явлений (на рис. 10.8 эти параметры отмечены двумя жирными стрелками).

Для 60-часового интервала наблюдения доверительный интервал шириной 50 мВ и средним значением 229,4 В, рассчитанный в соответствии с теорией вероятностей (отмеченный на рисунке тонкой стрелкой), совершенно *не информативен*, так как учитывает конкретную последовательность смены условий, которая на следующих 60-часовых интервалах наблюдения, скорее всего, не повторится, а доверительный интервал шириной 33 В и средним значением 233,5 В, рассчитанный в соответствии с теорией гиперслучайных явлений (отмеченный жирной стрелкой), содержит полезную для практики информацию об усредненной динамике изменения напряжения сети.

Потеря полезной информации в первом случае и сохранения ее во втором связаны с тем, что при нарушениях статистической устойчивости классическая детерминированно-случайная модель измерения искаженно отражает реальную ситуацию, а детерминированно-гиперслучайная модель — представляет ее адекватно.

Как следует из приведенного примера, игнорирование факта нарушений статистической устойчивости может приводить к абсурдным результатам, в частности к необоснованному завышению оценок точности измерений в сотни и более раз.

Вывод очевиден: при нарушениях статистической устойчивости нельзя использовать детерминированно-случайную модель измерения и основанные на ней методики измерения. В этом случае следует прибегать к иным моделям и методикам измерения, учитывающим нарушения статистической устойчивости, в частности к детерминированно-гиперслучайной модели измерения и основанным на ней методикам.

Обратим внимание, что описанная методика — лишь одна из множества методик, основанных на детерминированно-гиперслучайной модели измерения. На базе этой модели могут быть разработаны другие методики, учитывающие специфические особенности конкретных условий проведения измерений.

10.4 Критический объем гиперслучайной выборки

При увеличении объема N гиперслучайной выборки $X_1,\dots,X_N$ погрешность гиперслучайной оценки Θ^* детерминированной величины θ уменьшается. Однако в отличие от случайной оценки, при $N \to \infty$ она не стремится к нулю.

Проиллюстрируем это на примере, аналогичном примеру, приведенному в п. 5.4.

Пусть измеряемая величина θ — детерминированная, а оценка Θ^* — гиперслучайная величины. Элементы гиперслучайной выборки $X_1,\dots,X_N$ независимы. Статистические условия изменяются медленно, что позволяет разделить интервал наблюдения на G одинаковых по длительности фрагментов, соответствующих практически постоянным статистическим условиям. Элементы выборки берутся с равномерным шагом. Количество отсчетов, соответствующих фрагменту, равно N_s.

Закон распределения случайных элементов $X_{1g},\dots,X_{N_s g}$ в фиксированных условиях g одинаков. В разных условиях g законы распределения элементов могут быть разными, но при этом они имеют одинаковые дисперсии D_x и различаются лишь величиной математического ожидания. Оценка θ^* описывается выражением (10.4).

Тогда, учитывая выражения (10.2), границы погрешности можно записать в виде

$$\Delta_{iz} = \sqrt{\varepsilon_i^2 + D_x / N_s},$$
$$\Delta_{sz} = \sqrt{\varepsilon_s^2 + D_x / N_s},$$

где $\varepsilon_i^2 = \inf\limits_{g\in G}[\varepsilon_{0/g}^2]$ и $\varepsilon_s^2 = \sup\limits_{g\in G}[\varepsilon_{0/g}^2]$ — нижняя и верхняя границы квадрата смещения оценки.

Представление о зависимости границ погрешности Δ_{iz}, Δ_{sz} от определяющих параметров дает рис. 10.9. Пунктирными линиями изображены нижние границы, а сплошными — верхние границы погрешности. Более толстым линиям соответствует большая величина дисперсии D_x.

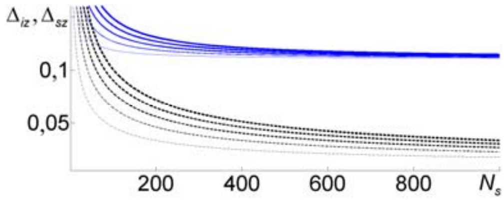


Рис. 10.9. Зависимость границ погрешности Δ_{iz}, Δ_{sz} от объема выборки N_s и величины дисперсии D_x для детерминированно-гиперслучайной модели измерения. Смещение (систематическая погрешность) $\varepsilon_0 = \varepsilon_{S0} = 0{,}01$, протяженность области неопределенности $\Delta\varepsilon_0 = 0{,}1$, а $D_x = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$

На рисунке хорошо видно, что при увеличении объема выборки N_s верхняя граница погрешности Δ_{sz} стремится к $\varepsilon_s = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_0$.

Поэтому даже если величина N_s стремится к бесконечности, определяющая верхняя граница погрешности Δ_{sz} оказывается не меньше величины $\Delta\varepsilon_0 \neq 0$, причем при пренебрежимо малой систематической погрешности ε_0 величина $\Delta_{sz} \to \Delta\varepsilon_0 \neq 0$.

Так в рамках детерминированно-гиперслучайной модели измерения, учитывающей нарушения статистической устойчивости реальных оценок (их несостоятельность), объясняется *невозможность достижения на практике бесконечно высокой точности измерений даже при неограниченном объеме данных.*

Объем гиперслучайной выборки так же, как и в случае случайной выборки (см. п. 5.4), имеет смысл увеличивать до тех пор, пока это приводит к ощутимому повышению точности измерения.

Для гиперслучайных оценок существует *критический объем выборки*, который можно определить как объем N_s, при котором верхняя граница квадрата смещения оценки ε_s^2 существенно превосходит дисперсию оценки D_x / N_s.

Из этого определения с учетом рекомендации [ГОСТ 8.207-76 1976] (см. п. 5.4) следует, что критический объем

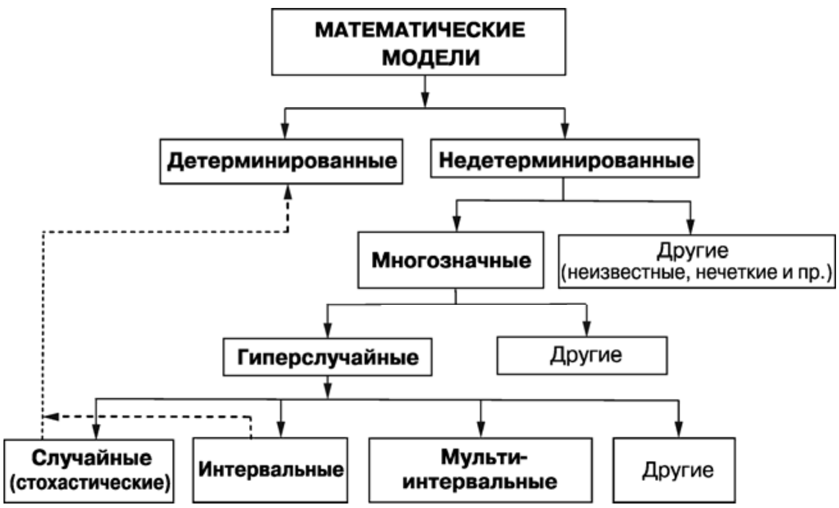
$$N_s \simeq 64 D_x / \varepsilon_s^2. \qquad (10.4)$$

Подводя итог главе, следует обратить внимание на следующее:

1) *реальные оценки физических величин статистически неустойчивы* (*несостоятельны*);
2) *ограниченная точность реальных измерений обусловлена статистической неустойчивостью* (*несостоятельностью*) *реальных оценок*;
3) классическая детерминированно-случайная модель измерения игнорирует статистическую неустойчивость (несостоятельность) реальных оценок, а гиперслучайные модели учитывают ее. Поэтому *гиперслучайные модели более адекватно, чем классическая детерминированно-случайная модель, описывают процедуру измерения*;
4) *в общем случае погрешность нельзя разложить на составляющие*, в частности на систематическую и случайную составляющие;
5) *в частном случае* (совпадения формы границ функции распределения оценки) *погрешность можно представить в виде суммы трех составляющих: систематической, случайной и интервальной. При увеличении объема выборки* случайная составляющая уменьшается, а *систематическая и интервальная составляющие не изменяются.*

ЧАСТЬ V

ПРОБЛЕМА АДЕКВАТНОГО ОПИСАНИЯ МИРА



Классификация математических моделей

Д.ф.-м.н., профессор В.Н. Тутубалин:

— Научная добросовестность требует от каждого исследователя применения доступных методов проверки статистической устойчивости, но наличие ее редко можно вполне гарантировать... Все мыслимые эксперименты можно разделить на три группы. К первой группе относятся хорошие эксперименты, в которых обеспечивается полная устойчивость исхода опытов. Ко второй группе относятся эксперименты похуже, где полной устойчивости нет, но есть статистическая устойчивость. К третьей группе относятся совсем плохие эксперименты, когда нет и статистической устойчивости. В первой группе все понятно без теории вероятностей, в третьей группе она бесполезна. Вторая группа составляет настоящую сферу применения теории вероятностей, но мы вряд ли когда-нибудь можем быть вполне уверены, что интересующий нас эксперимент относится ко второй, а не к третьей группе (Тутубалин 1972 (2), с. 6, 7).

Глава 11 Детерминизм, неопределенность, случайность и гиперслучайность

Рассмотрены различные подходы к адекватному описанию реального физического мира. Обсужден вопрос о причинах использования случайных и гиперслучайных моделей. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного описания различных математических моделей (детерминированных, случайных, интервальных и гиперслучайных) с помощью функции распределения. Предложена классификация этих моделей. Рассмотрены пути и причины формирования неопределенности. Очерчены области целесообразного использования на практике случайных и гиперслучайных моделей.

11.1 Концептуальные взгляды на устройство мира с позиций детерминизма и неопределенности

На протяжении веков ученые ведут спор по поводу принципов, лежащих в основе мироздания. Одни полагают, что в мире все детерминировано, другие — что все случайно или гиперслучайно. Кто из них прав? Как эти точки зрения согласуются между собой? Рассмотрим эти вопросы.

11.1.1 Детерминизм П.С. Лапласа

Сторонники *детерминизма*[1] считают, что любая физическая система адекватно описывается дифференциальными уравнениями.

Зная начальные исходные данные о движущемся объекте и закон, по которому он перемещается в пространстве, или значение процесса в исходный момент времени и закон его изменения, можно абсолютно точно рассчитать местоположение объекта или значение процесса в любой момент времени.

