ГОРБАНЬ ИГОРЬ ИЛЬИЧ
доктор технических наук
профессор

Научные интересы:
- гидроакустика и радиолокация
- пространственно-временная обработка сигналов
- теория вероятностей и математическая статистика

НАУКОВА ДУМКА

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

И.И. ГОРБАНЬ

проект Наукова Книга

И.И. ГОРБАНЬ

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n(N)}{N} \neq \text{const}$$

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН И СИСТЕМ

И. И. ГОРБАНЬ

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 2014

УДК 53.01:53.05 + 519.2

Монография посвящена исследованию физического феномена статистической устойчивости и изложению основ физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей физические события, величины и процессы с учетом нарушений статистической устойчивости.

Для научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также для студентов старших курсов университетов физических, технических и математических специальностей.

Монографія присвячена дослідженню фізичного феномену статистичної стійкості та викладенню основ фізико-математичної теорії гіпервипадкових явищ, що описує фізичні події, величини і процеси з урахуванням порушень статистичної стійкості.

Для наукових працівників, інженерів та аспірантів, які досліджують статистичні закономірності реальних фізичних явищ, розробляють і використовують статистичні методи високоточних вимірювань, прогнозування й обробки сигналів на великих інтервалах спостереження, а також для студентів старших курсів університетів фізичних, технічних і математичних спеціальностей.

The monograph is dedicated to the research of physical phenomenon of statistical stability and exposure of basics of physical-mathematical theory of hyper-random phenomena, the latter describing physical events, variables and processes with consideration of violation of statistical stability.

It is oriented on scientists, engineers, and post-graduate students researching in statistical laws of natural physical phenomena as well as developing and using statistical methods for high-precision measuring, prediction and signal processing on long observation intervals. The book may also be useful for high-level courses for university students majoring in physical, engineering, and mathematical fields.

Р е ц е н з е н т ы:
акад. НАН Украины, д-р физ.-мат. и техн. наук, профессор *И.Н. Коваленко*
чл.-кор. НАН Украины, д-р физ.-мат. наук, профессор *П.С. Кнопов*
д-р физ.-мат. наук, профессор *Г.П. Буцан*
д-р техн. наук *А.М. Резник*

*Рекомендовано к печати ученым советом
Института проблем математических машин и систем
НАН Украины* (*протокол № 9 от 28.08.2013*)

***Видання здійснено за державним замовленням
на випуск видавничої продукції***

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы
Редактор *В.В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1422-0

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

Почти 40 лет И.И. Горбань работает в области информатики и гидроакустики. Молодые годы он посвятил созданию современных гидроакустических станций и оптимизации пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов. Был заместителем главного конструктора и главным конструктором гидроакустических станций, научным руководителем экспериментальных работ по изучению гидроакустических сигналов в Тихом и Северном Ледовитом океанах, научным руководителем научно-исследовательских работ. Он автор двух научных теорий, послуживших основой построения ряда гидроакустических станций, а именно: теории пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях и теории быстрой многоканальной обработки гидроакустических сигналов для подвижных антенн. Их изложению посвящено несколько его монографий.

Проводя экспериментальные исследования, он обратил внимание, что на относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема данных, как правило, приводит к уменьшению уровня флуктуаций статистик. Однако на больших интервалах наблюдения уровень флуктуаций не уменьшается, что свидетельствует об отсутствии сходимости (несостоятельности) статистик и, следовательно, о неидеальном характере феномена статистической устойчивости.

Всестороннее исследование нарушений статистической устойчивости реальных процессов разной физической природы и разработка эффективных средств адекватного их описания с учетом нарушений устойчивости привели И.И. Горбаня к построению новой физико-математической теории гиперслучайных явлений.

Изложению положений этой теории посвящены две его монографии, опубликованные в 2007 и 2011 гг. Новая книга существенно отличается от предыдущих. Основное внимание уделено в ней физической стороне вопроса.

Глубокое проникновение в суть рассматриваемых явлений и всесторонний их анализ, взвешенная аргументация выводов, экспериментальное подтверждение основных теоретических положений, ориентация на решение практических задач и высокая степень обобщения полученных результатов делают монографию интересной, содержательной, оригинальной и полезной для широкого круга читателей: физиков, инженеров, математиков.

Академик Национальной академии наук Украины, профессор — *И.Н. Коваленко*

Трехсотлетию открытия
закона больших чисел посвящается

ПРЕДИСЛОВИЕ

— Свойства тел постигаются не иначе, как испытаниями; следовательно, за общее свойство надо принимать те, которые постоянно при опытах обнаруживаются и которые, как не подлежащие уменьшению, устранены быть не могут.

Исаак Ньютон

Одним из удивительных *физических феноменов* является статистическая устойчивость массовых явлений, проявляющаяся в стабильности статистик.

Современная теория вероятностей (включающая в широком понимании и математическую статистику) описывает массовые явления с помощью случайных (вероятностно-случайных или, иначе, стохастических) математических моделей, характеризуемых вероятностной мерой.

В основе построения таких моделей лежит *физическая гипотеза идеальной статистической устойчивости*, предполагающая наличие сходимости частоты реальных событий и средних значений физических величин.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости не вызывала сомнений. Однако последние экспериментальные исследования различных физических величин и процессов на больших интервалах наблюдения показали, что она *не находит экспериментального подтверждения*.

На относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения увеличение объема данных приводит к уменьшению уровня флуктуаций статистик. При больших же объемах эта тенденция не прослеживается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не изменяется. Это указывает на отсутствие сходимости реальных статистик (их несостоятельность).

Исследования нарушений статистической устойчивости физических явлений и разработка эффективных средств адекватного описания мира с учетом таких нарушений привели к построению новой *физико-математической теории — теории гиперслучайных явлений.*

В теории вероятностей базовыми математическими объектами (моделями) являются случайные событие, величина и функция; в теории гиперслучайных явлений в таком качестве выступают гиперслучайные событие, величина и функция, представляющие собой множества несвязанных между собой случайных событий, величин и функций, рассматриваемые как единое целое.

Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений базируется на классических аксиомах теории вероятностей А.Н. Колмогорова, физическая — на гиперслучайных физических гипотезах: *гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей* и на *гипотезе адекватного описания этих физических явлений гиперслучайными моделями.*

С точки зрения математики теория гиперслучайных явлений — ветвь теории вероятностей; с точки зрения физики — новая теория, основанная на новых представлениях об окружающем мире.

Предлагаемая монография посвящена исследованию физического феномена статистической устойчивости и изложению основ теории гиперслучайных явлений. Оба вопроса частично рассматривались в двух предыдущих монографиях 2007 и 2011 гг. [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)].

Все три книги написаны на основе оригинальных теоретических и экспериментальных исследований автора, результаты которых опубликованы в различных научных журналах, в частности [Горбань, 2005—2014, Gorban, 2008—2012].

Каждая из книг имеет свою специфику. В монографии 2007 г. рассмотрены, в основном, математические вопросы теории гиперслучайных явлений, в монографии 2011 г. — математические и физические вопросы. В предлагаемой монографии особое внимание уделено проблеме нарушения сходимости в физике и математике.

Основополагающие идеи этих книг формировались, начиная с конца 70-х годов XX столетия:

• при выполнении научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ в области прикладной гидроакустики [Gorban, 1998, 2008 (1), Горбань, 2008 (1)],

• в процессе чтения лекций по теории вероятностей и математической статистике [Горбань, 1998, 2000, 2003] курсантам Киевского института военно-воздушных сил (бывшего КВИАУ) и, конечно же,

• в ходе целенаправленных экспериментальных и теоретических исследований нарушений статистической устойчивости физических процессов.

Целью данной монографии является обобщение результатов экспериментальных исследований феномена статистической устойчивости реальных физических процессов, а также развитие, систематизация и уточнение ряда базовых положений теории гиперслучайных явлений.

Книга состоит из пяти частей. *Первая часть* посвящена рассмотрению особенностей феномена статистической устойчивости и разработке методики исследования нарушений статистической устойчивости, в том числе при ограниченном объеме данных. *Вторая часть* содержит описание множества экспериментальных исследований, посвященных изучению нарушений статистической устойчивости разнообразных процессов разной физической природы. *Третья часть* представляет краткое изложение математических основ теории гиперслучайных явлений. *Четвертая часть* посвящена обобщению математических положений теории гиперслучайных явлений и формированию основ математического анализа расходящихся и многозначных функций. *Пятая часть* содержит теоретические и экспериментальные исследования статистических закономерностей при нарушениях статистической устойчивости.

* * *

Монография ориентирована на научных работников, инженеров и аспирантов, исследующих статистические закономерности реальных физических явлений, разрабатывающих и использующих статистические методы высокоточных измерений, прогнозирования и обработки сигналов на больших интервалах наблюдения, а также на студентов старших курсов университетов физических, технических и математических специальностей.

Для понимания материала книги достаточно знаний в объеме стандартного курса теории вероятностей и математической статистики технических университетов.

* * *

Рассматриваемые в монографии вопросы лежат на стыке физики, математики и технических приложений. Поэтому к рецензированию настоящей монографии, как и предыдущих двух, были привлечены ученые разных специальностей.

Автор признателен всем, кто прочитал рукопись, высказал свои критические замечания и принял участие в конструктивном обсуждении книги.

Особую благодарность автор выражает официальным рецензентам: акад. НАН Украины, д.ф.-м.н., д.т.н., проф. И.Н. Коваленко, чл.-кор. НАН Украины, д.ф.-м.н., проф. П.С. Кнопову, д.ф.-м.н., проф. Г.П. Буцану и д.т.н. А.М. Featureнику, ознакомившихся с рукописью и высказавших ряд критических замечаний, способствовавших улучшению содержания книги.

Автор благодарен чл.-кор. НАН Украины П.М. Томчуку, чл.-кор. АН Молдавии К.В. Гаиндрику, д.ф.-м.н., проф. О.Г. Сарбею, д.т.н., проф. В.И. Иваненко, д.т.н., проф. В.А. Касьянову и д.т.н., проф. М.И. Шлезингеру за предоставленные возможности выступить на руководимых ими семинарах, а также всем участникам этих семинаров за плодотворное обсуждение материалов, касающихся феномена статистической устойчивости.

Автор признателен акад. НАН Украины В.Т. Гринченко, акад. РАН В.А. Акуличеву, акад. РАН Р.И. Нигматулину, акад. РАН Ю.И. Шокину, чл.-кор. НАН Украины Н.Ю. Кузнецову, чл.-кор. НАН Украины В.С. Лысенко, д.т.н., проф. Ю.Ф. Зиньковскому, д.ф.-м.н., проф. В.Н. Тутубалину, д.т.н., проф. А.В. Харченко, д.ф.-м.н., проф. С.П. Шарому, д.ф.-м.н. И.О. Ярощуку и многим другим, проявляющим устойчивый интерес к проводимым им работам, в частности в области теории гиперслучайных явлений.

Автор благодарен директору ИПММС НАН Украины чл.-кор. НАН Украины, д.т.н., проф. А.А. Морозову и заместителю директора по научной работе д.ф.-м.н., проф. В.П. Клименко за поддержку проводимых им исследований и помощь, оказанную ими при подготовке монографии.

* * *

Замечания и рекомендации можно направлять автору по адресу:

Институт проблем математических машин и систем
НАН Украины
пр. Глушкова, 42, Киев, 03680, Украина,

адрес электронной почты: igor.gorban@yahoo.com

ВВЕДЕНИЕ

Феномен статистической устойчивости. Одним из удивительных физических явлений является феномен статистической устойчивости, проявляющийся в *стабильности статистик* — функций выборки (частоты массовых событий, средних величин и пр.) Этот *феномен наблюдается повсеместно и потому его можно отнести к числу фундаментальных явлений природы.*

На феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание торговец сукном Дж. Граунт в 1669 г. [Graunt, 1939] Исследования этого феномена привели к построению теории вероятностей, широко используемой в настоящее время в различных областях науки и техники.

Аксиоматизация теории вероятностей. До начала XX в. теория вероятностей рассматривалась как физическая теория, описывающая феномен статистической устойчивости.

В начале прошлого века был поднят вопрос об аксиоматизации теории вероятностей. Давид Гильберт сформулировал эту проблему как составную часть задачи аксиоматизации законов физики [Проблемы Гильберта, 1969].

Многие известные ученые приложили немало усилий для решения этой задачи. Предлагались разные подходы. Общепризнанным в настоящее время считается *теоретико-множественный подход А.Н. Колмогорова*, возведенный в ранг международного стандарта ISO [International standard, 2006].

Понятие случайного явления. В соответствии с подходом А.Н. Колмогорова *случайное событие* описывается с помощью *вероятностного пространства*, задаваемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где Ω — *пространство элементарных событий* $\omega \in \Omega$, $\Im$ — *борелевское поле* (σ-алгебра подмножеств событий) и P — вероятностная мера (вероятность) подмножеств событий.

Под *случайной величиной* понимается измеримая функция, определенная на пространстве Ω элементарных случайных событий ω, а под *случайной функцией* — функция независимого аргумента, значение которой при фиксированном его значении представляет собой случайную величину.