Иначе говоря, при полном знании исходных данных (законов, связей и начальных условий) *поведение рассматриваемой физической системы полностью предсказуемо.*

---

[1] Слово *determinare* переводится с латыни как ограничивать, определять, отделять чертой, определять границы.

В этом суть *детерминизма П.С. Лапласа* [Лаплас 1982], основы которого были заложены еще *Р. Декартом*, *Т. Гоббсом*, *Б. Спинозой*, *И. Ньютоном*, *Г.В. Лейбницем*, *Я. Бернулли*, *П.А. Гольбахом* и другими учеными и философами XVI—XVIII вв.

Г.В. Лейбниц, к примеру, писал: «Все настоящее всегда скрывает в своих недрах будущее, и всякое данное состояние объяснимо естественным образом только из непосредственно предшествующих ему».

Знаменитая книга «Искусство предположений» Я. Бернулли завершается словами [Бернулли 1986][2]: «Откуда, наконец, вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменения, так, что даже в вещах в высшей степени случайных, мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок».

По мнению П.С. Лапласа, все в мире подчиняется детерминированным законам, а текущее состояние полностью определяется предыдущими его состояниями, т. е. предопределено. Эту точку зрения поддерживали многие известные физики, в том числе *А. Эйнштейн*, заметивший как-то, что «Бог не играет в кости с Вселенной» [Грин 2011 (2)]. Эту фразу, конечно, можно толковать по-разному, но, судя по другим его высказываниям, он придерживался позиций детерминизма.

11.1.2 Стохастический подход

Сторонники *стохастического* (иначе: *вероятностного или случайного*) мироустройства, не отвергая, как правило, принципы детерминизма, концентрируют свое внимание на *феномене статистической устойчивости*, открывающем возможности прогнозирования частоты массовых событий и усредненных величин.

Как уже отмечалось, в теории вероятностей сформировался хорошо аргументированный взгляд на вопросы точности прогнозирования и измерения. Теоретически доказано, что при наличии сходимости (состоятельности) оценок и неограниченном увеличении объема выборки *принципиальных ограничений на точность прогнозирования и измерения нет*: чем больше объем выборки, тем выше точность [Тихонов, Харисов 1991, Ван Трис 1972, Горбань 2003].

---

[2] Книга «Искусство предположений» была опубликованная в 1713 г. спустя 8 лет после смерти Я. Бернулли.

Однако, как показывает практика, точность всегда ограничена. Путем увеличения объема выборки во многих случаях можно повысить точность измерения и прогнозирования, но не беспредельно: рано или поздно начинают проявляться те или иные факторы, препятствующие дальнейшему повышению точности.

Сторонники математической теории интервального анализа и физико-математической теории гиперслучайных явлений объясняют этот эффект наличием *неопределенности*.

11.1.3 Интервальный подход

Интервальный подход имеет два направления. Одно из них развивается в рамках теории вероятностей применительно к задачам статистического интервального оценивания. Зарождение его связано с именем П.С. Лапласа, а становление — с именами *Е. Неймана* и *Р.Фишера*[3]. Выводы относительно потенциальной точности измерения и прогнозирования, следующие из работ в этом направлении, типичны для стохастического подхода: при неограниченном объеме данных *принципиальных ограничений точности нет*.

Другое направление интервального подхода — чисто математическое. Феномен статистической устойчивости в нем не играет никакой роли. Это направление начало формироваться в 60-х годах прошлого века в связи с необходимостью учета погрешности округления при проведении расчетов на цифровых электронно-вычислительных машинах. Его развитие привело к созданию математической *теории интервального анализа*. Объектом изучения этой теории являются *интервалы*, характеризуемые *нижней и верхней границами*.

Становление теории интервального анализа связано с именами *Р.Е. Мура* [Moor 1966], *Ю.И. Шокина* [Шокин 1981] и ряда других ученых. За последние полвека в области интервальной математики получено много интересных результатов (см., например, [Шарый 2010, Добронец 2004]).

Следующие из теории интервального анализа выводы, касающиеся точности, в корне отличаются от приведенных выше: *даже при неограниченном объеме данных точности измерения и прогнозирования ограничены*.

Обратим внимание, что этот вывод не базируется на физике реальных явлений, а является следствием исходных математических модельных представлений.

---

[3] Понятие интервальной оценки впервые встречается у П.С. Лапласа (1814 г.) в связи с определением параметра биномиального распределения.

11.1.4 Гиперслучайный подход

Опираясь на экспериментальные исследования, свидетельствующие об отсутствии сходимости частоты событий и выборочных средних, сторонники *физико-математической теории гиперслучайных явлений* отстаивают *гиперслучайную концепцию устройства мира.*

Признание неидеального характера феномена статистической устойчивости и принятие физической гипотезы адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями приводит к выводам, отличным от выводов теории вероятностей.

Согласно теории гиперслучайных явлений *существуют принципиальные ограничения, препятствующие абсолютно точному измерению и прогнозу, причем даже при неограниченном объеме данных.*

Таким образом, по ключевому вопросу потенциальной точности измерения и прогнозирования выводы *математической теории интервального анализа* и *физико-математической теории гиперслучайных явлений* совпадают.

11.2 Фундаментальные вопросы

Реальным миром, судя по всему, правят как детерминированные, так и недетерминированные законы. Интересно понимание мироустройства *Максом Планком*1947 и *Эрвином Шредингером* [Шредингер 1972].

Их позиции близкие. Детерминированные законы М. Планк ассоциировал с *динамическим типом законов*, а Э. Шредингер — с *порядком.* Недетерминированные законы первый рассматривал как относящиеся к *статистическому типу законов*, а второй интерпретировал как *беспорядок.*

Э. Шредингер акцентировал внимание на следующем: «Оказывается, существует два различных «механизма», которые могут производить упорядоченные явления: статистический механизм, создающий «*порядок из беспорядка*», и новый механизм, производящий «*порядок из порядка*». Для непредвзятого ума второй принцип кажется более простым, более вероятным. Без сомнения, так оно и есть. Именно поэтому физики были горды установлением первого принципа (порядок из беспорядка), которому фактически следует Природа и который один дает объяснение огромному множеству природных явлений и, в первую очереди, их необратимости» [Шредингер 1972, с. 80].

Описанные «механизмы» схематично изображены на рис. 11.1 двумя белыми сплошными стрелками. К ним можно добавить еще один очевидный «механизм», производящий «*беспорядок из беспорядка*» (белая пунктирная стрелка).

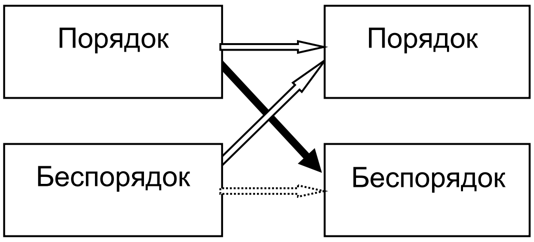


Рис. 11.1. Схематичное изображение «механизмов» формирования порядка и беспорядка

Возникает вопрос: *может ли порядок вызывать беспорядок* (черная стрелка)?

Это один из фундаментальных вопросов, касающихся *неопределенности*. Вопросов, связанных с ним, много. Какую, например, роль играет неопределенность в реальном мире, какого вида эта неопределенность, какого типа модели обеспечивают адекватное описание реальности?

К числу фундаментальных вопросов можно отнести вопрос о причинах широкой распространенности стохастических моделей, используемых для описания реальных физических явлений, и о все возрастающем интересе к гиперслучайным моделям. Может, обусловлено это тем, что множество параметров и характеристик реальных явлений природы мы не знаем и, за неимением лучшего, облекаем наше незнание в стохастические и гиперслучайные модели? Или, быть может мир действительно базируется на случайных и гиперслучайных принципах и тогда использование стохастических и гиперслучайных моделей — единственно правильный путь адекватного описания реальности?

Вопросы, безусловно, непростые. Найти исчерпывающие ответы на них вряд ли возможно. Но все же постараемся в них разобраться. Начнем с терминологии, классификации неопределенностей и классификации распространенных математических моделей.

11.3 Параметры физических систем

Окружающий мир постоянно изменяется, что проявляется в изменении его свойств и свойств составляющих его объектов — различных физических систем.

Состояния объектов характеризуются *физическими* и *нефизическими величинами*. Физические величины, в отличие от нефизических, — *измеряемые величины*.

Определение понятия физической величины согласно ГОСТ [ГОСТ 16263-70 1970] приведено в п. 1.6.

В этом определении заложена двойственная физико-математическая природа понятия физической величины: с одной стороны, это понятие трактуется как физическое свойство, а с другой — характеризуется количественно как математический объект.

Физическая величина может быть описана различными *математическими моделями*, которые, в отличие от физических величин, называют просто величинами, *параметрами*[4] или *координатами состояния* с добавлением при необходимости поясняющего слова, характеризующего их специфику.

Параметры могут быть *скалярными* (одномерными) и *векторными* (многомерными). Принято различать *детерминированные* и *недетерминированные* (*индетерминированные* или *неопределенные*) *параметры*.

Параметры обычно рассматриваются как функции времени. Детерминированный параметр в фиксированный момент времени принимает конкретное значение. В скалярном случае это значение описывается числом (натуральным, вещественным или комплексным), а в векторном — вектором (совокупностью натуральных, вещественных или комплексных чисел). Параметры, описываемые бесконечномерными векторами, обычно называют *характеристиками*. Детерминированная характеристика представляется однозначной детерминированной функцией.

В фиксированный момент времени неопределенный параметр, в отличие от детерминированного, не принимает конкретного значения, а неопределенная характеристика не описывается какой-либо конкретной детерминированной функцией.

Заметим, что деление параметров и характеристик реальных систем на детерминированные и недетерминированные не совсем корректно. Дело в том, что обычно в наличии имеется всего лишь одна реализация, а по одной реализации, если она не является многозначной, судить о детерминированном или неопределенном характере параметра или характеристики нельзя.

---

[4] Слово параметр переводится с древнегреческого языка как соразмеряемый.

Другое дело — модели. Формируя математическую модель, можно допустить, что одни ее параметры (или характеристики) детерминированные, а другие — неопределенные.

Модели, не содержащие неопределенных параметров, обычно называют *детерминированными*, а содержащие такие параметры — *недетерминированными*.