Под *случайным явлением* понимается *математический объект* (*случайное событие*, *величина* или *функция*), который исчерпывающе характеризуется определенным, вполне конкретным законом распределения вероятностей.

В дальнейшем *явление или математическая модель, не описываемая конкретным законом распределения, случайным не считается.* Это чрезвычайно важное положение, на которое следует обратить особое внимание.

Понятие вероятности. В теории вероятностей ключевым является понятие вероятности события. В приведенном определении (по А.Н. Колмогорову) оно не имеет физической трактовки.

При более наглядном статистическом определении вероятности (по Р. фон Мизесу [Mises, 1919, 1928, 1964, Мизес, 1930]) вероятность $P(A)$ случайного события A представляется как предел частоты $p_N(A)$ его наблюдения при проведении опытов в одинаковых статистических условиях и устремлении количества опытов N к бесконечности: $P(A) = \lim\limits_{N \to \infty} p_N(A)$.

При небольших значениях N частота $p_N(A)$ может сильно флуктуировать, однако по мере увеличения N постепенно стабилизируется и при $N \to \infty$ стремится к определенному пределу $P(A)$.

Физические гипотезы теории вероятностей. Все математические теории, в том числе основанная на системе аксиом А.Н. Колмогорова теория вероятностей, касаются абстрактных математических понятий. *Они не связаны с реальным физическим миром.* Корректное их применение на практике возможно *при принятии физических гипотез, утверждающих адекватность описания объектов реального мира соответствующими математическими моделями.*

Корректность использования теории вероятностей обеспечивается принятием двух *физических гипотез:*

• *гипотезы идеальной статистической устойчивости* (*статистической прогнозируемости*) *параметров и характеристик* физических явлений — реальных событий, величин, процессов и полей, означающей *наличие сходимости статистик к некоторым постоянным величинам*, а также

• *гипотезе адекватного описания реальных физических явлений случайными (стохастическими) моделями.*

Полагают, что гипотеза идеальной статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений. Тем самым принимается *концепция устройства мира на случайных принципах.*

Гипотеза идеальной статистической устойчивости. Одним из основных требований к физическим гипотезам является их *согласованность с опытными данными.*

Многие годы *гипотеза идеальной статистической устойчивости* не вызывала сомнений, хотя некоторые ученые (даже А.Н. Колмогоров и такие известные ученые как А.А. Марков [Марков, 1924, с. 67], А.В. Скороход [Иваненко, Лабковский, 1990, с. 4], Э. Борель [Борель 1961, с. 28, 29], В.Н. Тутубалин [Тутубалин, 1972 (2), с. 6, 7] и др.) обращали внимание, что в реальном мире эта гипотеза справедлива лишь с определенными оговорками.

Нарушение статистической устойчивости в реальном мире. Экспериментальные исследования на больших интервалах наблюдения разнообразных процессов разной физической природы показывают, что *гипотеза идеальной статистической устойчивости не подтверждается.*

Реальный мир постоянно изменяется. Изменения происходят на всех уровнях, в том числе статистическом. Статистические оценки, сформированные на относительно небольших интервалах наблюдения, обладают относительной стабильностью. Проявляется она в том, что при увеличении объема статистических данных уровень флуктуаций значений оценок уменьшается. Это создает иллюзию идеальной статистической устойчивости. Однако, начиная с некоторого критического объема, при увеличении количества данных уровень флуктуаций практически не изменяется, а иногда даже растет. Это обстоятельство указывает на неидеальный характер статистической устойчивости.

Нарушение статистической устойчивости в реальном мире означает, что *понятие вероятности не имеет физической интерпретации. Вероятность оказывается математической абстракцией.*

Нарушение статистической устойчивости в детерминированных и случайных моделях. Нарушение статистической устойчивости наблюдается в разных моделях, даже детерминированных и случайных.

Типичный пример — случайная величина, имеющая распределение Коши. Это распределение не имеет моментов и поэтому любые оценки его моментов *статистически неустойчивы* (*несостоятельны*).

Причины нарушения статистической устойчивости в реальном мире. Нарушения статистической устойчивости обусловлены разными причинами. Существенную роль играют *приток в открытую систему извне вещества, энергии и* (*или*) *информации*, питающий неравновесные процессы, различные *нелинейные преобразования*, *низкочастотная линейная фильтрация* особого вида и др.

Установлено, что *статистическая устойчивость процесса определяется его спектральной плотностью мощности*. Показано, что в результате низкочастотной фильтрации широкополосный стационарный статистически устойчивый шум может трансформироваться в статистически неустойчивый процесс.

Исследование нарушений статистической устойчивости и поиск эффективных способов адекватного описания реальных явлений окружающего мира с учетом этих нарушений привели к построению новой *физико-математической теории гиперслучайных явлений* [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)].

Понятие гиперслучайного явления. В теории вероятностей базовыми математическими объектами (моделями) являются случайные явления — случайные событие, величина и функция; в теории гиперслучайных явлений в таком качестве выступают *гиперслучайные явления — гиперслучайные событие*, *величина* и *функция*, представляющие собой множества несвязанных между собой соответствующих случайных объектов, рассматриваемых как единое целое.

Гиперслучайное событие можно описать с помощью тетрады $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — борелевское поле, G — множество условий $g \in G$, P_g — вероятностная мера подмножеств событий, зависящая от условия g. Таким образом, вероятностная мера задается для всех подмножеств событий и всех возможных условий $g \in G$. Меры же для условий $g \in G$ нет.

Используя статистический подход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, *частота появления которого* $p_N(A)$ *при увеличении числа опытов* N *не стабилизируется и при* $N \to \infty$ *не имеет предела*. В данном случае частота событий свойством статистической устойчивости не обладает. Однако таким свойством могут обладать другие статистики, например, статистики, описывающие *границы диапазона изменения частоты событий.*

Случайное явление исчерпывающе описывается вероятностным распределением, а гиперслучайное явление — множеством условных вероятностных распределений.

Случайная величина X, например, полностью характеризуется функцией распределения $F(x)$, а гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ — *множеством условных функций распределения* $F(x / g)$, $g \in G$.

Гиперслучайная величина может быть представлена не только таким множеством, но и другими характеристиками и параметрами, в частности верхней $F_S(x) = \sup_{g \in G} F(x / g)$ и нижней $F_I(x) = \inf_{g \in G} F(x / g)$ границами функции распределения, центральными и нецентральными моментами этих границ, границами моментов и др.

Связь гиперслучайных моделей с другими моделями. *Случайную величину* можно интерпретировать как гиперслучайную величину, у которой границы функции распределения совпадают: $F_S(x) = F_I(x) = F(x)$.

Детерминированную величину x_0 приближенно можно рассматривать как вырожденный случай случайной (или гиперслучайной) величины с функцией распределения $F(x)$, имеющей единичный скачок в точке x_0.

Интервальная величина, характеризуемая границами интервала x_1, x_2, может быть представлена гиперслучайной величиной, у которой границы функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$ имеют единичные скачки соответственно в точках x_1 и x_2.

Таким образом, *гиперслучайная величина является обобщением понятий детерминированной, случайной и интервальной величин.* Благодаря такой универсальности с помощью гиперслучайных моделей можно моделировать разнообразные физические явления, обладающие разной степенью и видом неопределенности.

Детерминизм и неопределенность. На протяжении столетий считалось, что мир основан на детерминированных принципах. Обнаружение феномена статистической устойчивости поколебало эти представления. Выяснилось, что существенную роль играет не только детерминизм, но и неопределенность.

Важной формой неопределенности является *многозначность*. Многозначными математическими объектами являются случайные явления, интервальные величины и функции, а также гиперслучайные явления. Во всех них присутствует неопределенность, хотя и разного вида. *Неопределенность случайных явлений имеет вероятностную меру, а интервальные величины и функции меры не имеют. Гиперслучайные явления содержат неопределенность обоих типов.*

Объект и предмет исследования теории гиперслучайных явлений. *Объектом исследования* теории гиперслучайных явлений являются реальные физические явления — события, величины, процессы и поля, а *предметом исследования* — нарушения статистической устойчивости характеристик и параметров реальных физических явлений.

Общая характеристика теории гиперслучайных явлений. Теория гиперслучайных явлений имеет математическую и физическую составляющие. Математическая составляющая основана на классических аксиомах теории вероятностей А.Н. Колмогорова, физическая — на двух гиперслучайных физических гипотезах адекватности:

- *гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей* и
- *гипотезе адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями.*

Предположение, что эти гипотезы справедливы для широкого круга массовых явлений, ведет к принятию *новой концепции устройства мира: его устройству на гиперслучайных принципах.* Основополагающая роль в ней отводится ограниченной статистической устойчивости.

С точки зрения математики теория гиперслучайных явлений — *ветвь теории вероятностей*; с точки зрения физики — *новая теория*, основанная на новых представлениях об устройстве окружающего мира.

Закон больших чисел и центральная предельная теорема при нарушении статистической устойчивости. Факт нарушения статистической устойчивости проявляется в статистических свойствах физических явлений, в частности, описываемых законом больших чисел и центральной предельной теоремой.

Исследования показывают, что *как при отсутствии, так и при наличии нарушений статистической устойчивости выборочное среднее случайной выборки стремится к среднему математических ожиданий.* При отсутствии нарушений статистической устойчивости оно сходится к определенному числу, а *при нарушении устойчивости — стремится к бесконечности* (*плюс или минус*) *или флуктуирует в пределах определенного интервала.* В общем случае предельное выборочное среднее такой выборки может представлять собой число, случайную величину, интервал или гиперслучайную величину с непрерывной зоной неопределенности, ограниченную, как правило, кривыми, состоящими из фрагментов гауссовских кривых.

Выборочное среднее *гиперслучайной выборки сходится к фиксированной величине* (*числу*)*, к множеству фиксированных величин* (*чисел*)*, флуктуирует в одном или нескольких непересекающихся интервалах или стремится к бесконечности.* При этом предельное выборочное среднее такой выборки может представлять собой число, интервал, мультиинтервал, случайную величину или гиперслучайную величину с необязательно непрерывной зоной неопределенности, ограниченную кривыми, состоящими из фрагментов гауссовских кривых.

Потенциальная точность измерений при нарушении статистической устойчивости. Одним из важнейших вопросов является вопрос о *потенциальной точности измерений.*

Согласно классическим представлениям, разработанным еще Галилео Галилеем, измеряемая физическая величина может быть представлена *однозначной детерминированной величиной*, а результат измерения — *случайной величиной.* Погрешность измерения имеет две составляющие: *систематическую* и *случайную.*

Согласно теории вероятностей при устремлении объема выборки к бесконечности случайная составляющая стремится к нулю и в целом погрешность — к систематической составляющей. Однако на практике, как известно, это не происходит. Виной тому — нарушение статистической устойчивости.

В рамках гиперслучайной парадигмы *погрешность носит гиперслучайный характер* и *описывается гиперслучайной величиной.*

В общем случае *выделить в гиперслучайной погрешности отдельные составляющие не удается.* В одном из простейших случаев (когда границы функции распределения гиперслучайной погрешности отличаются друг от друга только математическими ожиданиями границ) *погрешность можно разделить на систематическую, случайную* и *неопределенную* (*непрогнозируемую*), описываемую интервальной величиной.

При устремлении объема выборки к бесконечности гиперслучайная погрешность *сохраняет гиперслучайный характер.*

Это объясняет многие известные, но долгое время остававшиеся непонятными факты, в частности, почему точность любых физических измерений ограничена, почему при использовании большого числа экспериментальных данных точность не зависит от объема данных и др.

Как формируется неопределенность. Существует множество путей образования неопределенности. Простейший из них — *нелинейное преобразование*, порождающее многозначность. *Усреднение детерминированных данных при отсутствии сходимости* также может приводить к образованию неопределенности.

Эффективность различных моделей. Разные модели по-разному и с разной точностью описывают недетерминированные свойства окружающего мира.

Поскольку понятие вероятности не имеет физической интерпретации, надо признать, что стохастические модели описывают эти свойства приближенно. Адекватное описание могут обеспечить *интервальные и гиперслучайные модели.*

Указанное обстоятельство, однако, не означает что стохастические и другие подобные модели бесполезны. Не полное соответствие моделей моделируемым объектам существенно лишь при больших объемах выборки. Зачастую объемы выборок невелики. Тогда погрешность описания реальных объектов стохастическими и другими приближенными моделями *пренебрежимо мала.* Как правило, эти модели проще, чем интервальные и гиперслучайные, и поэтому во многих случаях *оказываются предпочтительными.*

Необходимость в более сложных интервальных и гиперслучайных моделях возникает тогда, когда *проявляется ограниченный характер феномена статистической устойчивости* — обычно при больших интервалах наблюдения и больших объемах выборки.

Область применения гиперслучайных моделей. Первоочередная область применения гиперслучайных моделей связана со статистической обработкой различных физических процессов (электрических, магнитных, электромагнитных, акустических, гидроакустических, сейсмоакустических, метеорологических и пр.)

большой длительности, а также с *высокоточными измерениями физических величин* и *прогнозированием физических процессов на основе статистической обработкой больших массивов данных.*

Гиперслучайные модели могут использоваться также при моделировании физических событий, величин, процессов и полей, для которых ввиду чрезвычайной малости объема статистического материала невозможно получить качественные оценки параметров и характеристик, а можно лишь указать границы, в которых они находятся.