Системы, адекватным образом описываемые исключительно детерминированными моделями, называют *детерминированными*, а представляемые недетерминированными или, как детерминированными, так и недетерминированными моделями, — *недетерминированными*.

Здесь и далее под *адекватным описанием* понимается *полное соответствие модели моделируемому объекту по свойствам неопределенности и детерминизма*.

Поэтому при исследовании таких свойств физических величин не будем делать различий между *реальными физическими величинами* и их *адекватными моделями*.

11.4 Классификация неопределенностей

Понятие неопределенности не такое очевидное, как кажется на первый взгляд. Далеко не всегда удается точно сформулировать, что подразумевается под понятием неопределенности. Существуют множество сходных понятий, близких ему по смыслу. К ним относятся, например, *неизвестность, неоднозначность, случайность, недостоверность, неадекватность, многозначность, хаотичность, нечеткость* и др.

Некоторые из этих понятий расплывчаты. Иные же, хотя и формализованы, однако базируются на разных исходных модельных представлениях, что затрудняет установление связи между ними (к таковым, например, относятся понятия *случайности* и *хаотичности*).

В этой связи разработать всеобъемлющую и притом логически корректную систематизацию понятий неопределенности непросто. Одной из наиболее удачных классификаций представляется классификация, приведенная в монографии [Бочарников 2001] (рис. 11.2).

В ней, хотя и отсутствуют многие важные понятия, в частности, понятия интервальной величины, мультиинтервальной величины, гиперслучайного явления и др., однако верно подмечено, что случайность, неоднозначность и неопределенность — не идентичные понятия. Случайность является частным случаем неоднозначности (многозначности), а последняя — частным случаем неопределенности.

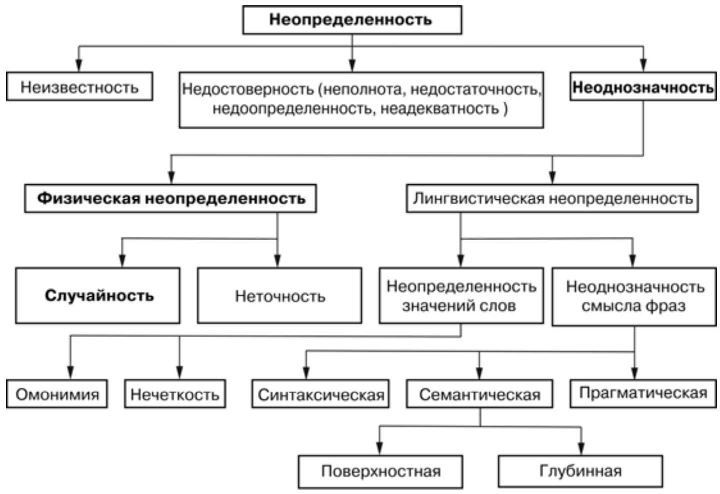


Рис. 11.2. Классификация неопределенностей по В.П. Бочарникову [Бочарников 2001]

Заметим, что понятия случайности, многозначности и неопределенности могут относиться к различным *математическим объектам* (*явлениям*), а именно: *событиям, величинам* и *функциям.*

11.5 Единообразное описание моделей с помощью функции распределения

Единообразное описание моделей, в частности детерминированных, случайных, интервальных и гиперслучайных величин, обеспечивает функция распределения (обозначаемая как $F_x(x)$, если она однозначная, и как $\tilde{F}_x(x)$, если она многозначная).

Важными характеристиками функции распределения гиперслучайной величины, напомним, являются ее верхняя и нижняя границы, аналитически определяемые следующим образом (рис. 9.4):

$$F_{Sx}(x) = \sup_{g \in G} F_{x/g}(x), \quad F_{Ix}(x) = \inf_{g \in G} F_{x/g}(x).$$

Между границами функции распределения расположена *область* (*зона*) *неопределенности*, формируемая множеством условных функций распределения $F_{x/g}(x)$, $g \in G$. Если эти функции всюду плотно заполняют пространство между границами функции распределения, то область неопределенности — *непрерывная* (затемненная часть рисунка (рис. 9.4 **в**)), в противном же случае — *разрывная*.

Вырожденный случай гиперслучайной величины — случайная величина. Для случайной величины X границы функции распределения совпадают с ее функцией распределения $F_x(x)$: $F_{Sx}(x) = F_{Ix}(x) = F_x(x)$, а область неопределенности стягивается в линию (рис. 9.4 **б**).

Детерминированную величину a приближенно можно рассматривать как случайную величину X, функция распределения $F_x(x)$ которой имеет вид единичного скачка в точке a: $F_x(x) = \operatorname{sign}[x-a]$ (рис. 9.4 **а**).

Интервальную величину, определяемую интервалом $[a_i,\ a_s]$, можно рассматривать как гиперслучайную величину X, верхняя граница которой описывается функцией единичного скачка в точке a_i: $F_{Sx}(x) = \operatorname{sign}[x-a_i]$, а нижняя — функцией единичного скачка в точке a_s: $F_{Ix}(x) = \operatorname{sign}[x-a_s]$ (рис. 9.4 **г**). Область неопределенности интервальной величины — непрерывна.

Если $a_i \to -\infty$, а $a_s \to \infty$, то местоположение скачка верхней границы функции распределения стремится к минус бесконечности, а нижней границы — к плюс бесконечности. Интервальную величину с такими границами распределения можно рассматривать как *полностью неопределенную величину*.

Мультиинтервальная величина [Шарый 2010], состоящая из множества непересекающихся интервалов, имеет *разрывную область неопределенности*.

Очевидно, что детерминированная величина (рис. 9.4 **а**) лишена какой-либо неопределенности. Она характеризуется одним конкретным значением a.

Интервальная величина (рис. 9.4 **г**) описывает неопределенность, которая характеризуется границами интервала. Случайная величина (рис. 9.4 **б**) описывает неопределенность другого типа, которая приближенно может быть охарактеризована математическим ожиданием и наклоном кривой функции неопределенности (характеризуемым дисперсией или среднеквадратическим отклонением).

Обратим внимание, что *ни в интервальной модели, ни в случайной модели детерминизм полностью не изжит.*

Он присутствует в них, но на другом уровне: проявляется в форме *детерминированных параметров* (границ интервала, математического ожидания, дисперсии и пр.) и *детерминированных характеристик* (функции распределения, плотности распределения, границ функции распределения и др.). В случайной модели детерминизм играет более существенную роль, чем в интервальной модели.

Гиперслучайная величина учитывает два вида неопределенности, одна из которых характерна для интервальной, а другая — для случайной величины.

Естественно, *в гиперслучайной модели детерминизм также присутствуют* в форме детерминированных параметров (моментов границ, границ моментов и т.д.) и детерминированных характеристик (условных функций распределения, условных плотностей распределения, границ функции распределения и пр.), однако роль детерминизма в ней *менее существенна*, чем в случайной модели.

Ранжируя рассматриваемые модели по той роли, которую играет в них детерминизм, модели можно расположить следующим образом: детерминированная, случайная, гиперслучайная, мультиинтервальная, интервальная.

Из приведенного краткого экскурса следует, что *неопределенность теснит детерминизм.* Однако это не означает, что дни последнего сочтены. Какие бы модели неопределенности мы ни строили, *обойтись без детерминированных величин и функций невозможно.* В конечном итоге все модели описываются детерминированными средствами.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. С одной стороны, между детерминированными и неопределенными явлениями нет той пропасти, как можно было бы предположить.

Детерминированную, случайную, интервальную и мультиинтервальную величины, а также детерминированное и случайное события можно рассматривать как вырожденные случаи гиперслучайной величины, случайную функцию — как вырожденную гиперслучайную функцию, а детерминированную функцию — как вырожденную случайную функцию или вырожденную гиперслучайную функцию.

С другой стороны, различие между детерминированными, случайными, интервальными, мультиинтервальными и гиперслучайными моделями имеется и связано оно с разным соотношением в них детерминизма и неопределенности. Проявляется это различие в разных особенностях функции распределения.

11.6 Классификация математических моделей

Особенности функции распределения могут служить основой для классификации ряда математических моделей. Рассматривая *неопределенность как альтернативу детерминизму* и учитывая соображения, изложенные в предыдущем параграфе, можно предложить следующую классификацию математических моделей (рис. 11.3).

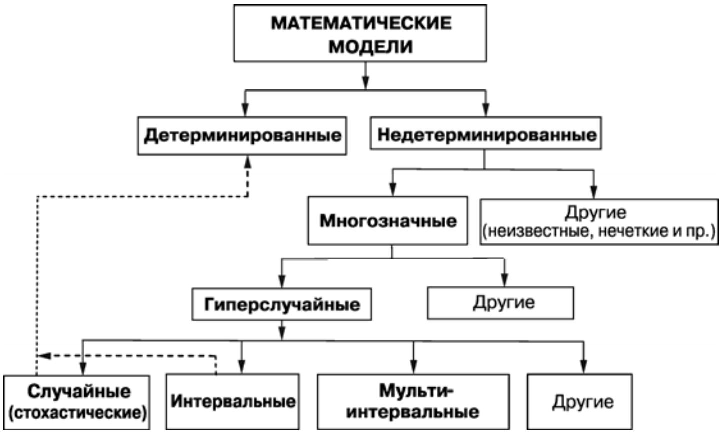


Рис. 11.3. Классификация математических моделей

В этой классификации под многозначными в общем случае подразумеваются не только модели, неоднозначность которых проявляется при рассмотрении множества реализаций (как, например, в случае случайных моделей, рассматриваемых в классической математической статистике), но и модели, у которых *имеет место неоднозначность на уровне одной реализации.* В последнем случае предполагается, что реализация физической величины описывается не числом, а множеством чисел (многозначной величиной)[5], а реализация физического процесса — многозначной функцией.

[5] Строго говоря, такая трактовка физической величины противоречит упомянутому ГОСТу [ГОСТ 16263-70 1970].

11.7 Формирование неопределенности

В п. 11.2 подняты вопросы о причинах, по которым используются различные типы неопределенных моделей, и об адекватности описания с их помощью реальных физических явлений. Рассмотрим эти причины.

11.7.1 Формирование неопределенности из последовательности детерминированных величин

Напомним (см. п. 11.3), что под *адекватным описанием* в данном случае понимается *полное соответствие модели моделируемому объекту по свойствам неопределенности и детерминизма.*

Наличие такого рода адекватности позволяет при исследовании свойств неопределенности физических величин не делать различий между реальными физическими величинами и их адекватными моделями.