Проблема формализации физических понятий. Использование нестохастических моделей, к числу которых относятся интервальные и гиперслучайные модели, обостряет скрытую *проблему корректной формализации физических понятий, определяемых с использованием стохастических моделей*, в частности, понятия энтропии.

Сложность в том, что вероятность не имеет физической интерпретации, и поэтому все физические понятия, использующие понятие вероятности, оказываются фактически неопределенными. Но эту трудность, как выясняется, можно преодолеть.

Математический анализ расходящихся и многозначных функций. Теория гиперслучайных явлений затрагивает *малоизученную область математики, касающуюся нарушения сходимости и многозначности.*

Современная математика построена на математическом анализе, оперирующем с однозначными последовательностями и функциями, имеющими однозначные пределы.

Развитие методов теории гиперслучайных явлений привело к формированию основ *математического анализа расходящихся и многозначных функций. Понятие предела обобщено на случай расходящихся* (*в обычном смысле*) *последовательностей и функций, а понятия сходимости, непрерывности, дифференцируемости, первообразной, неопределенного и определенного интегралов — на случай многозначных функций.*

Перечисленные вопросы рассматриваются в монографии.

* * *

Структура книги. Монография состоит из пяти частей. *Первая часть* (главы 1—8) посвящена рассмотрению особенностей феномена статистической устойчивости и разработке методики исследования нарушений статистической устойчивости, в том числе при ограниченном объеме данных. *Вторая часть* (главы 9—13) содержит описание множества экспериментальных исследований, посвященных изучению нарушений статистической устойчивости разнообразных процессов разной физической природы.

Третья часть (главы 14—21) представляет краткое изложение математических основ теории гиперслучайных явлений. *Четвертая часть* (главы 22—25) посвящена обобщению математических положений теории гиперслучайных явлений и формированию основ математического анализа расходящихся и многозначных функций. *Пятая часть* (главы 26—33) содержит теоретические и экспериментальные исследования статистических закономерностей при нарушениях статистической устойчивости.

Ниже приведены аннотации глав.

Глава 1. Рассмотрены основные проявления феномена статистической устойчивости: статистическая устойчивость частоты событий и среднего значения. Обращено внимание, что феномен статистической устойчивости обладает свойством эмерджентности и присущ физическим явлениям не только стохастической природы. Обсуждена гипотеза идеальной (абсолютной) статистической устойчивости, предполагающая наличие сходимости частоты событий и средних величин. Приведены примеры статистически неустойчивых процессов. Обсуждены термины «одинаковые статистические условия» и «непрогнозируемые статистические условия».

Глава 2. Описана шестая проблема Д. Гильберта, касающаяся аксиоматизации физики. Рассмотрены общепризнанные математические принципы аксиоматизации теории вероятностей и механики. Предложен вариант решения шестой проблемы на основе дополнения аксиом аксиоматизированных математических теорий, описывающих законы физики, физическими гипотезами адекватности, устанавливающими связь между математическими теориями и реальным миром. Рассмотрены основополагающие понятия теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Сформулированы гипотезы адекватности для теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Обращено внимание, что понятие вероятности не имеет физической интерпретации в реальном мире.

Глава 3. Рассмотрены различные концептуальные взгляды на устройство мира с позиций детерминизма и неопределенности. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного представления моделей с помощью функции распределения. Предложена классификация математических моделей.

Глава 4. Рассмотрены случайные величины и случайные процессы, статистически неустойчивые по отношению к определенным статистикам. Проанализированы с точки зрения статистической устойчивости различные виды нестационарных процессов.

Глава 5. Формализовано понятие статистической устойчивости. Введены параметры статистической неустойчивости. Предложены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Введены понятия статистической устойчивости/неустойчивости процессов в узком и широком смыслах. Исследована статистическая устойчивость ряда моделей процессов.

Глава 6. Исследована зависимость статистической устойчивости процесса от особенностей его временных характеристик, в частности от параметров флуктуации математического ожидания и корреляции отсчетов.

Глава 7. Рассмотрено преобразование Винера—Хинчина. Отмечено, что существуют случайные процессы, которые не имеют одновременно корреляционной функции, характерной для стационарного процесса, и спектральной плотности мощности. Установлена связь между статистической устойчивостью непрерывного процесса и его спектральной плотностью мощности. Исследована статистическая устойчивость непрерывных процессов со степенной спектральной плотностью мощности.

Глава 8. Установлена связь между статистической устойчивостью дискретного процесса и его спектральной плотностью мощности. Приведены результаты моделирования, подтверждающие корректность формул, описывающих зависимость параметров статистической неустойчивости от спектральной плотности мощности процесса.

Глава 9. Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости различных физических процессов: собственных шумов усилителя, гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют. Обращено внимание, что на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости не обнаруживаются, однако на больших интервалах наблюдения все процессы оказываются статистически неустойчивыми.

Глава 10. Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районах Москвы и Киева, а также скорости ветра в районе Чернобыля. Все исследованные процессы оказались статистически неустойчивыми. Степень их неустойчивости разная. Установлено, что колебания температуры значительно более неустойчивы, чем колебания количества осадков.

Глава 11. Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры и скорости звука в Тихом океане. Установлена статистическая неустойчивость этих процессов.

Глава 12. Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости излучения астрофизических объектов в рентгеновском диапазоне частот. Все исследованные колебания оказались статистически неустойчивыми. Наиболее устойчивыми явились колебания интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307. Установлено, что на всем интервале наблюдения эти колебания статистически устойчивы по отношению к среднему, но неустойчивы по отношению к среднеквадратическому отклонению.

Глава 13. Рассмотрены разные типы шумов: цветные, фликкер шумы, самоподобные (фрактальные). Обобщены результаты исследований статистической устойчивости различных шумов и процессов. Исследованы причины нарушения статистической устойчивости. Установлено, что статистически неустойчивые процессы могут образовываться разными путями: в результате поступления извне в открытую систему вещества, энергии и (или) информации, нелинейных и даже линейных преобразований.

Глава 14. Введено понятие гиперслучайного события. Для описания гиперслучайного события использованы условные вероятности и границы вероятностей. Приведены свойства этих параметров.

Глава 15. Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие исчерпывающее описание гиперслучайной величины), границы функции распределения и их моменты, а также границы моментов. Приведены свойства этих характеристик и параметров.

Глава 16. Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Методы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Приведены свойства характеристик и параметров векторных гиперслучайных величин.

Глава 17. Введено понятие скалярной гиперслучайной функции. Рассмотрены различные способы ее представления. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие наиболее полную характеристику гиперслучайной функции), а также границы функции распределения, плотности распределения границ, моменты границ и границы моментов.

Глава 18. Изложены основы математического анализа случайных функций: определены понятия сходимости последовательности случайных величин и функций, производной и интеграла случайной функции. Введены понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

Глава 19. Известные для случайных функций понятия стационарности и эргодичности обобщены на гиперслучайные функции. Рассмотрены спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций. Приведены свойства стационарных и эргодических гиперслучайных функций.

Глава 20. Проанализированы различные способы представления гиперслучайных величин и процессов на предмет целесообразности их применения при различных типах преобразований. Приведены соотношения, связывающие характеристики и параметры преобразованных и исходных гиперслучайных величин и процессов. Даны рекомендации по использованию различных способов описания гиперслучайных величин при линейных и нелинейных преобразованиях, а также гиперслучайных процессов при безынерционных и инерционных преобразованиях.

Глава 21. Формализовано понятие гиперслучайной выборки и приведены ее свойства. Описана методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины. Акцентировано внимание на нарушении сходимости реальных оценок и адекватности их описания гиперслучайными моделями.

Глава 22. Понятие предела сходящейся числовой последовательности обобщено на случай расходящихся последовательностей и функций. В отличие от обычного предела, принимающего обязательно единственное значение, обобщенный предел принимает множество значений. Для расходящейся числовой последовательности введено понятие спектра предельных точек. Доказана теорема о последовательности средних.

Глава 23. Приведен способ описания расходящихся последовательностей и функций с помощью функций распределения. Доказана теорема о спектре частот значений разряда последовательности. Приведены примеры описания расходящихся функций.

Глава 24. Рассмотрены различные варианты описания многозначных величин и функций. С помощью математического аппарата теории гиперслучайных явлений формализованы понятия многозначной величины и многозначной функции. Установлена связь между многозначностью и нарушением сходимости. Введены понятия спектров и функций распределения многозначных величин и функций.

Глава 25. Для многозначных функций введены понятия непрерывной функции, производной, неопределенного и определенного интегралов, а также спектра главных значений определенного интеграла.

Глава 26. Установлено, что закон больших чисел, известный для последовательности случайных величин, справедлив как при наличии, так и отсутствии сходимости выборочного среднего. При отсутствии сходимости выборочное среднее приближается к среднему математических ожиданий, синхронно флуктуируя с ним в определенном интервале. Закон больших чисел обобщен на случай последовательности гиперслучайных величин. Исследованы особенности проявления обобщенного закона больших чисел.

Глава 27. Исследованы особенности центральной предельной теоремы для последовательности случайных величин при наличии и отсутствии сходимости выборочного среднего к фиксированному числу. Обобщена центральная предельная теорема на случай последовательности гиперслучайных величин. Приведены результаты экспериментальных исследований, демонстрирующие отсутствие сходимости выборочных средних реальных физических процессов к фиксированным числам.

Глава 28. Проанализированы две концепции оценки точности измерений: концепция погрешности и концепция неопределенности. Рассмотрен ряд моделей измерений.

Глава 29. Исследована детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок — понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Показано, что гиперслучайные оценки детерминированных величин несостоятельны и поэтому точность измерений оказывается ограниченной.

Глава 30. Рассмотрена гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем и частных случаях. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

Глава 31. Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

Глава 32. Проанализированы различные варианты определения понятия энтропии. Понятие шенноновской энтропии для случайных величин распространено на неопределенные величины, не имеющие вероятностной меры. Введены понятия энтропии гиперслучайной и интервальной величин.

Глава 33. Исследованы пути формирования неопределенности. Выяснено, что неопределенность возникает в результате определенного типа нелинейных преобразований и в процессе усреднения детерминированных величин при отсутствии сходимости. Дано теоретическое обоснование тому, что интервальные, мультиинтервальные и гиперслучайные модели способны адекватно отражать реалии окружающего мира, а случайные модели могут обеспечивать лишь приближенное их описание.

В **Приложении 1** приведены высказывания известных ученых по поводу феномена статистической устойчивости, в **Приложении 2** — базовые понятия интервальной арифметики, в **Приложении 3** — практические рекомендации, касающиеся исследования статистической устойчивости процессов, а в **Приложении 4** кратко изложена история формирования теории гиперслучайных явлений.

В **список литературы** включены работы отечественных и зарубежных авторов, использованные при написании монографии.

ЧАСТЬ I

ОСОБЕННОСТИ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Первая, вводная, часть монографии, включающая восемь глав, посвящена описанию физического феномена статистической устойчивости, анализу его свойств и учету этих свойств в рамках известных теорий.

Обращено внимание, что феномен статистической устойчивости реальных физических явлений носит ограниченный характер, проявляющийся в отсутствии тенденции сходимости средних величин. Поэтому в реальном мире понятие вероятности не имеет физической интерпретации.

Проанализированы разные концептуальные взгляды на устройство мира с позиций детерминизма и неопределенности. Проведено сопоставление варианта описания физических явлений без учета нарушений статистической устойчивости, широко используемого в теории вероятностей, с альтернативным вариантом описания реальных явлений с учетом нарушений статистической устойчивости, предлагаемого теорией гиперслучайных явлений.

Формализовано понятие статистической устойчивости процессов, введены параметры статистической неустойчивости и единицы их измерения, описана методика оценки степени нарушения устойчивости на интервалах конечной длительности, установлены зависимости нарушений статистической устойчивости процессов от особенностей их временных и спектральных характеристик.

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрены основные проявления феномена статистической устойчивости: статистическая устойчивость частоты событий и среднего значения. Обращено внимание, что феномен статистической устойчивости обладает свойством эмерджентности и присущ физическим явлениям не только стохастической природы. Рассмотрена гипотеза идеальной (абсолютной) статистической устойчивости, предполагающая наличие сходимости частоты событий и средних величин. Приведены примеры статистически неустойчивых процессов. Обсуждены термины «одинаковые статистические условия» и «непрогнозируемые статистические условия».

1.1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЧАСТОТЫ СОБЫТИЙ

Феномен статистической устойчивости проявляется в *стабильности статистик*[1], в частности, частоты событий, выборочных средних и прочих выборочных моментов.

На феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание в 1669 г. торговец сукном Дж. Граунт [Graunt, 1939]. Сохранились отрывочные сведения об исследованиях статистической устойчивости, проводимые в период с конца XVII по конец XIX столетия Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, О. Курно, А. Кетле, Я. Бернулли и др. [Шейнин, www, Чайковский, 2004].

Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX века. Немецкий статистик В. Лексис в 1879 г. впервые попытался связать понятие статистической устойчивости частоты с дисперсией случайной величины. На рубеже столетий и в начале XX века исследованием статистической устойчивости занимались К. Пирсон, А.А. Чупров, В.И. Бортке-

[1] Под статистикой понимается функция выборки.

Таблица 1.1

№	Исследователь	Количество опытов	Число выпадений орла	Частота выпадений орла
1	Бюффон	4 040	2 048	0,508
2	К. Пирсон	12 000	6 019	0,5016
3	К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005
4	Фейнман	3 000	1 492	0,497
5	Де Морган	4 092	2 048	0,5005
6	Джевонс	20 480	10 379	0,5068
7	Романовский	80 640	39 699	0,4923
8	Феллер	10 000	4 979	0,4979

Таблица 1.2

№ серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число выпадений орла	502	518	497	529	504	476	507	528	504	529

вич, А.А. Марков, Р. фон Мизес и др. [Шейнин, www, Чайковский, 2004].

Известно, например, что частоту выпадения определенной стороны монеты исследовали П.С. Лаплас, Ж.Л. Бюффон, К. Пирсон, Р.Ф. Фейнман и многие другие ученые.

В табл. 1.1 и на рис. 1.1, *а* приведены некоторые результаты их экспериментов [Гнеденко, 1961, 1988, Фейнман, Лейтон, Сэндс, 1965, Рожков, 1996]. В табл. 1.2 и на рис. 1.1, *б* представлены результаты десяти серий опытов по бросанию монеты [Мостеллер, Рурке, Томас, 1969, с. 91] (каждая серия состояла из 1000 опытов).

Эти таблицы и рисунки, отражают не вызывающий сомнения факт, что при большом количестве опытов частота выпадения определенной стороны монеты близка к 0,5. Однако отметим, что они *не свидетельствуют о наличии сходимости этой частоты к определенному числу* (в данном случае к 0,5). Более того, графики, скорее, указывают на отсутствие сходимости, чем на ее наличие.

Долгое время полагали, что частоты реальных событий обладают свойством сходимости. На этом базируется теория вероятностей. Однако приведенные результаты экспериментальных

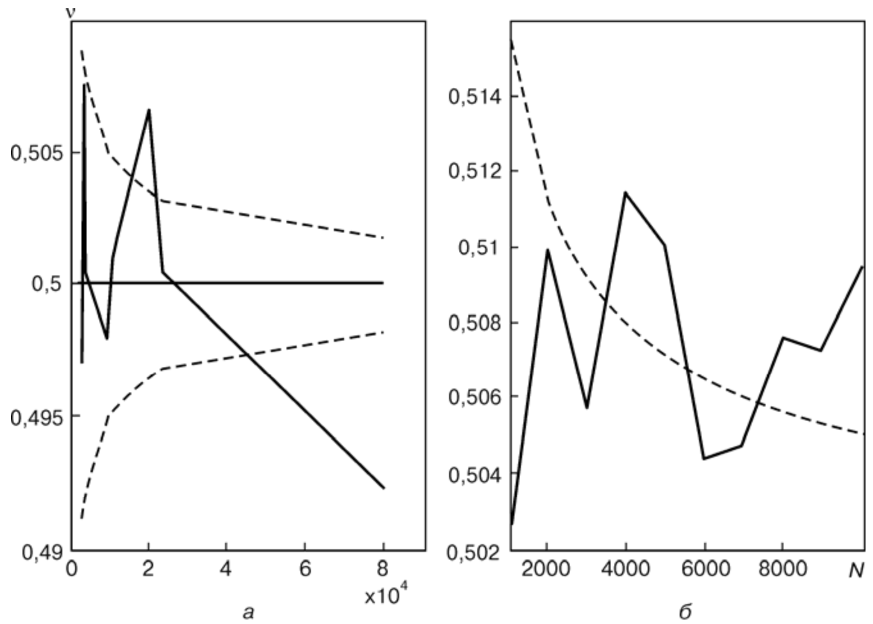


Рис. 1.1. Зависимости частоты выпадения орла ν от количества опытов N по данным табл. 1.1 (*а*) и табл. 1.2 (*б*). Пунктирными линиями изображены односигмовые отклонения от ожидаемого значения, равного 0,5

исследований зарождают сомнение в справедливости этого утверждения. Вопрос о наличии сходимости представляется не бесспорным.

1.2. ЭМЕРДЖЕНТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТОТЫ

В теории систем и синергетике используется понятие эмерджентности или «системного эффекта».

Под *системой* [2] подразумевается множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство.

Под *эмерджентностью* [3] понимается существование у системы некоторых свойств, не присущих отдельным ее подсистемам

[2] Слово система переводится с древнегреческого языка как целое, составленное из частей; соединение.

[3] Слово эмерджентность (emergence) переводится с английского языка как возникающий, неожиданно появляющийся.

и блокам. Эмерджентность является одной из форм проявления *закона перехода количественных изменений в качественные.*

Примером системы, обладающей эмерджентными свойствами, является стая рыб или птиц, поведение которой сильно отличается от поведения входящих в нее особей. Эмерджентные свойства демонстрирует групповое поведение людей в социуме. Отличие свойств химических веществ от свойств, входящих в них химических элементов — также проявление эмерджентности.

Статистическая устойчивость частоты — свойство *массовых* (множественных) *событий.* Это свойство не присуще одиночному событию, но присуще их совокупности. Поэтому *статистическую устойчивость частоты можно рассматривать как эмерджентное свойство.*

Механизм формирования эмерджентности далеко не всегда ясен. Если, например, специфическое поведение стаи рыб или отличие свойств химических веществ от свойств, входящих в них химических элементов, можно объяснить наличием определенных связей между элементами системы, то феномен статистической устойчивости частоты событий при отсутствии какой-либо явной связи между отдельными событиями представляется загадочным.

Природа феномена статистической устойчивости остается до конца непонятной. Предпринимаемые на протяжении веков попытки прояснить ситуацию не привели к какому-либо существенному положительному результату.

Объяснение этого феномена находится на том же уровне, что и объяснение других физических феноменов, таких как феномены существования электромагнитного поля, гравитационного поля, инерционности материальных тел и др.

В рамках определенных физических или математических моделей можно пытаться искать и даже находить объяснения этим феноменам. Но все эти объяснения не выходят за рамки ограничений и предположений, принимаемых при построении моделей. Истинная же физическая сущность феноменов остается закрытой.

Однако отсутствие ясного понимания сущности того или иного физического феномена не служит препятствием для построения феноменологических теорий, оказывающихся полезными для решения практических задач.

Классическими примерами таких теорий являются теоретическая механика, основанная на законах Ньютона, феноменологическая теория Максвелла, описывающая электромагнитное поле, теория относительности Эйнштейна и многие другие.

Следует обратить внимание, что все теории естествознания являются феноменологическими. В их основе лежат некие физические феномены, не объясняемые самой теорией, а принимаемые как неоспоримые истины.

В рамках этих теорий не ставится вопрос о причинах, вызывающих тот или иной феномен. Основное внимание уделяется другим вопросам, в первую очередь особенностям проявления феномена в реальном мире и адекватному его описанию математическими средствами.

В полной мере это относится и к феномену статистической устойчивости.

1.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Феномен статистической устойчивости проявляется не только в стабильности частоты массовых событий, но и в стабильности средних значений процессов или их выборочных средних:

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n , \tag{1.1}$$

где x_n — n-й дискретный отсчет процесса ($n = \overline{1, N}$).

Рассмотрим для примера реализацию шума с равномерной спектральной плотностью мощности (*белого гауссовского шума*) (рис. 1.2, *а*). Значение выборочного среднего этого процесса, как видно из рис. 1.2, *б*, изменяется при изменении числа усредняемых отсчетов (интервала усреднения). По мере увеличения числа отсчетов флуктуации выборочного среднего уменьшаются и среднее значение постепенно стабилизируется.

Этот эффект можно наблюдать не только, когда процесс случайный, но и когда он *детерминированный* (например, при любых периодических, в частности, гармонических колебаниях (рис. 1.2, *в*, *г*)).

При относительно небольших интервалах усреднения тенденция к стабилизации среднего прослеживается во многих реальных физических процессах.

Для примера на рис. 1.3 приведены результаты исследования выборочного среднего колебаний напряжения электросети на протяжении 100 с.

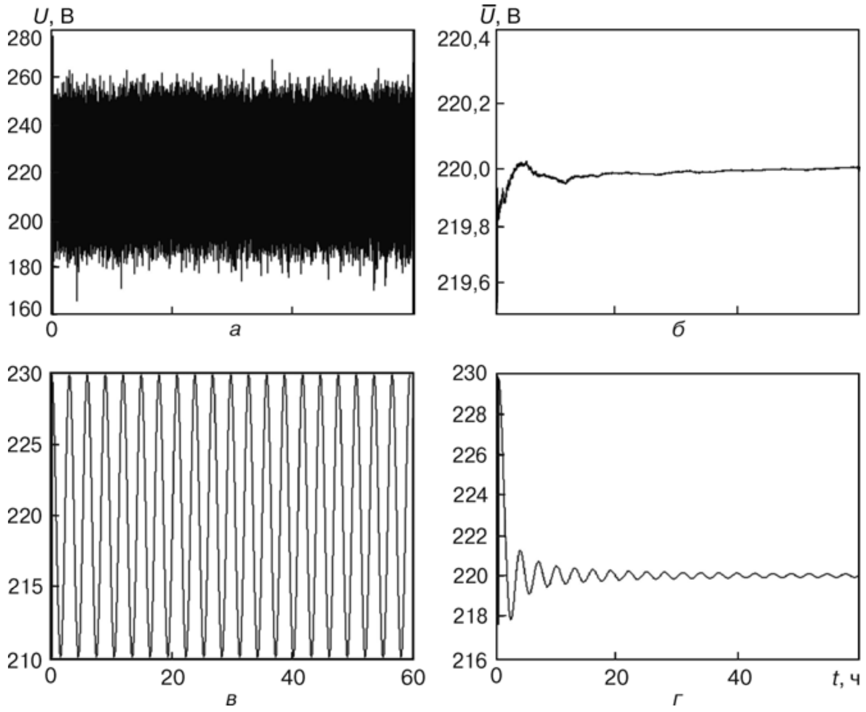


Рис. 1.2. Реализация белого гауссовского шума (модель 1) (*а*), гармоническое колебание (модель 2) (*в*) и соответствующие им выборочные средние (*б*, *г*)

Как следует из рис. 1.3, *а*, колебание напряжения содержит периодическую (практически гармоническую) и шумовую составляющие. По мере увеличения интервала усреднения в пределах от нуля до 100 с обе составляющие подавляются. В результате среднее значение напряжения стабилизируется (рис. 1.3, *б*).

Заметим, что феномен статистической устойчивости наблюдается при вычислении и других статистик, например, выборочной дисперсии

$$\bar{D}_{z_N} = \frac{1}{N-2}\sum_{n=2}^{N}(z_n - \bar{m}_{z_N})^2 \qquad (1.2)$$

выборочного среднеквадратического отклонения (СКО)

$$z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}) \qquad (1.3)$$

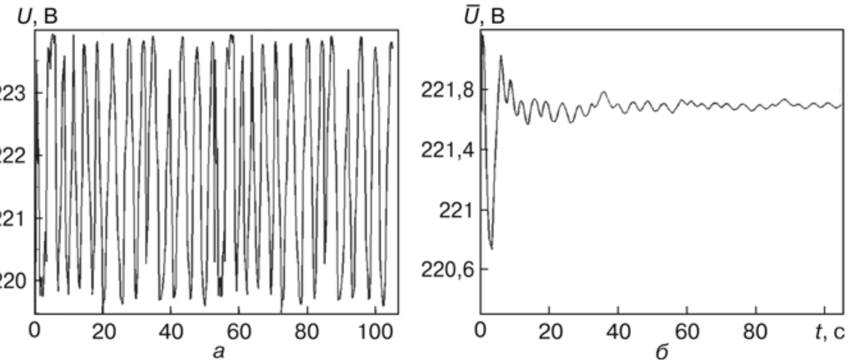


Рис. 1.3. Изменение во времени напряжения электросети (*а*) и соответствующего выборочного среднего (*б*)

дискретных отсчетов x_n ($n = \overline{1, N}$), где

$$\bar{m}_{z_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} z_n \tag{1.4}$$

— среднее флуктуации выборочного СКО (1.3).

Обычно феномен статистической устойчивости связывают со случайными явлениями, изучаемыми в теории вероятностей, однако следует обратить внимание, что он присущ также некоторым явлениям нестохастической природы, в частности, *описываемых периодическими детерминированными функциями* (см. рис. 1.2, *в*, *г*).

Феномен статистической устойчивости наблюдается в реальной жизни повсеместно и поэтому его можно отнести *к числу фундаментальных явлений природы.*

1.4. ГИПОТЕЗА ИДЕАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Приведенные результаты модельных и экспериментальных исследований вроде бы указывают, что частота реальных событий и усредненные величины реальных физических процессов обладают свойством сходимости.

На первый взгляд представляется вполне правдоподобным предположение, что *частота* $p_N(A)$ *любого реального события* A *стремится к некоторой величине* $p(A)$ (*вероятности*), а *выбороч-*

ное среднее дискретных отсчетов x_n ($n = 1, 2, \ldots$) *любого реального процесса имеет предел*

$$y = \lim_{N \to \infty} y_N = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \,. \qquad (1.5)$$

В пользу этого предположения указывают математически строгие доказательства сходимости статистик различных математических моделей процессов.

Однако, понятно, никакие результаты, полученные для моделей, не могут заменить строгого доказательства сходимости частот реальных событий и сходимости выборочных средних реальных процессов. А такого доказательства нет, и оно не может быть получено, поскольку *в реальной жизни объем выборки всегда ограничен.*

Отметим, что наблюдаемая стабильность частоты реальных событий и выборочных средних физических величин *не гарантируют* сходимость.

На основе экспериментальных данных, фиксирующих феномен статистической устойчивости, можно лишь *предполагать наличие сходимости*. Это предположение можно формализовать в виде *гипотезы идеальной статистической устойчивости*.

Заметим, что рассматриваемая гипотеза касается не абстрактных математических моделей, а реального физического мира. Поэтому это *физическая гипотеза*. Никакого отношения к математике она не имеет. Математика в данном случае выступает лишь как средство формализации предположения и не более того.

В теории вероятностей (особенно в прикладных ее разделах и математической статистике) гипотеза идеальной статистической устойчивости играет исключительно важную роль. Связано это с часто используемым предположением, что частота $p(N)$ любого реального массового события имеет некоторый предел

$$p = \lim_{N \to \infty} p(N) \,, \qquad (1.6)$$

трактуемый как вероятность [4].

Гипотеза идеальной статистической устойчивости позволяет дать физическую трактовку не только понятию вероятности, но одной из основных характеристик теории вероятностей — функции распределения.

[4] При этом, однако, в современной теории вероятностей, как математической дисциплине, вероятность не связывают со сходимостью частоты событий.

Функцию распределения $F(x)$ случайной величины X можно рассматривать как предел *выборочной* (*эмпирической*) *функции распределения*

$$F_N^*(x) = \frac{N(x)}{N}, \tag{1.7}$$

представляющей собой при фиксированном значении аргумента x частоту события, состоящего в том, что рассматриваемая переменная величина X в серии из N опытов принимает значения, меньшие величины x, т. е.

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} F_N^*(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(x)}{N}, \tag{1.8}$$

где $N(x)$ — количество случаев, когда величина X оказалась меньше величины x.

1.5. СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Исследования различных физических процессов на больших интервалах наблюдения показывают (см., например, [Горбань, 2011 (1), Эльясберг, 1983]), что гипотеза идеальной статистической устойчивости *не находит экспериментального подтверждения* и, следовательно, *феномен статистической устойчивости носит неидеальный характер.*

По мере увеличения интервала наблюдения оценка дисперсии выборочного среднего реальных процессов, а также оценки дисперсий других статистик вначале уменьшаются, а затем, достигнув определенного значения, остаются практически на одном и том же уровне или возрастают. Иногда наблюдается чередование циклов спадания и нарастания оценок дисперсий.

Как правило, эти оценки не проявляют тенденции стремления к нулю. В исключительно редких случаях такая тенденция наблюдается по отношению к одной из статистик, но при этом по другим статистикам она не наблюдается. Ни в одном из экспериментов, например, *не было зафиксировано тенденции стремления одновременно к нулю оценки дисперсии выборочного среднего и оценки дисперсии СКО.*

Экспериментальные исследования реальных процессов показывают, что при большом объеме данных *не проявляет тенденции к сходимости* и *эмпирическая функция распределения.*

Результаты этих исследований указывают на то, что *нарушение статистической устойчивости — особенность, присущая, по всей*

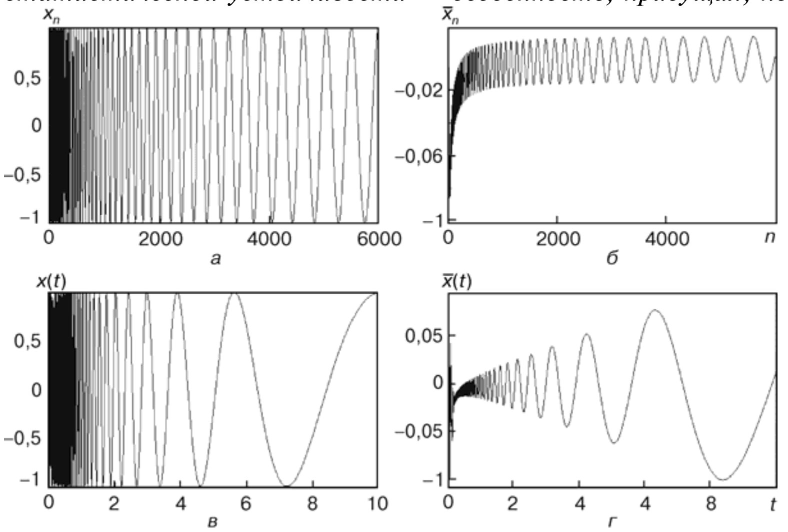


Рис. 1.4. Фрагменты последовательности (1.9) (*а*), непрерывного процесса (1.10) (*в*) и соответствующие им средние (*б*, *г*) (f_1 = 100, f_2 = 0,002, N = 6000)

видимости, всем физическим событиям, величинам, процессам и полям. Исключения, возможно, составляют лишь некоторые мировые константы, такие, как скорость света, постоянная Планка и др. [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)].

На относительно небольших временных, пространственных и пространственно-временных интервалах наблюдения гипотеза идеальной статистической устойчивости обычно хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований, однако на больших интервалах обнаруживаются существенные расхождения.

Методика и результаты экспериментальных исследований нарушений статистической устойчивости реальных физических величин и процессов детально описаны в части II настоящей монографии и в параграфе 27.3.

Пока же ограничимся несколькими примерами, демонстрирующими, что не все процессы обладают свойством идеальной статистической устойчивости.

Нарушение сходимости имеет место, например, в случае дискретной последовательности (рис. 1.4, *а*):

$$x_n = \cos(2\pi f_1 \lg n / \lg N), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

и непрерывного процесса (рис. 1.3, *в*):

$$x(t) = \sin\left[1/(2\pi f_2 t)\right], \quad t > 0\,, \tag{1.10}$$

где f_1, f_2 — частотные параметры, N — параметр масштаба, t — текущее время.

У последовательности (1.9) при большом числе усредняемых отчетов амплитуда флуктуации средней величины практически не изменяется (рис. 1.4, *б*), а у процесса (1.10) — даже возрастает (рис. 1.4, *г*). В обоих случаях средние величины не имеют предела, т. е. оба процесса статистически неустойчивы.

Реальные процессы оказываются статистически неустойчивыми. Для примера на рис. 1.5 приведены результаты исследования колебания напряжения городской электросети на протяже-

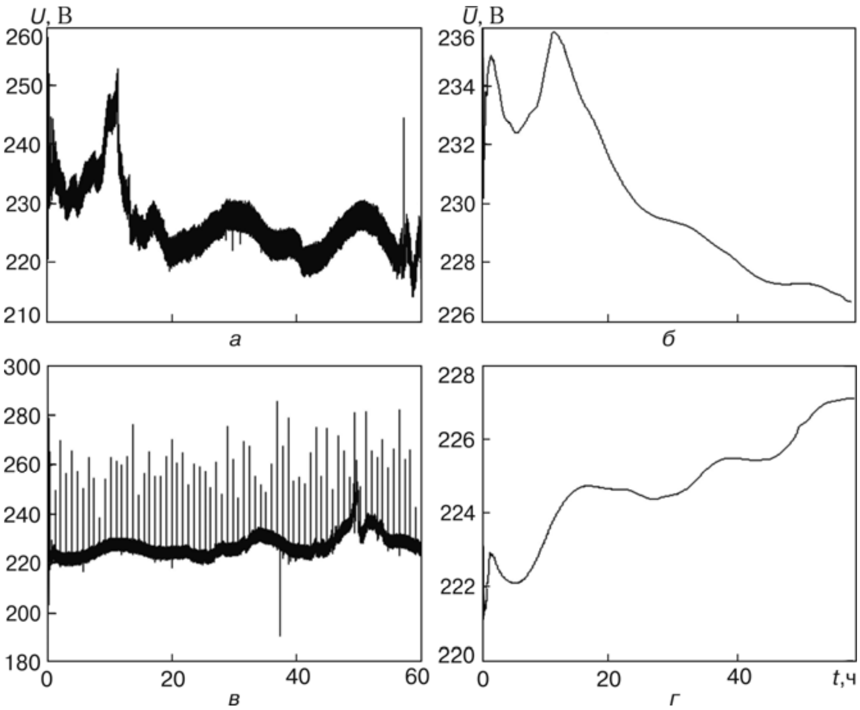


Рис. 1.5. Изменение во времени напряжения электросети на протяжении двух сеансов записи (*а*, *в*) и соответствующие выборочные средние (*б*, *г*)

нии двух с половиной суток. Как видно из рисунка, в данном случае выборочные средние не стабилизируются даже при очень большом времени усреднения.

1.6. ОДИНАКОВЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИ НЕПРОГНОЗИРУЕМЫЕ УСЛОВИЯ

Объясняя в рамках теории вероятностей феномен статистической устойчивости, обычно обращают внимание на необходимость проведения опытов *в одинаковых статистических условиях.*

Понятие «одинаковые статистические условия» не такое тривиальное, как может показаться на первый взгляд, да и словосочетание «статистические условия» требует некоторого пояснения.

В экспериментах, например, с подбрасыванием монеты под статистическими условиями можно понимать способ бросания монеты, высоту и силу броска, скорость и направление движения воздушных потоков, степень шероховатости поверхности, на которую падает монета, и т. д. При этом каждый из перечисленных пунктов может быть детализирован. Рассматривая, например, способы бросания, можно выделить бросание плашмя, с вращением, с подбрасыванием вверх, через плечо, на пол, на стол, с задаваемым или не задаваемым положением монеты до броска и др.

Если бы совокупность всех условий проведения эксперимента полностью воспроизводилась в каждом опыте, то результаты опытов были бы одинаковыми. Но достичь этого невозможно.

«Одинаковые статистические условия» нельзя понимать буквально. Всегда при экспериментальных исследованиях часть условий изменяется от опыта к опыту, причем неконтролируемым для экспериментатора образом. Это приводит к тому, что результаты (исходы) опытов перестают быть точно предсказуемыми. Изменение условий при переходе к очередному опыту может приводить (хотя и необязательно) к исходу, отличающемуся от результата предыдущего опыта.

При относительно небольшом количестве опытов среднее значение (в частности частота события) существенно зависит от числа опытов N, условий, при которых проводится каждый опыт, и очередности смены этих условий.

При наличии сходимости по мере увеличения числа опытов среднее значение все в меньшей и меньшей степени зависит от условий и порядка смены условий. Оно даже перестает зависеть от условий, при которых проводятся любое *ограниченное число опытов.*

Когда говорят о проведении опытов *в одинаковых статистических условиях*, имеют в виду проведение опытов *не в постоян-*

ных (*неизменных*) *условиях*, а в (*возможно изменяющихся*) *условиях, при которых обеспечивается сходимость рассматриваемой усредненной величины* (*параметра*) *к определенному пределу*.

Наличие сходимости означает потенциальную возможность (теоретически) *абсолютно точного статистического прогноза* значений средних величин при бесконечном объеме выборки (*получения оценки с нулевой погрешностью*).

Таким образом, одинаковые статистические условия гарантируют сходимость рассматриваемого выборочного среднего и потенциальную возможность абсолютно точного прогнозирования.

Как видно, широко используемый термин «одинаковые статистические условия» оказывается не очень удачным. В него вкладывается не тот смысл, какой можно предполагать.

Отметим, что для разных статистик (например, для выборочного среднего (1.1) и выборочной дисперсии (1.2)) условия, при которых обеспечивается сходимость, *могут различаться*. В тех случаях, когда на указанных различиях внимание не акцентируют, подразумеваются условия, обеспечивающие *сходимость выборочной функции распределения* $F_N^*(x)$.

Известно (см., например, [Корн Г., Корн Т., 1977, Горбань, 2003]), что множество всех моментов случайной величины при условии их существования и ограниченности однозначно определяет функцию распределения. Поэтому *статистические условия, при которых имеет место сходимость всех выборочных моментов, обеспечивают сходимость и выборочной функции распределения*. Заметим, *что обратное утверждение неверно*.

Не все распределения имеют моменты [5]. Поэтому статистические условия, обеспечивающие сходимость выборочной функции распределения, не гарантируют сходимость выборочных моментов.

Альтернативой одинаковым статистическим условиям являются непрогнозируемые статистические условия.

Когда говорят, что опыты проводятся в *статистически непрогнозируемых условиях*, акцентируют внимание на том, что статистические условия изменяются, причем так, что *рассматриваемая статистика расходится*.

Нарушение сходимости приводит к тому, что *абсолютно точный статистический прогноз характеристик и параметров явлений* (*получение оценок с нулевой погрешностью*) *оказывается невозможным даже при бесконечном объеме выборки*.

---

[5] Например, распределение Коши (Лоренца) не имеет моментов.