Будем исходить из трех следующих предположений:

1. Существуют физические величины, адекватно описываемые однозначными детерминированными величинами (числами).

2. Феномен статистической устойчивости объективно существует и носит неидеальный характер, что проявляется в нарушении сходимости выборочных средних любых физических процессов.

3. Реальные физические величины формируются путем объединения (усреднения) бесчисленного множества различных физических величин и поэтому любую физическую величину [6] можно рассматривать как предел некоторой последовательности выборочных средних.

Обратим внимание, что в первом пункте не выдвигается требование знания детерминированных величин (чисел). Фиксируется лишь факт принципиальной возможности адекватного описания физических величин конкретными числами.

Возможность адекватного описания физических величин числами не столь очевидна, как может показаться на первый взгляд. Вся физика, за исключением квантовой механики, основана на парадигме однозначности. Но однозначен ли мир в действительности? Вопрос, на который нет ответа. Принимая первый пункт предположений, мы следуем общепринятым взглядам относитель-

---

[6] За исключением, возможно, мировых констант, таких как скорость света, постоянная Планка и небольшого числа других констант, принимаемых в качестве постоянных *по договоренности.*

но макромира, понимая при этом, что вопрос до конца не решен и требует тщательного изучения.

Первый пункт предположений можно рассматривать как *физико-математическую гипотезу*, устанавливающую связь между реальным физическим миром и абстрактной математической моделью. Два других пункта представляют собой *физические гипотезы*, подтверждаемые результатами экспериментальных исследований.

Исходя из перечисленных гипотез, докажем существование физических величин, адекватно описываемых интервальными и гиперслучайными величинами, и проследим путь их образования.

Из принимаемых гипотез следует, что существуют реальные физические величины, адекватно описываемые спектром предельных точек детерминированной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ($N \to \infty$).

Спектр этой последовательности $\tilde{S}_x = \underset{N \to \infty}{\mathrm{LIM}}\, x_N$ *теоретически* может представлять собой детерминированную величину (число), случайную величину, интервальную величину или гиперслучайную величину. Этот список следует рассматривать как перечень возможных претендентов.

Если спектр представляет собой *конечное число*, то рассматриваемая последовательность сходится. Ввиду не соответствия второй гипотезе такой вариант следует исключить из числа претендентов.

Если спектр представлен одной *бесконечной величиной*, то теоретически такой вариант не противоречит предположениям. Однако существование бесконечно больших физических величин представляется спорным. Поэтому этот претендент тоже подлежит исключению из рассмотрения.

В п. 1.6 обращено внимание на то, что *вероятность — абстрактное математическое понятие*, измерить которое точно, в принципе, невозможно (из-за ограниченного характера феномена статистической устойчивости). Поэтому случайная величина также подлежит исключению из списка возможных претендентов как не соответствующая реалиям и второй гипотезе.

Если спектр — невырожденная гиперслучайная или интервальная величина, то функция распределения $\tilde{F}_x(x)$ — многозначная величина (рис. 9.4 **в**, **г**).

В итоге в списке остаются *интервальная величина и гиперслучайная величина*.

Полученный результат можно интерпретировать как *теоретическое обоснование* того, что:
– *порядок может порождать беспорядок* (см. рис. 11.1);
– *в реальном мире существуют физические величины, адекватно описываемые неопределенными величинами, причем только двух*

типов: интервальными величинами и гиперслучайными величинами;
– *эти физические величины формируются из последовательностей физических величин, адекватно описываемых детерминированными величинами*;
– *формирование таких физических величин происходит в результате нарушения сходимости* (*нарушения статистической устойчивости*).

11.7.2 Причины нарушения статистической устойчивости в реальном мире

Существует множество факторов, вызывающих нарушение статистической устойчивости в реальном мире.

Один из них — *поступление извне вещества, энергии и* (*или*) *информации*. Их поток в *открытую систему* порождает и питает *статистически неустойчивые неравновесные фликкер-шумы* (см. п. 6.2.2).

Статистически неустойчивые процессы могут возникнуть в результате различных *нелинейных преобразований*. При детектировании, например, статистически устойчивого амплитудно-модулированного сигнала в его спектре, как известно, присутствуют спектральные составляющие, соответствующие огибающей радиосигнала. Если спектральная плотность мощности (СПМ) огибающей описывается функцией типа $1/f^{\beta}$, где $\beta \geq 1$, то после подавления высокочастотной несущей отфильтрованный процесс оказывается статистически неустойчивым.

Обратим особое внимание на то, что *широкополосный статистически устойчивый процесс даже при линейной низкочастотной фильтрации может оказаться статистически неустойчивым*.

Пример такой фильтрации — *интегрирование*. При интегрировании процесса $X(t)$ получается процесс $Y(t)$, СПМ $S_y(f)$ которого связана со СПМ $S_x(f)$ исходного процесса соотношением [Зиновьев, Филиппов 1975, Горбань 2003]

$$S_y(f) = \frac{S_x(f)}{4\pi^2 f^2}.$$

Наличие такой связи между спектрами $S_y(f)$ и $S_x(f)$ приводит к тому, что

стационарные статистически устойчивые шумы, соответствующие диапазону *от белого включительно до розового*, после интегрирования становятся *нестационарными статистически неустойчивыми шумами и располагаются в коричнево-черной области* (см. рис. 6.2).

11.7.3 Образование неопределенности при нелинейных преобразованиях

При некоторых *нелинейных преобразованиях* возникает многозначность, являющаяся разновидностью неопределенности. Область неопределенности функции распределения $\tilde{F}(x)$ в этом случае может быть разрывной.

В качестве примеров можно привести нелинейные преобразования, описываемые выражениями $x = \pm\sqrt{a}$ и

$$x = \text{Arcsin}\, a = (-1)^n \arcsin a + \pi n\,, \qquad (11.1)$$

где $\sqrt{a}$ — арифметический корень, a — вещественное число, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В первом случае спектр значений описывается двумя условными функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках $x = -\sqrt{a}$ и $x = \sqrt{a}$, а во втором — счетным множеством функций распределения в виде функций единичного скачка в точках, описываемых выражением (11.1). В обоих случаях область неопределенности оказывается дискретной, а, следовательно, разрывной.

11.7.4 Признаки нарушения статистической устойчивости

Как видим, причин нарушения статистической устойчивости много. Не всегда удается связать их с определенными особенностями процесса. Некоторые характерные признаки нарушения устойчивости приведены в табл. 11.1. В квадратных скобках указаны пункты, в которых описаны отмеченные признаки.

Таблица 11.1

№	Признаки нарушения статистической устойчивости	Нарушение по отношению к	
		среднему	СКО
1	*спектральные:*		
	— быстрый рост СПМ процесса с понижением частоты f [6.2.3],	+	+
	— низкочастотный узкополосный процесс [6.2.5],	+	+
	— высокочастотный узкополосный процесс [6.2.5];	—	+
2	*корреляционные:*		
	— высокая корреляция отсчетов низкочастотного процесса [6.2.4, 6.2.5];	+	+
	— высокая корреляция отсчетов высокочастотного процесса [6.2.5];	—	+
3	*моментов:*		
	— статистически непредсказуемые флуктуации м.о. процесса,	+	+
	— статистически непредсказуемые флуктуации дисперсии процесса,	—	+
	— отсутствие у распределения м.о. [6.2.6],	+	+
	— отсутствие у распределения дисперсии (м.о. существует) [6.2.6];	—	+
4	*плотности распределения* (*ПР*) *и функции распределения* (*ФР*)*:*		
	— явная нестабильность местоположения выборочных ПР (или ФР) [9.4, 9.5],	+	+
	— явная нестабильность формы выборочных ПР (или ФР) при стабильности их местоположения [9.4, 9.5],	—	+
	— наличие «тяжелых хвостов» [6.2.6];	+	+
5	*системообразующие:*		
	— формирование процесса с элементами низкочастотной фильтрации [11.7.1, 11.7.2]	+	+
	— формирование процесса с элементами нелинейного преобразования [11.7.3]	±	±

11.8 Использование различных типов моделей

Исследования указывают на то, что интервальные и гиперслучайные модели *могут адекватно отражать* недетерминированные свойства окружающего мира. Случайные же модели делают это лишь *приближенно*.

Указанное обстоятельство, однако, *не означает*, что стохастические и другие упрощенные модели бесполезны. Безусловно, это не так. Неполное соответствие этих моделей моделируемым объектам *проявляется лишь при больших объемах выборки*.

Зачастую же объемы выборок невелики. Тогда погрешность описания реальных объектов стохастическими и другими упрощенными моделями пренебрежимо мала. Они проще, чем интервальные и гиперслучайные модели, и поэтому во многих случаях являются *предпочтительными*.

Необходимость в более сложных *интервальных* и *гиперслучайных моделях* возникает тогда, когда *проявляется ограниченный характер феномена статистической устойчивости* — обычно *при больших интервалах наблюдения и больших объемах выборки*.

Послесловие

Подводя итоги рассмотренным вопросам, хотелось бы обратить внимание читателей на следующие ключевые моменты.

Статистическая устойчивость — *физический феномен*, проявляющийся в *стабильности частоты реальных массовых событий, выборочных средних и других статистик*. В настоящее время известны две теории, описывающие его: *теория вероятностей* и *теория гиперслучайных явлений*.

Теория вероятностей основана на предположении, что феномен статистической устойчивости *идеален* (иначе: статистики *обладают свойством сходимости* (*оценки состоятельные*)).

Теория гиперслучайных явлений базируется на предположении, что феномен статистической устойчивости *неидеален* (иначе: статистики *свойством сходимости не обладают* (*оценки несостоятельные*)).

Многочисленные экспериментальные исследования реальных явлений разной физической природы указывают на то, что *статистики, сформированные по реальным выборкам, тенденции к сходимости не проявляют*. Тенденция к сходимости наблюдается лишь при небольшом объеме выборки. При большом же объеме она не фиксируется.

Результаты этих экспериментальных исследований свидетельствуют о небезосновательности сомнений многих видных ученых касательно возможности исчерпывающего описания массовых физических явлений стохастическими (вероятностными) моделями (см. цитаты на с. 16, 37, 42, 122, 152, 232). По всей видимости, физический мир действительно подчиняется трем *видам законов*:

- *детерминированным*,
- *статистически прогнозируемым* (*случайным, стохастическим* или, иначе, *вероятностным*) и
- *статистически непрогнозируемым.*

Наличием статистически непрогнозируемых законов можно объяснить ограниченную точность любых статистических измерений физических величин и ограниченную точность прогнозирования развития реальных событий.