ПРИНЦИПЫ ОПИСАНИЯ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Описана шестая проблема Д. Гильберта, касающаяся аксиоматизации законов физики. Рассмотрены общепризнанные математические принципы аксиоматизации теории вероятностей и механики. Предложен вариант решения шестой проблемы на основе дополнения аксиом аксиоматизированных математических теорий, описывающих законы физики, физическими гипотезами адекватности, устанавливающими связь между математическими теориями и реальным миром. Рассмотрены основополагающие понятия теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Сформулированы гипотезы адекватности для теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений. Отмечено, что понятие вероятности не имеет физической интерпретации в реальном мире.

2.1. ШЕСТАЯ ПРОБЛЕМА Д. ГИЛЬБЕРТА

В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков, на котором с программным докладом «Математические проблемы» [Проблемы Гильберта, 1969] выступил Давид Гильберт. Он сформулировал 23 наиболее важные, по его мнению, проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». Шестой проблемой им было названо «Математическое изложение аксиом физики».

Часть доклада, касающуюся шестой проблемы, Д. Гильберт начал со слов: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика».

Вопросу аксиоматизации науки Д. Гильберт уделял большое внимание на протяжении всей жизни. В докладе, прочитанном в 1917 г. на заседании Швейцарского математического общества, он говорил [Hilbert, 1970]: «По мере дальнейшего развития любой науки становится все более необходимым целенаправленное выделение ее основополагающих предположений в чистом виде, осознание их в качестве аксиом и «помещение» их в «фундамент» данной области знания». И далее: «Механизм аксиоматического метода приводит к более глубоким основаниям знания, ибо это действительно необходимо для более совершенного его построения» [1].

Обратим внимание, что в контексте шестой проблемы Д. Гильберт рассматривал теорию вероятностей не как математическую, а как физическую дисциплину. Судя по всему, он воспринимал теорию вероятностей как раздел физики, предметом исследования которой является феномен статистической устойчивости.

Интересен комментарий Б.В. Гнеденко к шестой проблеме [Проблемы Гильберта, 1969]: «... для Гильберта теория вероятностей является главой физики, в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания».

Как видим, существуют разные взгляды на теорию вероятностей. В дальнейшем будем придерживаться точки зрения Д. Гильберта.

2.2. АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МЕХАНИКИ

На призыв Д. Гильберта откликнулись многие ученые. Различные подходы к решению проблемы аксиоматизации теории вероятностей предлагали Г. Бохльман (1908), С.Н. Бернштейн (1917), Р. фон Мизес (1918), А. Ломницкий (1923) (на основе идей Э. Бореля), А.Н. Колмогоров (1929) и др. [Проблемы Гиль-

---

[1] Следует отметить, что далеко не все ученые разделяли (и сейчас разделяют) точку зрения Д. Гильберта по вопросу аксиоматизации. Известна, например, позиция видного математика В.И. Арнольда [Арнольд, 1999], считавшего математику частью физики и критиковавшего попытки создания замкнутого изложения дисциплин в строго аксиоматической форме.

берта, 1969], а аксиоматизации механики — Г. Бохльман, Г. Гамель (1908), В. Нолл (1957), К. Трузделл и др. [Трузделл, 1975].

Некоторые ученые, в частности, Р. фон Мизес, рассматривали проблему с позиций естествознания, другие же, как, например, А.Н. Колмогоров, В. Нолл и К. Трузделл, — с математических позиций.

В настоящее время общепризнанным в области теории вероятностей считается аксиоматический подход А.Н. Колмогорова [Колмогоров, 1974], основанный на концепциях теории множеств и теории меры. Этот подход, ставший классическим, возведен даже в ранг международного стандарта ISO [International standard ISO 3534-1, 2006]. В дальнейшем будем придерживаться его.

Базовым понятием теории вероятностей является понятие *случайного события.* Случайные события рассматриваются как математические объекты, описываемые с помощью *вероятностного пространства* (борелевского поля вероятностей), задаваемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где Ω — *пространство элементарных событий* $\omega \in \Omega$, $\Im$ — σ-алгебра подмножеств событий (*борелевское поле*) и P — вероятностная мера подмножеств событий [Колмогоров, 1974].

Под *случайной величиной* X понимается произвольная измеримая функция, определенная на пространстве Ω элементарных случайных событий ω. Значение x случайной величины X может быть представлено в виде некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Множество значений случайной величины образует *пространство значений случайной величины.* Случайная величина задается не только пространством ее значений, но и параметрами, характеризующими вероятность появления тех или иных значений этого пространства.

Под *случайной функцией* $X(t)$ подразумевается числовая функция независимого аргумента t (часто имеющая смысл времени), значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$ (где T — область определения аргумента) представляет собой случайную величину, называемую *сечением.* Множество значений всех сечений случайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*). Если пространство состояний одномерно, то *случайная функция скалярная* (тогда ее называют *процессом*), если пространство многомерное, то — *функция векторная.*

Под i-й *реализацией случайной функции* $X(t)$ (*выборочной функцией*) понимается детерминированная функция $x_i(t)$, которая для фиксированного опыта $i \in I$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ одно из значений $x \in S$.

Существенным для нас в этих определениях является то, что случайные событие, величина и функция (*случайные явления*) — *многозначные математические объекты, характеризуемые вероятностной мерой.* Так

• случайное событие исчерпывающе описывается *вероятностью*;

• случайная величина X — *функцией распределения* $F(x) = P\{X < x\}$, где $P\{X < x\}$ — вероятность выполнения неравенства $X < x$;

• скалярная случайная функция $X(t)$ — *функцией распределения* $F(\vec{x};\vec{t}) = P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_L) < x_L\}$, где $\vec{x} = (x_1, ..., x_L)$ — L-мерный вектор значений этой случайной функции в моменты времени $t_1, ..., t_L$, образующие L-мерный вектор времени $\vec{t} = (t_1, ..., t_L)$.

Обратим внимание, что математические объекты, не имеющие вероятностной меры, *случайными* (*стохастическими*) *не считаются.*

Поскольку тема монографии не касается непосредственно механики, не будем детально останавливаться на вопросе ее аксиоматизации. Лишь отметим, что в области механики классическими считаются фундаментальные работы В. Нолла и К. Трузделла, сформировавших аксиоматическую рациональную механику, представляющую собой «часть математики, которая поставляет и исследует логические модели для описания изменений положения и формы, претерпеваемых повседневно наблюдаемыми нами вещами» [Трузделл, 1975].

Обратим внимание, что и теория вероятностей, и рациональная механика *интерпретируются как математические дисциплины.*

Не следует, однако, забывать, что обе эти дисциплины, а также другие формализованные теории, трактуемые в настоящее время как чисто математические, но в то же время широко используемые при описании физических явлений, *неразрывно связаны с физическими особенностями окружающего мира.*

Поэтому при аксиоматизации необходимо учитывать эти связи и рассматривать их не как математические, а *как физико-математические, в которых физические начала играют не менее значимую роль, чем математические.*

2.3. ПУТЬ РЕШЕНИЯ ШЕСТОЙ ПРОБЛЕМЫ Д. ГИЛЬБЕРТА

Во многих современных теориях физические объекты и предметы исследования заменяются абстрактными математическими объектами и зависимостями — математическими моделями. Такой прием значительно облегчает решение физических задач и обеспечивает нахождение решений в общем виде, но при этом нарушается связь с реальностью, в результате чего ограничивается возможность проникновения в физическую сущность исследуемых явлений.

В качестве объекта и предмета изучения выступают уже не реальные физические явления и физические закономерности, а их абстрактные математические модели. Например, в классической теории вероятностей объектом исследования оказывается абстрактное вероятностное пространство, а предметом исследования — математические зависимости между его элементами. Сам же физический феномен статистической устойчивости частоты событий, лежащий в основе этой дисциплины, вроде бы вообще не играет никакой роли, хотя в действительности, конечно, это не так.

При аксиоматизации физических дисциплин более конструктивным представляется подход, при котором *объектом изучения является реальный физический мир, а предметом изучения — физические феномены.*

Такая постановка вопроса касается не только теории вероятностей и механики, но и других разделов физики. В настоящее время существует много различных аксиоматизированных математических теорий, полезных для решения практических задач. Для корректного их использования достаточно системы математических аксиом дополнить *физическими предположениями* (*гипотезами*), устанавливающими связь между абстрактными теориями и реальным миром.

Основные требования, предъявляемые к таким физическим гипотезам (*аксиомам адекватности* [Горбань, 2011 (1)]), наряду с непротиворечивостью и независимостью, — это учет экспериментально подтверждаемых физических эффектов окружающего мира, определяющих предмет исследования, а также адекватность описания этих эффектов математическими моделями рассматриваемой теории.

Принятие необходимых физических гипотез превращает абстрактную математическую теорию в *физико-математическую теорию*, в рамках которой возможно логически корректное описание действительности.

2.4. ОПИСАНИЕ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассматривая теорию вероятностей как физико-математическую теорию, необходимо дополнить систему математических аксиом А.Н. Колмогорова, лежащих в основе ее математической части, физическими гипотезами.

В качестве аксиом адекватности могут выступать следующие физические гипотезы [Горбань, 2011 (1)]:

Гипотеза 1. *Реальные массовые явления обладают свойством идеальной статистической устойчивости частоты* (*иначе: при увеличении объема выборки частота любого события сходится к постоянной величине*).

Гипотеза 2. *Массовые явления адекватно описываются стохастическими моделями, которые исчерпывающе характеризуются функциями распределения.*

При решении практических задач вероятностного характера эти гипотезы обычно принимаются неосознанно, как сами собой разумеющиеся.

Полагают, что они справедливы для широкого круга массовых физических явлений. Тем самым принимается *концепция устройства мира на случайных* (*стохастических*) *принципах* [2].

[2] Направление в философии, проповедующее господство во Вселенной случая, называется *тихизм*. В переводе с греческого это слово означает «случай». Основоположником тихизма является американский философ *Чарльз Сандерс Пирс*. Доктрина тихизма предполагает существование элемента абсолютной случайности в устройстве Вселенной. По мнению Пирса, случай играет ключевую роль в эволюции, Вселенная обладает свободой выбора законов, фатальная необходимость в природе отсутствует, случай определяет разнородность и разнокачественность вещей, а саморазвитие приводит к устойчивости [Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия, http].

2.5. УЧЕТ НАРУШЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В параграфе 1.5 отмечалось, что экспериментальные исследования на больших интервалах наблюдения не подтверждают гипотезу идеальной статистической устойчивости (гипотезу 1). Однако на не очень больших интервалах наблюдения неполное соответствие реалий этой гипотезе обычно не приводит к существенным потерям. Тогда применение теории вероятностей, безусловно, оправданно.

На больших же интервалах наблюдения неидеальный характер статистической устойчивости играет существенную роль. Игнорировать это обстоятельство нельзя.

Для корректного применения классической теории вероятностей, в принципе, достаточно заменить гипотезу 1 на следующую:

Гипотеза 1′. *Реальные массовые явления обладают свойством ограниченной статистической устойчивости частоты* (*иначе: при увеличении объема выборки частота событий не сходится к постоянной величине*).

Замена гипотезы 1 на 1′ приводит к значительным математическим трудностям, связанным *с нарушением сходимости*. Возможны разные варианты их преодоления. Разработка одного из них привела к созданию *физико-математической теории гиперслучайных явлений* [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)].

Базовыми математическими моделями классической теории вероятностей служат случайные событие, величина и функция, исчерпывающе характеризуемые функциями распределения. В роли же аналогичных моделей теории гиперслучайных явлений выступают *гиперслучайные событие, величина и функция*, представляющие собой множества *не связанных между собой* соответственно случайных событий, величин и функций, рассматриваемые как единое целое.

Существенным является то, что гиперслучайные событие, величина и функция — *многозначные объекты, исчерпывающе характеризуемые множествами вероятностных мер*. Так

• *гиперслучайное событие* исчерпывающе описывается *набором вероятностей*;

• *гиперслучайная величина* $X = \{X_g,\ g \in G\}$ — *множеством условных функций распределения* $F(x / g)$ *в условиях* $g \in G$, образующим функцию распределения $F(x) = \{F(x/g),\ g \in G\}$, где $X_g = X/g$ — g-я случайная величина, а множество G может быть конечным, счетным или несчетным;

• *скалярная гиперслучайная функция* $X(t) = \{X_g(t),\ g \in G\}$ — *множеством многомерных условных функций распределения* $F(\vec{x};\vec{t}/g)$ *в условиях* $g \in G$, образующим функцию распределения $F(\vec{x};\vec{t}) = \{F(\vec{x};\vec{t}/g),\ g \in G\}$, где $X_g(t) = X(t)/g$ — g-я случайная функция.

Заметим, что существует множество различных вариантов представления *гиперслучайных явлений* (событий, величин, функций). Не будем пока на них останавливаться. Отметим лишь, что этим вопросам посвящена часть III монографии.

Для корректного использования теории гиперслучайных явлений, кроме гипотезы 1′, необходимо принять еще одну гипотезу.