Фиксируемые нарушения сходимости частоты реальных событий означают, что базовое понятие теории вероятностей — *вероятность — является абстрактным математическим понятием, не имеющим физической интерпретации*. Это обстоятельство указывает на *необходимость пересмотра положений ряда физических дисциплин, в которых понятие вероятности и сходимости играет ключевую роль*:

это в первую очередь статистическая механика, статистическая физика и квантовая механика.

Следует иметь в виду, что при небольшом объеме выборки действие статически непрогнозируемых законов практически не сказывается на результатах измерения физических величин. Это обуславливает возможность эффективного применения классических моделей и статистических методов теории вероятностей.

При больших же объемах выборки, когда нарушение статистической устойчивости проявляется явно, использование классических вероятностных моделей приводит к недопустимо большим погрешностям измерения. Тогда целесообразно применение подходов, предлагаемых теорией гиперслучайных явлений.

Заметим, что гиперслучайные модели могут быть эффективно использованы не только в случае больших, но и малых выборок, в частности, для моделирования разнообразных физических явлений при наличии небольшого объема статистического материала, не позволяющего получить качественные оценки параметров и характеристик.

Гиперслучайные модели, в отличие от *случайных*, теоретически пригодны для описания физических явлений, *как на больших, так и малых интервалах наблюдения, как в случае больших, так и малых выборок*. Однако гиперслучайные модели сложнее случайных. Поэтому при равных возможностях применения предпочтение следует отдавать случайным моделям и использовать *гиперслучайные модели лишь тогда, когда случайные модели не обеспечивают адекватное описание действительности.*

* * *

Изложенный материал дает начальное представление о физическом феномене статистической устойчивости и методах его описания.

Читателям, желающим углубить и систематизировать знания в области *теории вероятностей*, можно порекомендовать книги [Вентцель 1969, Гнеденко 1988, Горбань 2003], а желающим более детально познакомиться с *экспериментальными исследованиями феномена статистической устойчивости* и *методами теории гиперслучайных явлений* — монографии [Горбань 2011 (1), 2014 (1)].

Список основных условных обозначений

Сокращения

ОРК	—	одиночный резонансный контур
СКО	—	среднеквадратическое отклонение
СПМ	—	спектральная плотность мощности
ТВ	—	теория вероятностей
ТГСЯ	—	теория гиперслучайных явлений

Операторы

$\mathrm{D}[X]$	—	дисперсия случайной величины X
$\mathrm{M}[X]$	—	математическое ожидание случайной величины X
$\mathrm{M}_i[X]$, $\mathrm{M}_s[X]$	—	нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X
$\mathrm{M}_I[X]$, $\mathrm{M}_S[X]$	—	математические ожидания нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X
$P\{A\}$	—	вероятность выполнения условия A
$P(A)$	—	вероятность события A
$P_I(A)$, $P_S(A)$	—	нижняя и верхняя границы вероятности события A

Специальные математические знаки

inf, sup	—	нижняя и верхняя границы
$\lim\limits_{N\to\infty} X_N$	—	обычный предел последовательности случайных величин $X_1,\ldots,X_N$
$\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{N\to\infty} x_N$	—	обобщенный предел последовательности детерминированных величин $x_1,\ldots,x_N$
$\mathrm{med}[X]$	—	медиана X
$\mathrm{sign}[x]$	—	функция единичного скачка
$\bigcup$	—	логическое сложение
$\bigcap$	—	логическое умножение
$\varnothing$	—	пустое множество
$\{X\}$	—	множество X
$\tilde{x}$	—	знак тильды над буквой подчеркивает многозначность величины $\tilde{x}$
$\bar{x}$	—	черта над буквой подчеркивает, что обозначаемая ею величина получена путем усреднения данных по времени
θ^*	—	оценка величины θ
$\overset{*}{\theta}$	—	величина, комплексно сопряженная $\dot{\theta}$
$(x_1,\ldots,x_N)$	—	вектор с компонентами $x_1,\ldots,x_N$
$\{X_1,\ldots,X_N\}$	—	множество или упорядоченное множество с элементами $X_1,\ldots,X_N$

Параметры и функции

D_x	– дисперсия случайной величины X
$D_x(t)$	– дисперсия случайного процесса $X(t)$
D_{ix}, D_{sx}	– нижняя и верхняя границы дисперсии гиперслучайной величины X
D_{Ix}, D_{Sx}	– дисперсии нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$f(x)$ или $f_x(x)$	– плотность распределения случайной величины X
$f(x/g)$ или $f_{x/g}(x)$	– плотность распределения гиперслучайной величины X в условиях g
$f_I(x)$, $f_S(x)$	– плотности распределения нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$F(x)$ или $F_x(x)$	– функция распределения величины X
$F_I(x)$, $F_S(x)$	– нижняя и верхняя границы функции распределения гиперслучайной величины X
$F(x/g)$ или $F_{x/g}(x)$	– условная функция распределения гиперслучайной величины X в условиях g
$F(x/m, D)$	– гауссовская функция распределения с математическим ожиданием m и дисперсией D
h_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему
h_{0N}	– единица измерения параметров статистической неустойчивости h_N, H_N
h_{0N}^{+}	– верхняя граница коридора статистической устойчивости для параметров h_N, H_N
H_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО
I_γ	– доверительный интервал, соответсвующий доверительной вероятности γ
$\bar{K}_{x/g}(\tau)$	– условная автокорреляционная функция эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
$\dot{K}(f)$	– комплексная передаточная функция оператора преобразования
$\bar{K}_{ix}(\tau)$, $\bar{K}_{sx}(\tau)$	– нижняя и верхняя границы автокорреляционной функции эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
$K_{x_1 x_2}$	– смешанный корреляционный момент случайных величин X_1 и X_2
$K_x(t_1,t_2)$	– корреляционная функция случайного процесса $X(t)$
$K_{ix}(t_1,t_2)$, $K_{sx}(t_1,t_2)$	– нижняя и верхняя границы корреляционной функции гиперслучайного процесса $X(t)$
$K_{Ix}(t_1,t_2)$, $K_{Sx}(t_1,t_2)$	– корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайного процесса $X(t)$

$K_x(\tau)$	– корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$
$\bar{K}_x(\tau)$	– автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$
m_x	– математическое ожидание случайной величины X
$\bar{m}_x$	– среднее по времени процесса $X(t)$
$m_x(t)$	– математическое ожидание случайного процесса $X(t)$
$\bar{m}_{x/g}$	– условное среднее по времени эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
$\bar{m}_{ix}$, $\bar{m}_{sx}$	– нижняя и верхняя границы среднего по времени эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
m_{ix} , m_{sx}	– нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X
m_{Ix} , m_{Sx}	– математические ожидания нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$r_{ix}(t_1,t_2)$, $r_{sx}(t_1,t_2)$	– нижняя и верхняя нормированные границы ковариационной функции гиперслучайного процесса $X(t)$
$r_{Ix}(t_1,t_2)$, $r_{Sx}(t_1,t_2)$	– нормированные ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайного процесса $X(t)$
$r_{x_1x_2}$	коэффициент корреляции случайных величин X_1 и X_2
$\bar{R}_{x/g}(\tau)$	– условная автоковариационная функция эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
$\bar{R}_{ix}(\tau)$, $\bar{R}_{sx}(\tau)$	– нижняя и верхняя границы автоковариационной функции эргодического гиперслучайного процесса $X(t)$
$R_{x_1x_2}$	– смешанный ковариационный момент случайных величин X_1 и X_2
$R_x(t_1,t_2)$	– ковариационная функция случайного процесса $X(t)$
$R_x(t_1,t_2)$	– автоковариационная функция случайного процесса $X(t)$
$R_{Ix}(t_1,t_2)$, $R_{Sx}(t_1,t_2)$	– ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайного процесса $X(t)$
$S_{ix}(f)$, $S_{sx}(f)$	– нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности гиперслучайного процесса $X(t)$
$S_{Ix}(f)$, $S_{Sx}(f)$	– спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайного процесса $X(t)$
$S_x(f)$	– спектральная плотность мощности случайного процесса $X(t)$
$S_{X_T}(f)$	– спектр мощности процесса $X(t)$ на интервале T
$\delta(x)$	– дельта-функция Дирака
$\Phi(x)$	– интеграл вероятности (функция Лапласа)
γ_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему
γ_{0N}	– единица измерения параметров статистической неустойчивости γ_N , Γ_N

γ_{0N}^{+}	– верхняя граница коридора статистической устойчивости для параметров γ_N, Γ_N
Γ_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО
μ_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО
μ_{0N}	– единица измерения параметров статистической неустойчивости μ_N, M_N
μ_{0N}^{+}	– верхняя граница коридора статистической устойчивости для параметров μ_N, M_N
M_N	– параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО
σ_x	– среднеквадратическое отклонение случайной величины X

Список литературы

Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 356 с.

Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162, № 7. — С. 149—182.

Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967. — 779 с.

Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175, № 2. — С. 163—179.

Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // Успехи физических наук. — 1999. — № 12. — С. 1311—1323.

Архив погоды по городам СНГ. — http://thermo.karelia.ru/weather/ w_history.php.

Бернулли Я. О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986. — 176 с.

Бернштейн С.Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщения Харьковского математического общества. — 1917. — № 15. — С. 209—274.

Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. — М.—Л.: Гос. изд-во, 1927. — 367 с.

Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. — М.—Л.: Гостехиздат, 1934, 1946. — 412 с.

Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

Борель Э. Вероятность и достоверность. — М.: Наука, 1961. — 120 с.

Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 224 с.

Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 432 с.

Бочарников В.П. Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике. — СПб.: Наука, 2001. — 328 с.

Бриллюэн Л. Наука и теория информации. — М.: Физматгиз, 1960. — 395 с.

Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. — М.: Мир, 1960. — 395 с.

Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2003. — 399 с.

Бычков А.С., Клюшин Д.А. Случайность и возможность: современные подходы // Математические машины и системы. — 2012. — № 4. — С. 10—27.

Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. — М.: Советское радио, 1972. — Т. 1. — 743 с.; 1975. — Т. 2. — 343 с.; 1977. — Т. 3. — 662 с.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. — 1990. — Т. 56, № 7. — С. 76—81.

Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. — М.: МЭИ — София: Техника, 1989. — 224 с.

Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира: птолемеевой и коперниковой. — М.—Л., 1948. — 147 с.

Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.А.М. Современная квантовая механика. Три нобелевских доклада. — Л.—М.: Гос. технико-теоретическое изд-во, 1934. — 76 с.

Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 567 с.

Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Выща шк., 1979. — 408 с.

Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.—Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. — 264 с.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. — 406 с.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. — 448 с.

Гнедин Ю.Н. Небо в рентгеновских и гамма-лучах // Соровский образовательный журнал. — 1997. — Т. 5. — С. 74—79.

Гоббс Т. Избранные сочинения. — М., Л., 1926.

Гоббс Т. Сочинения в двух томах. — М.: Мысль, 1991. — Т. 1. — 624 с.; Т. 2. — 732 с.

Горбань И.И. Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров. — К.: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. — 150 с.

Горбань І.І. Основи теорії випадкових функцій і математичної статистики. — К.: КІ ВПС МЗС України, 2000. — 245 с.

Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. — К.: ІПММС НАН України, 2003. — 245 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html).

Горбань И.И. Гиперслучайные явления и их описание // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 1—2. — С. 16—27.

Горбань И.И. Методы описания гиперслучайных величин и функций // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 3. — С. 24—33.

Горбань И.И. Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2005. — № 3. — С. 41—48.

Горбань И.И. Гиперслучайные функции и их описание // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. —Т. 49, № 1. — С. 3—15.

Горбань І.І. Математичний опис фізичних явищ у статистично нестабільних умовах // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2006. — № 6. — С. 26—33.

Горбань И.И. Оценки характеристик гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 1. — С. 40—48.

Горбань И.И. Стационарные и эргодические гиперслучайные функции // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. — Т. 49, № 6. — С. 54—70.

Горбань И.И. Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 2. — С. 3—14.

Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений. — К.: ИПММС НАН Украины, 2007. — 184 с. (http://www.immsp. kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html).

Горбань И.И. Гиперслучайные явления: определение и описание // Proceedings of XIII-th International conference KDS. — Sofia, Bulgaria, 2007. — P. 137—147.

Горбань И.И. Представление физических явлений гиперслучайными моделями // Математические машины и системы. — 2007. — № 1. — С. 34—41.

Горбань И.И. Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях. — К.: Наук. думка, 2008. — 272 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

Горбань И.И. Измерение величин в статистически неопределенных условиях // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2008. — Т. 51, № 7. — С. 3—22.

Горбань И.И. Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 135—141.

Горбань И.И. Гиперслучайные марковские модели // Proceedings of XIII-th International conference KDS-2. — Sofia — Uzhgorod, Bulgaria — Ukraine, 2008. — P. 233—242.

Горбань И.И. Гипотеза гиперслучайного устройства мира и возможности познания // Математические машины и системы. — 2009. — № 3. — С. 44—66.

Горбань И.И. Закон больших чисел для гиперслучайной выборки // Proceedings of XIV-th International conference KDS-2. Book 15. — Sofia — Kiev, Bulgaria — Ukraine, 2009. — P. 251—257.

Горбань И.И. Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Труды пятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2009». — К., 2009. — С. 5—9.

Горбань И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов // Математические машины и системы. — 2010. — № 1. — С. 171—184.

Горбань И.И. Исследование нарушений статистической устойчивости курса валют // Труды пятой конференции «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2010». — К., 2010. — С. 84—86.

Горбань И.И. Преобразования гиперслучайных величин и процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 2. — С. 3—15.

Горбань И.И. Статистическая неустойчивость магнитного поля Земли // Труды шестой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2010». — К., 2010. — С. 189—192.

Горбань И.И. Физико-математическая теория гиперслучайных явлений с общесистемных позиций // Математические машины и системы. — 2010. — № 2. — С. 3—9.

Горбань И.И. Эффект статистической неустойчивости в гидрофизике // Труды десятой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». — СПб.: Наука, 2010. — С. 199—201.

Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. — К.: Наук. думка, 2011. — 318 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

Горбань И.И. Особенности закона больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Радиоэлектроника. Известия вузов. — 2011. — Т. 54, № 7. — С. 31—42.

Горбань И.И. Статистическая неустойчивость физических процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 9. — С. 40—52.

Горбань И.И. Марковские гиперслучайные модели // Математические машины и системы. — 2011. — № 2. — С. 92—99.

Горбань И.И. Статистическая устойчивость колебаний температуры воздуха и осадков в районе Москвы // Математические машины и системы. — 2011. — № 3. — С. 97—104.

Горбань И.И. Закон больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Математические машины и системы. — 2011. — № 4. — С. 107—115.

Горбань И.И., Горбань Н.И., Новотрясов В.В., Ярощук И.О. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры шельфовой зоны окраинных морей // Труды VII Всероссийского симпозиума «Физика геосфер». — Владивосток, 2011. — С. 542—547.

Горбань И.И., Ярощук И.О. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры и скорости звука в океане // Тезисы доклада на конференции «КОНСОНАНС-2011». — Киев, 2011. — С. 99—104.

Горбань И.И., Коровицкий Ю.Г. Оценка статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков в Москве и Киеве // Тезисы докладов Шестой науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2011». — Киев, 2011. — С. 23—26.

Горбань И.И. Исследование статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков // Труды седьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2011». — К., 2011. — С. 175—178.

Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2012. — Т. 55, № 3. — С. 3—18.

Горбань И.И. Расходящиеся последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 1.— С. 106—118.

Горбань И.И. Статистическая устойчивость излучения астрофизических объектов // Математические машины и системы. — 2012. — № 2. — С. 155—160.

Горбань И.И. Многозначные величины, последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 3.— С. 147—161.

Горбань И.И. Критерии и параметры статистической неустойчивости // Математические машины и системы. — 2012. — № 4. — С. 106—114.

Горбань И.И., Ярощук И.О. О статистической неустойчивости колебаний температуры в Тихом океане // Гидроакустический журнал. — 2012. — № 5.— С. 11—17.

Горбань И.И. Многозначные детерминированные величины и функции // Труды седьмой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС '2012». — К., 2012. — С. 257—260.

Горбань И.И., Скорбун А.Д. Исследование нарушений статистической устойчивости колебаний скорости ветра в Чернобыле // Труды восьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2012». — К., 2012. — С. 39—42.

Горбань И.И. Проблема аксиоматизации физико-математических теорий // Труды конференции «Современное (электронное) образование MeL2012». — К., 2012. — С. 55—58.

Горбань И.И. Шестая проблема Гильберта: роль и значение физических гипотез // Математические машины и системы. — 2013. — № 1. — С. 14—20.

Горбань И.И. Энтропия неопределенности // Математические машины и системы. — 2013. — № 2. — С. 105—117.

Горбань И.И. Классификация математических моделей // Труды восьмой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС '2013». — К., 2013. — С. 370—373.

Горбань И.И. Образование статистически неустойчивых процессов // Труды девятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2013». — К., 2013. — С. 20—23.

Горбань И.И. Физико-математическая теория гиперслучайных явлений // Труды международной научной конференции «Современная информатика: проблемы, достижения и перспективы развития». — К., 2013. — С. 97—98.

Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости — К.: Наук. думка, 2014. — 444 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости // Журнал технической физики. — 2014. — Т.84, № 3. — С. 22—30.

Горбань И.И. О феномене статистической устойчивости // Математические машины и системы. — 2014. — № 4. — С. 196—206.

Горбань И.И. Теорема о спектре частот значений разряда расходящейся числовой последовательности // Математические машины и системы. — 2014. — № 4. — С. 207—210.

Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений // Procedings of 16-th international conference System Analysis and Information Technologies SAIT 2014. — Kyiv, 2014. — С. 74—75.

Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости // Труды девятой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС '2014». — К., 2014. — С. 339—343.

Горбань И.И. Статистическая устойчивость низкочастотных и полосовых шумов // Математические машины и системы. — 2015. — № 2. — С. 104—112.

Горбань И.И. Статистическая устойчивость случайных процессов // Математические машины и системы. — 2015. — № 3. — С. 100—111.

Горбань И.И. Почему точность измерения физических величин ограничена // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 4. — С. 207—210.

Горбань И.И. Признаки нарушения статистической устойчивости // Труды десятой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС '2015». — К., 2015. — С. 370—373.

Горбань И.И. Методика оценки нарушений статистической устойчивости процессов, не имеющих дисперсии // Труды десятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2015». — К., 2015. — С. 21—24.

Горбань И.И. Измерение физических величин в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях // Математические машины и системы. — 2015. — № 4. — С. 80—91.

Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. — М.: Наука, 2011. — 399 с.

ГОСТ 16263-70 ГСИ. Метрология. Термины и определения. — М.: Госстандарт, 1970. — 156 с.

ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. — М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. — 8 с.

ГОСТ Р 51317.3.3-99 (МЭК 61000-3-3—94). Совместимость технических средств электромагнитная. Колебания напряжения и фликкер, вызываемые техническими средствами с потребляемым током не более 16 А (в одной фазе), подключаемыми к низковольтным системам электроснабжения. Нормы и методы испытаний. — М.: Госстандарт России, 1999. — 20 с.

Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. — К.: Наук. думка, 2005. — 263 с.

Губарев В.В. Таблицы характеристик случайных величин и векторов. — Новосибирск, Новосибирск. электротехн. ин-т, 1981. — 225 с. (Рук. деп. в ВИНИТИ, № 3146-81).

Данні Галузевого державного архіву гідрометслужби України за 2000—2010 рр. — Центральна геофізична обсерваторія України.

Данные о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН. — http://forecast.izmiran.rssi.ru/bankr.htm.

Джунь И.В. Неклассическая теория погрешностей измерений. Международный экономико-гуманитарный ун-т им. С. Демьянчука, 2015. — 167 с.

Добронец Б.С. Интервальная математика. — Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2004. — 219 с.

Донченко В. Множественные модели неопределенности: эмпирический и математический аспекты // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 127—134.

Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 287 с.

Дыхне А.М., Снарский А.А., Женировский М.И. Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC-цепочках // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 1174, № 8. — С. 887—894.

Единая государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ. Данные Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. — http://ias.ocean.ru/esimo.

Жигальский Г.П. Неравновесный $1/f^{\gamma}$ -шум в проводящих пленках и контактах / Успехи физических наук. — 2003. — Т. 173, № 5. — С. 465—490.

Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 168 с.

Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. — М: Высшая школа, 1975. — 261 с.

Зинченко М.В., Зиньковский Ю.Ф. Особенности измерения степени хаотичности сигнала отклика // Тезисы доклада на 23-й Междунар. крымской конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» 8—13 сентября 2013 г. — Севастополь: Вебер, 2013. — С. 953—954.

Зіньковський Ю.Ф., Уваров Б.М. Радіоелектронна апаратура як об'єкт теорії гіпервипадкових явищ // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 100—108.

Зиньковский Ю.Ф., Уваров Б.М. Гиперслучайность алгоритмов моделирования современной радиоэлектронной аппаратуры // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 39—46.

Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решения. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ.— М.: Изд-во московского ун-та. — 1985. — Т. 1. — 660 с.

Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 222 с.

Карнап Р. Философские основания физики. Введение в философию науки. — П.: Прогресс, 1971. — 390 с.

Квіт І.Д. Статистична змінна. — Львів: Вища школа, 1974. — 120 с.

Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. — М.: Янус-К, 2002. — 284 с.

Кнопов П.С., Голодников А.Н., Пепеляев В.А. Оценивание параметров надежности при наличии неполной первичной информации // Компьютерная математика. — 2003. — № 1. — С. 36—37.

Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 151 с.

Коваленко И.Н. Обзор моих научных работ. Учителя и соратники // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 3—25.

Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы: Справочник. — К.: Наук. думка, 1983. — 366 с.

Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая шк., 1973. — 368 с.

Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах // Успехи физических наук. — 1985. — Т. 145, вып. 2. — С. 285—325.

Колмогоров А.Н. Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды коммунистической академии. Математика. — 1929. — С. 8—21.

Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: ОНТИ, 1936. — 175 с.; 1974. — 119 с.

Колмогоров А.Н. Теория вероятностей // Математика, ее методы и значение. — М., 1956. — Т. 2. — С. 252—284.

Колмогоров А.Н. О логических основаниях теории вероятностей // Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. — С. 467—471.

Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — 232 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 831 с.

Королюк В.С. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985. — 637 с.

Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. — 1989. — Т. 158, № 1. — С. 93—122.

Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 348 с.

Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. Справочник. — К.: Наук. думка, 1989. — 862 с.

Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. — М.: Радио и связь, 1991. — 348 с.

Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 261 с.

Кун Т. Структура научных революций. — М.: Прогресс, 1977. — 151 с.

Лаплас П.С. Изложение системы мира. — Л.: Наука, 1982. — 374 с.

Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — Т. 1. — 552 с.; 1976. — Т. 2. — 285 с.

Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 454 с.

Левин В.И. Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. — 1998. — № 6. — Эл. версия на Федеральном портале «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. 5 мая 2005. www.techno.edu.ru.

Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 150 с.

Лоэв М. Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962. — 720 с.

Луи де Бройль. Революция в физике. — М.: Атомиздат, 1965. — 231 с.

Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. М.: Наука, 1980. — 269 с.

Маликов М.Ф. Основы метрологии. — М.: Изд-во коммерприбор, 1949. — 479 с.

Марков А.А. Исчисление вероятностей. — М., 1924.

Марусенко М.Я. и др. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. Учебное пособие. — СанктПетербург: ИТМО, Государственный университет, 2009. — 165.

Математическое моделирование. — http://ru.wikipedia.org/wiki/.

Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1962. — Т. 2. — 832 с.

Мизес Р. Вероятность и статистика. — М.—Л., 1930. — 250 с.
Мир философии. Ч. 1. Исходные философские проблемы, понятия и принципы. — М.: Изд-во политической литературы, 1991. — 672 с.
Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. — М.: Мир, 1969. — 433 с.
Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с.
Новицкий П.В., Зограф И.Л., Лабунец В.С. Динамика погрешностей средств измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 192 с.
Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 706 с.
Ожегов С.И. Словарь русского языка. — М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1960. — 900 с.
Орлов А.И. Эконометрика. — М.: Экзамен, 2002. — 576 с.
Орлов А.И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 672 с.
Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 112 с.
О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А.А. Маркова и А.А. Чупрова. — М.: Наука, 1977. — 199 с.
Пайерлс Р. Построение физических моделей // УФН. — 1983. — № 6. — С. 315—332.
Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Полный путеводитель. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 912 с.
Планк М. Единство физической картины мира. — М.: Наука, 1966. — 282 с.
Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1953. — 462 с.
Полников В.Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде. — М.: Изд. группа URSS, 2007. — 408 с.
Пригожин И. Философия нестабильности // Вопросы философии. — 1991. — № 6. — С. 46—52.
Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009. — 232 с.
Проблемы Гильберта / Сб. под общ. ред. П.С. Александрова. — М.: Наука, 1969. — 238 с.
Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967. — 494 с.
Пуанкаре А. Теория вероятностей. — Ижевск, 1999. — 282 с.
Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.
Пугачев В.С. Теория случайных функций. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 883 с.
Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979. — 469 с.
Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 257 с.
Резник А.М. О структуре оптимального приемника для обнаружения локального источника сигнала в поле шумовой помехи // Радиотехника и электроника. — 1965. — № 6. — С. 979—986.
Резник А.М. О шумовом поле внутри сферы конечного радиуса, создаваемом слоем простых источников, расположенных на ее поверхности // Акустический журнал. — 1965. — Т. XI, № 1. — С. 79—83.
Резник А.М. О природе интеллекта // Математические машины и системы. — 2008. — № 1. — С. 23—45.
Рiзник О.М. Загальна модель розвитку // Математичнi машини i системи. — 2005. — № 1. — С. 84—98.
Реньи А. Письма о вероятности. — М.: Мир, 1970. — 52 с.

Рожков В.А. Теория вероятностей случайных событий, величин и функций с гидрометеорологическими примерами. — М.: Прогресс-погода, 1996. — Кн. 1. — 154 с.; — Кн. 2. — 406 с.

Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2: Случайные поля. — 464 с.

Руководство по выражению неопределенности измерений. — СПб.: ГП «ВНИИМ» им. Д.И. Менделеева, 1999. — 126 с.

Свешников А.А. Основы теории ошибок. — Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1972. — 125 с.

Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. — М.: Логос, 2001. — 329 с.

Симметрия. — http://ru.wikipedia.org/wiki/Симметрия.

Скороход А.В. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. — 1989. — № 43. — С. 5—145.

Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.

Технологии динамико-статистических долгосрочных метеорологических прогнозов: современное состояние и перспективы. — Сайт северо-европейского климатического центра. — http://seakc.meteoinfo.ru/training/.

Тимашев С.Ф. Фликкер-шумовая спектроскопия. Информация в хаотических сигналах. — М.: Физматлит, 2007. — 248 с.

Тихизм. — https://ru.wikipedia.org/wiki/Тихизм.

Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.

Труздел К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

Тутубалин В.Н. Теория вероятностей в естествознании. — М.: Знание, 1972. — 48 с.

Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. — 230 с.

Тутубалин В.Н. Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента // Успехи физических наук. — 1993. — Т. 163, № 7. — С. 93—109.

Тюрин Н.И. Введение в метрологию. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 279 с.

Уваров Б.М. Методы представления характеристик радиоэлектронной аппаратуры на основе теории гиперслучайных явлений // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — № 10. — С. 35—42.

Уваров Б.М. Гіпервипадкові функціональні характеристики радіоелектронних засобів // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 113—121.

Уваров Б.М. Проектування та оптимізація РЕЗ з гіпервипадковими макропоказниками // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2010. — № 41. — С. 90—98.

Уваров Б.М. Методологічні засади проектування радіотехнічних пристроїв з імовірнісними функціональними характеристиками // Дисертаційна робота на здобуття наукового ступеня д.т.н. — К., 2011. — 302 с.

Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. Гіпервипадкові характеристики теплових процесів у пристроях радіоелектронної апаратури // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 41. — С. 103—108.

Уваров Б.М., Зиньковский Ю.Ф. Проектирование радиоэлектронной аппаратуры с учетом гиперслучайных свойств ее функциональных // Proceedings of International scientific conference UNITECH-2010. — Gabrovo, 2010. — P. 1-171—1-176.

Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 180 с.

Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 212 с.

Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з імовірнісними характеристиками. — К.: «Корнійчук», 2011. — 248 с.

Уваров Б.М. Гиперслучайные показатели надежности РЭА // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 32—38.

Уваров Б.М., Зиньковский Ю.Ф. Применение теории гиперслучайных явлений для расчета функциональных характеристик и параметров радиоэлектронных средств // Математические машины и системы. — 2011. — № 3. — С. 121—129.

Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987. — 128 с.

Успенский В.А., Семенов А.Л., Шень А.Х. Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? // Успехи математических наук. — 1990. — Т. 45, № 1. — С. 105—162.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 260 с.

Фейнман Р. Характер физических законов. — М.: Наука, 1987. — 160 с.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 498 с.; Т. 2. — 752 с.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.—Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. — Т. 1. — 607 с.; 1959. — Т. 2. — 808 с.

Фритцш Х. Фундаментальные физические постоянные // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, № 4. — С. 383—392.

Фундаментальные физические константы. — http:// physics.nist.gov/ constants. — 2014.

Харкевич А.А. Линейные и нелинейные системы. — М.: Наука, 1973. — 566 с.

Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. — 504 с.

Хартли Р.В.Л. Теория информации и ее приложения. — М.: Физматгиз, 1969. — С. 5—35.

Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980. — 95 с.

Хинчин А.Я. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. — 1929. — № 9. — С. 141—166.

Хинчин А.Я. Математические основания статистической механики. — М.: Гостехиздат, 1941. — 117 с.

Хинчин А.Я. Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. — 1961, № 1. — С. 91—102; № 2. — С. 77—89.

Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Хьюбер П. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984. — 303 с.

Чайковский Ю.В. О природе случайности. — М.: Центр системных исследований—Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. — 280 с.

Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. — Изд-во XYZ; Институт вычислительных технологий, 2010. — 597 с. (http://www.nsc.ru/ interval).

Шейнин О.Б. Теория вероятностей. Исторический очерк. — http://www.sheynin.de, 2009.

Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — 829 с.
Ширяев А.Н. Вероятность и концепция случайности: к 75-летию выхода в свет монографии А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». — М., 2009. — 92 с.
Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты, модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.
Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 574 с.
Шишлянникова В.Н., Шишлянникова С.Н. Численные и графические методы. — Рига: РИИГВФ, 1963. — 314 с.
Шлезингер М.И., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. — К.: Наук. думка, 2004. — 545 с.
Шокин Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
Шредингер Э. Что такое жизнь? С точки зрения физика. — М.: Атомиздат, 1972. — 88 с.
Эльясберг П. С. Измерительная информация. Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? — М.: Наука, 1983. — 207 с.
Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 263 с.
Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. — М.: Наука, 1968. — 940 с.
Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1964. — 344 с.
Ярощук И.О., Попов Г.В. Статистическое моделирование распространения волн во флуктуирующих средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 156 с.
Ярощук И.О., Гулин О.Э. Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. — Владивосток: Дальнаука, 2002. — 351 с.
All-Sky Monitor (ASM) team at the Kavli Institute for Astrophysics and Space Research at the Massachusetts Institute of Technology — http://xte.mit.edu/ASM_lc.html. — 2014.
Batyrshin I., Kacprzyk J., Sheremetov L., Zadeh L.A. Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance // Studies in Computational Intelligence. — 2007. — Vol. 36. — P. 55—83.
Bernoulli J. The art of conjecturing. — 1713.
Bohlmann G. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung inihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici. — Roma, 6—11 Aprile 1908. — Vol. III, Secione 11b.
Boltzmann L. Weitere Studien Uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen // Sitzber. Acad. Wiss. Wien. — 1872. — Bd. 66. — S. 275—376.
Borel E. Sur les probabilities denombrables et leurs applications arithmetiques // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909. — N 26. — P. 247—271.
Clausius R. Uber verschiedene fur die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Warmetheorie // Ann. Phys. Folge 2. — 1865. — Bd. 125. — S. 353—400.
Crownover R.M. Introduction to fractals and chaos. — Boston—London: Jones and Bartlett Pub., Inc., 1995. — 195 p.
Ferson S., Kreinovich V., Ginzburg L., Myers D.S., Sentz K. Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures / SAND report SAND2002-4015. — 2003. — 143 p.
FOREX. — http://www.forexite.com. — 2011.
Gagnepain J.J., Uebersfeld J. — In: Proc. of Symposium on 1/f Fluctuations / Ed. T.Musha. — Tokyo, 1977. — P. 173.

Gibbs J.W. Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics. — N. Y.: Schribner, 1902. — 159 p.

Gorban I.I. New approach in optimization of space-time signal processing in hydroacoustics // Course notes to the Tutorial on the conference «Ocean'98». — France, IEEE, 1998. — 69 p.

Gorban I.I. Space-time signal processing algorithms for moving antenna // IEEE «Ocean'98». Conf. Proc. — 1998. — Vol. 3. — P. 1613—1617.

Gorban I.I. Space-time signal processing for moving antennae // Elsevier, Advances in Engineering Software. — 2000. — Vol. 31(2). — P. 119—125.

Gorban I.I. Mobile Sonar Systems: Optimization of Space-Time Signal Processing. — Kiev: Nauk. dumka, 2008. — 240 p.

Gorban I.I. Hyper-random phenomena: definition and description // Information Theories and Applications. — 2008. — Vol. 15, N 3. — P. 203—211.

Gorban I.I. Cognition Horizon and the Theory of Hyper-random Phenomena // Intern. J. of Information Theories and Applications. — 2009. — Vol. 16, N 1. — P. 5—24.

Gorban I.I. Disturbance of statistical stability // Information Models of Knowledge. — Kiev—Sofia: ITHEA, 2010. — P. 398—410.

Gorban I.I. Disturbance of statistical stability (part II) // International Journal of Information Theories and Applications. — 2011. — Vol. 18, N 4. — P. 321—333.

Gorban I.I. Divergent and multiple-valued sequences and functions // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. — Kiev—Sofia: ITHEA, 2012. — P. 359—374.

Gorban I.I. Physical phenomenon of statistical stability / I.I. Gorban // Information Theories and Applications. — 2014. — Vol. 21, N 4. — P. 377 — 391.

Graunt J. Natural and political observations made upon the bills of mortality (1662). — Baltimore, 1939.

Gray R.M. Probability, Random Processes and Ergodic Properties. — Springer Verlag, 1987. — 209 p.

Greiner J., Cuby J.G., McCaughrean M.J. An unusual massive stellar black hole in the Galaxy // Nature. — 2001. — Vol. 414. — P. 522—524.

Hagan M.T., Demuth H.B., Beale M.H. Neural network design. — Boston, MA: PWS Publishing, 1996. — 345 p.

Halpern J.Y. Reasoning about uncertainty. — MIT Press, 2003. — 497 p.

Hilbert D. Axiomatic Thinking // Chicago: Philosophia Mathematica. — 1970. — N 7.

International standard ISO 3534-1:2006 (E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. — 2006. — 105 p.

Johnson J.B. // Phys. Rev. — 1925. — Vol. 26. — P. 71.

Keller J.B. The probability of heads // Am. Math. Monthly. — 1986. — Vol. 93. — P. 191.

Kolmogorov A.N. On logical foundations of probability // Lect. Notes. Math. — 1983. — N 1021. — P. 1—5.

Kreinovich V. Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics // Reliable Computing. — 1995. — Vol. 1, N 1. — P. 33—40.

Kreinovich V., Berleant D.J., Ferson S., Lodwick W.A. Combining interval and probabilistic uncertainty: foundations, algorithms, challenges. — An Overview «Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks, and Genetic Algorithms FNG'05». — Tijuana, Mexico, 2005. — P. 1—10.

Kyburg H.E. Interval-valued probabilities // Imprecise Probabilities Project. — 1998—2000. — http://ippserv.rug.ac.be/.

Lomnicki A. Nouveaux fondements du calcul des probabilities // Fund. Math. — 1923. — Vol. 4. — P. 34—71.

MacArthur R.H. Educations of animal populations and measure of community stability // Ecology. — 1955. — Vol. 36, N 7. — P. 533—536.

Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. Bounding approaches to system identification. — New York: Plenum Press, 1996. — 248 p.

Mises R. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. — 1919. — Z. 5. — P. 52—99.

Mises R. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. — Wien, 1928.

Mises R. Mathematical theory of probability and statistics / Edited and complemented by H. Geiringer. — N.Y. and London: Acad. Press, 1964. — 232 p.

Mishura Y. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 393 p.

Moor R.E. Interval analyses. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966. — 159 p.

Neumaier A. Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 255 p.

Schottky W. Phys. Rev. — 1926. — Vol. 28, N 7. — P. 74.

Shannon C.E. A mathematical theory of communications / C.E. Shannon // Bell Systems Tech. J. — 1948. — Vol. 27. — P. 623—656.

Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu. Turbulence, ideal / Encyclopedia of Nonlinear Science. — N. Y. and London, 2005. — P. 955—957.

Shary S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable computing. — 2002. — N 8. — P. 321—418.

Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. — 1958. — Vol. 2, Misc. II. — P. 547—564.

Uncertainty of measurement. Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement // ISO/IEC Guide 98-1:2009 (OIML Guide G 1-104). — 2009. — 30 p.

Vessot R. F. C. — In: Experimental Gravitation: Proc. of Intern. School of Physics «Enrico Fermi». Course 56. — N. Y.: Academic Press, 1974. — P. 111.

Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. — N. Y.: Chapman and Hall, 1991. — 706 p.

Wornell G.W. Fractal Signals. In: Digital Signal Processing / Ed. Vijay K. Madisetti and Douglas B. Williams. — Boca Ration: CRC Press LLC, 1999.

Zadeh L.A., Kacprzyk J. Fuzzy logic for the management of uncertainty. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1992. — 256 p.

Предметный указатель

Д

Н

О

Именной указатель

Оглавление

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА

ГОРБАНЬ ИГОРЬ ИЛЬИЧ — доктор технических наук, профессор. Родился 30 августа 1952 г. в г. Киеве. В 1975 г. окончил Киевский политехнический институт по специальности «гидроакустика», а в 1978 г. — аспирантуру по той же специальности.

В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию в ЦНИИ «Морфизприбор», в 1991 г. — докторскую в Институте кибернетики АН УССР. В 1989 г. ему было присвоено ученое звание старшего научного сотрудника, а в 2000 г. — профессора.

До 1993 г. работал в Киевском НИИ гидроприборов, участвовал в проведении ряда опытно-конструкторских и научно-исследовательских работ. Был первым заместителем Главного конструктора гидроакустической станции (ГАС) с гибкой протяженной буксируемой антенной, ответственным за алгоритмическое обеспечение станции, Главным конструктором опытно-конструкторской работы по созданию ГАС на оптической элементной базе, научным руководителем двух тихоокеанских научных экспедиций по изучению гидроакустических сигналов.

С 1993 г. в течение 12 лет работал в Институте проблем математических машин и систем (ИПММС) НАН Украины в должности главного научного сотрудника, затем заместителя директора по научной работе. С 2004 по 2008 гг. работал в УкрНИУЦ Госпотребстандарта Украины в должности заместителя генерального директора по научной работе. В 2009 г. вернулся в ИПММС НАН Украины, где работает по настоящее время.

Занимается научной, научно-педагогической и научно-организационной работой. Был научным руководителем нескольких научно-исследовательских работ, преподавал в Киевском институте военно-воздушных сил, на протяжении ряда лет являлся членом экспертного совета ВАК Украины. Руководит научной работой аспирантов, член специализированных советов по защите докторских диссертаций, член редколлегий научных журналов и международных обществ, в том числе Акустического общества Америки (ASA), Института инженеров в области электротехники и электроники (IEEE) и др.

Автор трех теорий: *теории пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях*, *теории быстрой многоканальной обработки гидроакустических сигналов* (их изложению посвящены монографии (Gorban 1998 (1), 2008 (1), Горбань 2008 (1))) и *физико-математической теории гиперслучайных явлений* (ее описанию посвящены монографии (Горбань 2007 (1), 2011 (1), 2014 (1)) и настоящая книга).

Результаты исследований опубликованы более чем в 200 научных трудах, в том числе 12 монографиях, и внедрены в ряде гидроакустических станций.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ

ГОРБАНЬ Ігор Ілліч

ВИПАДКОВІСТЬ ТА ГІПЕРВИПАДКОВІСТЬ

(російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2016

Підп. до друку 07.03.2016. Формат 60 × 90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 19,6. Обл.-вид. арк. 18,0. Тираж 300 прим.
Зам. № ДФ 215

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ТОВ «Юстон ЛТД»
01034 Київ, вул. Гончара, 36
Реєстраційне свідоцтво НБ № 153324 від 05.11.20212 р.