Гипотеза 2′. *Массовые явления адекватно описываются гиперслучайными моделями, которые исчерпывающе характеризуются совокупностями функций распределения.*

В итоге *математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на классических аксиомах теории вероятностей, а физическая часть — на гипотезах 1′ и 2′.*

Предположение, что эти гипотезы справедливы для широкого круга массовых явлений, приводит к *концепции устройства мира на гиперслучайных принципах.*

Поскольку теория гиперслучайных явлений использует систему математических аксиом теории вероятностей, с математической точки зрения она представляет собой ветвь классической теории вероятностей. С физической же точки зрения теория гиперслучайных явлений — новая физическая теория, базирующаяся на новых физических гипотезах. В целом же *теорию гиперслучайных явлений можно рассматривать как новую физико-математическую теорию*, претендующую на полное решение шестой проблемы Д. Гильберта в части теории вероятностей.

2.6. ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ВЕРОЯТНОСТЬ «НОРМАЛЬНОЙ» ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНОЙ?

В 1992 г. в журнале «Успехи физических наук» вышла статья [Алимов, Кравцов, 1992] с интригующим названием, вынесенным в название настоящего параграфа. Авторы этой статьи обратили внимание на то, что «существенным элементом, незримо присутствующим при физической интерпретации вероятности, является система трудно формализуемых гипотез, соглашений, домысливаний, как бы естественно, традиционно привязанных к формальному аппарату теории вероятностей, а в действительности являющихся самостоятельными гипотезами, требующими верификации». Это обстоятельство делает невозможным без каких-либо дополнительных оговорок дать однозначный ответ на поставленный вопрос.

Следуя описанной выше логике рассуждений, ответить на него можно следующим образом.

Прежде всего, отметим, что согласно ГОСТ [ГОСТ 16263-70, 1970] *физическая величина* — свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта.

С этой точки зрения *вероятность*, рассматриваемая в рамках математической аксиоматической теории вероятностей, формально *не является физической величиной.* Это *математическая абстракция, не имеющая никакого отношения к реальным физическим явлениям.*

С принятием дополнительно гипотез 1 и 2 понятия предела частоты события и вероятность события оказываются тождественными. Проводя измерение частоты события, можно с некоторой погрешностью оценить его вероятность. При устремлении объема выборки к бесконечности погрешность стремится к нулю, а частота события — к вероятности.

Если под понятием «нормальная» физическая величина понимать физическую величину, которую теоретически можно измерить с нулевой погрешностью при бесконечном объеме выборки, то при принятии гипотез 1 и 2 вероятность оказывается «нормальной» физической величиной.

Поскольку гипотеза 1 экспериментально не подтверждается, возникает необходимость замены ее на гипотезу 1′. С принятием новой гипотезы 1′ фиксируется отсутствие предела частоты события. При этом абстрактное математическое понятие вероятности события нельзя отождествить с какой-либо измеряемой физической величиной. В этом случае оно *не имеет физической интерпретации.*

Конечно, по данным измерения частоты события можно грубо оценить величину вероятности, однако поскольку при неограниченном увеличении объема выборки погрешность измерения не стремится к нулю, *вероятность нельзя интерпретировать как «нормальную» физическую величину.*

Понятие вероятности оказывается математической абстракцией, не имеющей физической интерпретации.

Обратим внимание, что суть принимаемых в теории вероятностей гипотез 1 и 2 сводится к принятию *предположения о существовании вероятности* как некоторого числа, характеризующего возможность наступления события.

В варианте аксиоматизации теории вероятностей, предложенном в 1917 г. С.Н. Бернштейном, этот вопрос описан следующим образом: «Основное допущение теории вероятностей (*постулат существования математической вероятности*) состоит в том, что существуют такие комплексы условий β, которые (теоретически по крайней мере) могут быть реализованы неограниченное число раз, при наличии которых в данном опыте *наступление факта А имеет определенную вероятность, выражающуюся математическим числом.*» [Бернштейн, 1934, с. 8].

Другие широко известные варианты аксиоматизации, в частности предложенный в 1919 г. Р. фон Мизесом [Мизес, 1930] и общепризнанный вариант аксиоматизации, предложенный в 1929 г. А.Н. Колмогоровым [Колмогоров, 1974], также базируются на этом постулате.

В варианте колмогоровской аксиоматизации, например, исходят из существования для всех возможных событий абстрактной вероятностной меры P и справедливости *аксиомы счетной аддитивности*, предполагающей существование для *счетного числа попарно несовместных* событий $A_1, A_2, \ldots$, характеризуемых вероятностями $p(A_1),\ p(A_2), \ldots$, вероятности их объединения $\bigcup_n A_n$, равной сумме вероятностей событий ($p(\bigcup_n A_n) = \sum_n p(A_n)$).

Иными словами, аксиома счетной аддитивности предполагает, что бесконечная сумма вероятностей сходится к некоторому числу — вероятности наступления объединенного события.

Признание в рамках теории гиперслучайных явлений ограниченного характера статистической устойчивости (в частности, отсутствия сходимости частоты событий), означает *непринятие постулата существования вероятности.*

Таким образом, постулат существования вероятности служит как бы *водоразделом, разделяющим теорию вероятностей и теорию гиперслучайных явлений.*

ДЕТЕРМИНИЗМ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Рассмотрены различные концептуальные взгляды на устройство мира с позиций детерминизма и неопределенности. Приведена классификация неопределенностей. Описан способ единообразного представления моделей с помощью функции распределения. Предложена классификация математических моделей.

3.1. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА УСТРОЙСТВО МИРА С ПОЗИЦИЙ ДЕТЕРМИНИЗМА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

На протяжении веков среди ученых ведется спор по поводу принципов, лежащих в основе мироздания. Часть из них полагает, что в мире все детерминировано, другая — что все случайно. Есть и те, кто придерживаются альтернативных точек зрения.

3.1.1. Детерминизм Лапласа

Сторонники детерминизма считают, что любая физическая система адекватно описывается дифференциальными уравнениями.

Известно, что систему конечного числа дифференциальных уравнений с ограниченным числом детерминированных параметров и их производных ограниченного порядка можно привести к *автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений*, в которой в качестве аргументов фигурируют лишь параметры $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_I(t)$ и их первые производные $x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_I'(t)$:

$$F_j(x_1, \ldots, x_I, x_1', \ldots, x_I') = 0, \qquad j = \overline{1, J}\,, \tag{3.1}$$

где в явном виде время t отсутствует.

Если количество I параметров равно количеству уравнений J и система (3.1) разрешима относительно производных, то ее можно представить в виде *нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_I), \qquad i = \overline{1, I}\,. \tag{3.2}$$

Система (3.2) задает в фазовом пространстве *поле фазовых скоростей* $\vec{f}(\vec{x}) = (f_i(x_1, \ldots x_I), \quad i = \overline{1, I})$, трактуемое как не зависящий от времени *фазовый поток*.

Решением этой *системы* является вектор

$$\vec{x} \equiv \vec{x}(t) = \vec{x}^*(t, C_1, \ldots, C_I) \equiv (x_1^*(t, C_1, \ldots, C_I), \ldots, x_I^*(t, C_1, \ldots, C_I)),$$

при подстановке которого в систему уравнений (3.2) система превращается в тождество.

Входящие в этот вектор величины $C_1, \ldots, C_I$ можно трактовать как произвольные постоянные. Тогда вектор $\vec{x}^*(t, C_1, \ldots, C_I)$ представляет собой *общее решение*. Если же $C_1, \ldots, C_I$ — конкретные числа, то $\vec{x}^*(t, C_1, \ldots, C_I) = \vec{x}^*(t)$ — *частное решение*.

Общее решение — совокупность всех его частных решений.

График частного решения представляет *интегральную кривую*. Множество таких графиков образует I параметрическое *семейство интегральных кривых*.

В задаче Коши (*начальной задаче*) на вектор $\vec{x}(t)$ накладываются начальные условия, соответствующие некоторому начальному моменту времени t_0. Зная начальные условия, можно вычислить значения постоянных $C_1, \ldots, C_I$. Подстановка полученных значений в общее решение дает частное решение $\vec{x}^*(t)$, удовлетворяющее начальным условиям.

Если в открытой области все функции $f_i(x_1, \ldots, x_I)$ ограничены, непрерывны и для точек рассматриваемой области справедливо условие Липшица:

$$\left| f_i(x_1, \ldots, x_I) - f_i(\eta_1, \ldots, \eta_I) \right| \le M \sum_{j=1}^{I} \left| x_j - \eta_j \right|, \tag{3.3}$$

где M — некоторая положительная постоянная, то получаемое частное решение $\vec{x}^*(t)$ — *единственное*.

Неравенство (3.3) выполняется, в частности, когда все производные $\partial f_i / \partial x_j$ ограничены.

Единственность частного решения $\vec{x}^*(t)$ трактуется как *отсутствие пересечений траекторий в фазовом пространстве*, т. е.

каждому начальному состоянию $\vec{x}^*(t_0)$ в момент времени t_0 соответствует единственная точка $\vec{x}^*(t)$ в момент времени t.

Отсюда следует, что при полном знании исходных данных (законов, связей и начальных условий) *поведение рассматриваемой физической системы полностью предсказуемо.*

В этом суть *детерминизма П.С. Лапласа* [Лаплас, 1982], основы которой были заложены еще Р. Декартом, Т. Гоббсом, Б. Спинозой, И. Ньютоном, Г.В. Лейбницем, Я. Бернулли, П.А. Гольбахом и другими учеными и философами XVI—XVIII вв.

Г.В. Лейбниц, например, писал: «Все настоящее всегда скрывает в своих недрах будущее, и всякое данное состояние объяснимо естественным образом только из непосредственно предшествующих ему».

Знаменитая книга «Искусство предположений» Я. Бернулли завершается словами [Бернулли, 1986] [1]: «Откуда, наконец, вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменения так, что даже в вещах в высшей степени случайных мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок».

По мнению П.С. Лапласа, все в мире подчиняется детерминированным законам, а текущее состояние полностью определяется предыдущими его состояниями, т. е. оно предопределено. Эту точку зрения поддерживали многие известные физики, в том числе А. Эйнштейн, заметивший как-то, что «Бог не играет в кости с Вселенной».

3.1.2. Стохастический подход

Сторонники стохастичного (вероятностного) мироустройства (см. параграф 2.4), не отвергая, как правило, детерминистский подход, концентрируют свое внимание на феномене статистической устойчивости, открывающем дополнительные возможности прогнозирования частоты массовых событий и усредненных величин.

Благодаря классическим работам Р.Э. Фишера, К.Х. Крамера, К.Р. Рао и др. в XX веке в теории вероятностей сформиро-

[1] Книга «Искусство предположений» была опубликована в 1713 г. спустя 8 лет после смерти Я. Бернулли.

вался хорошо аргументированный взгляд на вопросы точности прогнозирования и измерения. Теоретически доказано, что *при наличии сходимости* (*состоятельности*) *оценок и неограниченном увеличении объема выборки принципиальных ограничений на точность прогнозирования и измерения нет: чем больше объем выборки, тем выше точность* [Тихонов, Харисов, 1991, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003].

Этот оптимистический вывод, к сожалению, не находит подтверждения на практике. Инженеры и физики знают, что путем увеличения объема выборки во многих случаях можно повысить точность измерения и прогнозирования, но не беспредельно: рано или поздно начинают сказываться те или иные факторы, ограничивающие возможность повышения точности.

Сторонники математической теории интервального анализа и физико-математической теории гиперслучайных явлений объясняют этот эффект наличием неопределенности.

3.1.3. Интервальный подход

Интервальный подход имеет два направления. Одно из них развивается в рамках теории вероятностей применительно к задачам статистического интервального оценивания. Зарождение его связано с именем П.С. Лапласа, а становление — с именем Е.Б. Уилсона [2]. Выводы относительно потенциальной точности измерения и прогнозирования, следующие из работ в этом направлении, типичны для стохастического подхода: при неограниченном объеме данных принципиальных ограничений точности нет.

Другое направление интервального подхода — чисто математическое. Феномен статистической устойчивости в нем не играет никакой роли. Это направление начало формироваться в 60-х годах прошлого века в связи с необходимостью учета погрешности округления при проведении расчетов на цифровых ЭВМ. Его развитие привело к созданию математической теории интервального анализа. Объектом изучения этой теории являются *интервалы*, характеризуемые *нижней и верхней границами*.

[2] Понятие интервальной оценки впервые встречается у П.С. Лапласа (1814) в связи с определением параметра биномиального распределения. Строгое обоснование процедуры интервального оценивания в рамках вероятностных моделей с использованием понятия доверительного интервала дал Е.Б. Уилсон в 1927 г. [Пытьев, Шишмарев, 1983].

Становление теории интервального анализа связано с именами Р.Е. Мура [Moor, 1966], Ю.И. Шокина [Шокин, 1981] и других ученых. За последние полвека в области интервальной математики получено много интересных результатов (см., например, [Шарый, 2010, Добронец, 2004]).

Следующие из теории интервального анализа выводы относительно потенциальной точности измерения и прогнозирования в корне отличаются от описанных выше: *даже при неограниченном объеме данных точность теоретически ограничена.*

Обратим внимание, что этот вывод не базируется на физике реальных явлений, а является следствием исходных математических представлений.

3.1.4. Гиперслучайный подход

Опираясь на экспериментальные исследования, демонстрирующие отсутствие сходимости частоты событий и выборочных средних, сторонники физико-математической теории гиперслучайных явлений отстаивают гиперслучайную концепцию устройства мира (см. параграф 2.5).

Признание неидеального характера феномена статистической устойчивости и принятие физической гипотезы адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями приводит к выводам, отличным от выводов теории вероятностей. *Согласно теории гиперслучайных явлений существуют принципиальные ограничения, препятствующие абсолютно точному измерению и прогнозу, причем даже при неограниченном объеме данных* [3].

Таким образом, по ключевому вопросу потенциальной точности измерения и прогнозирования выводы математической теории интервального анализа и физико-математической теории гиперслучайных явлений совпадают.

3.1.5. Фундаментальные вопросы

Случайность, интервальность и гиперслучайность — разновидности неопределенности. Возникают фундаментальные вопросы: какую роль играет неопределенность в реальном мире, и какого рода эта неопределенность? Эти вопросы тесно связаны с вопросом об адекватности применяемых математических моделей и причинах их использования.

[3] Детально этот вопрос рассмотрен в главах 28—31.

Чем обусловлены широкое распространение стохастических моделей, используемых для описания реальных физических явлений, и все возрастающий интерес к гиперслучайным моделям? Тем, что множество параметров и характеристик реальных явлений природы мы не знаем и, за неимением лучшего, облекаем наше незнание в стохастические и гиперслучайные модели? Или, быть может, мир действительно базируется на случайных и гиперслучайных принципах и тогда использование стохастических и гиперслучайных моделей — единственно правильный путь адекватного описания реальности?

Вопросы, безусловно, чрезвычайно сложные. Получить исчерпывающие ответы на них вряд ли возможно. Но все же постараемся разобраться в них. Начнем с терминологии, классификации неопределенностей и классификации распространенных математических моделей.

3.2. ПАРАМЕТРЫ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Окружающий мир постоянно изменяется, что проявляется в изменении его свойств и свойств составляющих его объектов — различных физических систем.

Состояния объектов характеризуются *физическими* и *нефизическими величинами*. Физические величины, в отличие от нефизических, — измеряемые величины.

Определение понятия физической величины согласно ГОСТ [ГОСТ 16263-70, 1970] приведено в параграфе 2.6.

В этом определении заложена двойственная физико-математическая природа понятия физической величины: с одной стороны, это понятие трактуется как физическое свойство, а с другой — характеризуется количественно как математический объект.

Физическая величина может быть описана различными математическими моделями, которые, в отличие от физической величины, будем называть просто величинами или *параметрами* [4] (или, иначе, *координатами состояния*) с добавлением при необходимости поясняющего слова, характеризующего их специфику.

Параметры могут быть *скалярными* (одномерными) и *векторными* (многомерными). Принято различать *детерминированные* и *недетерминированные* (*индетерминированные* или *неопределенные*) *параметры*.

---

[4] С древнегреческого языка слово параметр переводится как соразмеряемый.

Параметры обычно рассматриваются как функции времени. Детерминированный параметр в фиксированный момент времени принимает конкретное значение. В скалярном случае это значение описывается числом (натуральным, вещественным или комплексным), а в векторном — вектором (совокупностью натуральных, вещественных или комплексных чисел). Параметры, описываемые бесконечномерными векторами, обычно называют *характеристиками*. *Детерминированная характеристика* представляется однозначной детерминированной функцией.

В фиксированный момент времени неопределенный параметр, в отличие от детерминированного, не принимает конкретного значения, а неопределенная характеристика не описывается какой-либо конкретной детерминированной функцией.

Заметим, что деление параметров и характеристик реальных систем на детерминированные и недетерминированные не совсем корректно. Дело в том, что обычно в наличии имеется всего лишь одна реализация, а по одной реализации, если она не является многозначной, судить о детерминированном или неопределенном характере параметра или характеристики нельзя.

Иное дело — модели. Формируя математическую модель, можно допустить, что одни ее параметры (или характеристики) детерминированные, а другие — неопределенные.

Модели, не содержащие неопределенных параметров, обычно называют *детерминированными*, а содержащие такие параметры — *недетерминированными*.

Системы, адекватным образом описываемые исключительно детерминированными моделями, называют *детерминированными*, а представляемые недетерминированными или как детерминированными, так и недетерминированными моделями — *недетерминированными*.

Здесь и далее под *адекватным описанием понимается полное соответствие модели моделируемому объекту по свойствам неопределенности и детерминизма*.

На этом основании при исследовании таких свойств физических величин не будем делать различий между реальными физическими величинами и их адекватными моделями.

3.3. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Понятие неопределенности не такое очевидное, как кажется на первый взгляд. Далеко не всегда удается точно сформулировать, что подразумевается под понятием неопределенности. Существует множество сходных понятий, близких ему по смыслу. К ним относятся, например, неизвестность, неоднозначность, случайность, недостоверность, неадекватность, многозначность, хаотичность, нечеткость и др.

Некоторые из этих понятий расплывчаты. Иные же, хотя и формализованы, однако базируются на разных исходных модельных представлениях, что затрудняет установление связи между ними (к таковым, например, относятся понятия случайности и хаотичности).

В этой связи разработать всеобъемлющую и притом логически корректную систематизацию понятий неопределенности непросто. Одной из наиболее удачных классификаций представляется классификация, приведенная в монографии [Бочарников, 2001] (рис. 3.1). В ней хотя и отсутствуют многие важные понятия, в частности, понятия интервальной величины, мультиинтер-

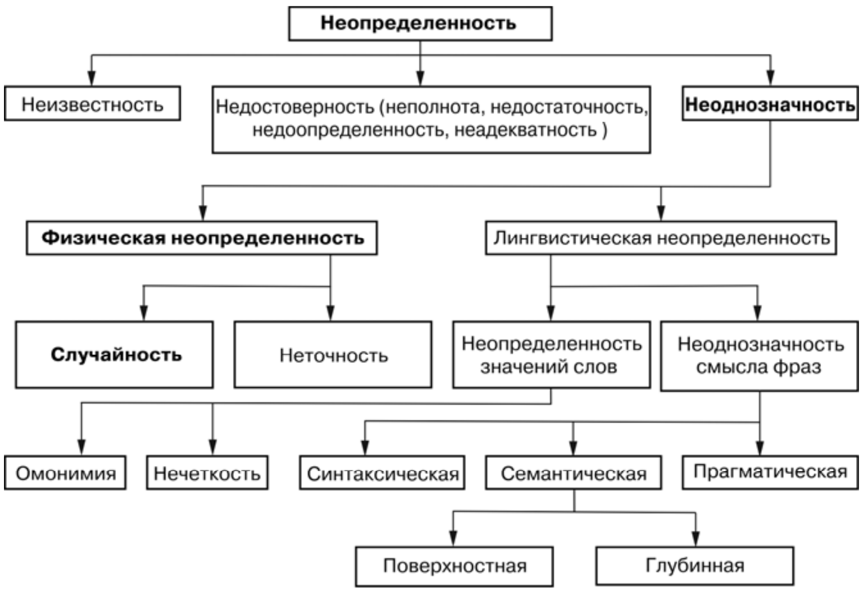


Рис. 3.1. Классификация неопределенностей по В.П. Бочарникову [Бочарников, 2001]

вальной величины, гиперслучайного явления и др., однако верно подмечено, что случайность, неоднозначность и неопределенность — не идентичные понятия. Случайность является частным случаем неоднозначности (многозначности), а последняя — частным случаем неопределенности.

Понятия случайности, многозначности и неопределенности могут относиться к различным *математическим объектам* (*явлениям*), а именно: *событиям, величинам* и *функциям.*

3.4. ЕДИНООБРАЗНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Единообразное описание моделей, в частности детерминированных, случайных, интервальных и гиперслучайных величин, обеспечивает функция распределения.

Важными характеристиками функции распределения гиперслучайной величины являются ее *верхняя* и *нижняя границы*, аналитически определяемые следующим образом (рис. 3.2):

$$F_S(x) = \sup_{g \in G} F(x/g), \quad F_I(x) = \inf_{g \in G} F(x/g).$$

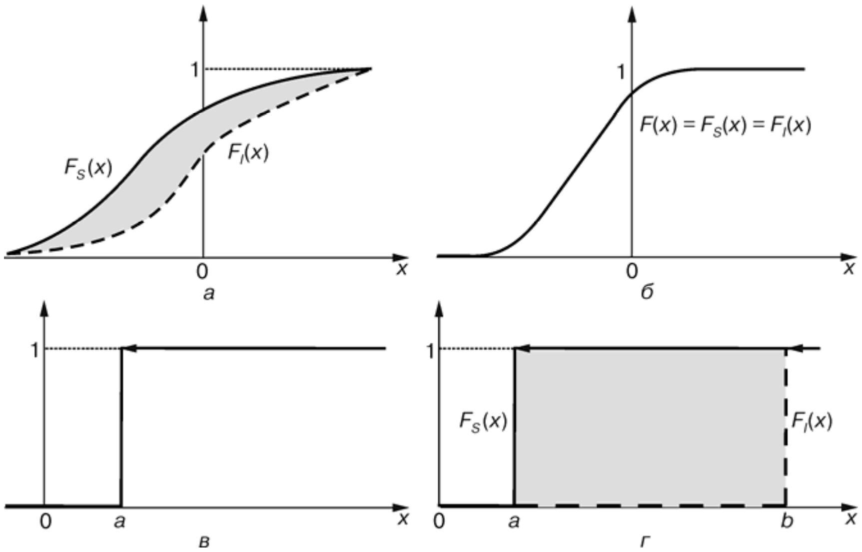


Рис. 3.2. Границы функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$ невырожденной гиперслучайной величины (*а*), случайной величины (*б*), детерминированной величины (*в*) и интервальной величины (*г*)

Между границами функции распределения расположена *зона неопределенности*, формируемая множеством кривых $F(x/g)$, $g \in G$. Если эти кривые всюду плотно заполняют пространство между границами функции распределения, то зона неопределенности — *непрерывная* (затемненная полоса на рис. 3.2, *а*), в противном случае — *разрывная*.

Вырожденный случай гиперслучайной величины — случайная величина. Для случайной величины X границы функции распределения совпадают с ее функцией распределения $F(x)$: $F_S(x) = F_I(x) = F(x)$, а зона неопределенности стягивается в линию (рис. 3.2, *б*).

Детерминированную величину а приближенно можно рассматривать как случайную величину X, функция распределения $F(x)$ которой имеет вид единичного скачка в точке a: $F(x) = \mathrm{sign}\left[x - a\right]$ (рис. 3.2, *в*), где

$$\mathrm{sign}[x] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Интервальную величину, определяемую интервалом $\left[a,\ b\right]$, можно рассматривать как гиперслучайную величину X, нижняя граница которой описывается функцией единичного скачка в точке a: $F_S(x) = \mathrm{sign}\left[x - a\right]$, а верхняя — функцией единичного скачка в точке b: $F_I(x) = \mathrm{sign}\left[x - b\right]$ (рис. 3.2, *г*). Зона неопределенности интервальной величины — непрерывная.

Если $a \to -\infty$, а $b \to \infty$, то скачок нижней границы функции распределения стремится к минус бесконечности, а верхней границы — к плюс бесконечности. Интервальную величину с такими границами распределения можно рассматривать как полностью неопределенную величину.

Мультиинтервальная величина [Шарый, 2010], состоящая из множества непересекающихся интервалов, имеет *разрывную зону неопределенности*.

Очевидно, что детерминированная величина (рис. 3.2, *в*) лишена какой-либо неопределенности. Она характеризуется одним конкретным значением a.

Интервальная величина (рис. 3.2, *г*) описывает неопределенность, которая характеризуется границами интервала. Случайная величина (рис. 3.2, *б*) описывает неопределенность другого типа, которая приближенно может быть охарактеризована математическим ожиданием (или модой) и наклоном кривой функции распределения (характеризуемым дисперсией или среднеквадратическим отклонением).

Обратим внимание, что ни в интервальной модели, ни в случайной модели детерминизм полностью не изжит. Он присутствует в них, но на другом уровне: проявляется в форме детерминированных параметров (границ интервала, математического ожидания, дисперсии и т. д.) и детерминированных характеристик (функции распределения, плотности распределения и пр.). Очевидно, что в случайной модели детерминизм играет более существенную роль, чем в интервальной модели.

Гиперслучайная величина учитывает два типа неопределенности, одна из которых характерна для интервальной, а другая — для случайной величины. Естественно, в гиперслучайной модели детерминизм также присутствует в форме детерминированных параметров (моментов границ, границ моментов и т. д.) и детерминированных характеристик (условных функций распределения, условных плотностей распределения, границ функции распределения и пр.), однако роль детерминизма в ней менее существенна, чем в случайной модели.

Ранжируя рассматриваемые модели по той роли, которую играет в них детерминизм, их можно расположить следующим образом: детерминированная, случайная, гиперслучайная, мультиинтервальная, интервальная.

Из приведенного краткого экскурса следует, что неопределенность теснит детерминизм. Однако это не означает, что дни последнего сочтены. Какие бы модели неопределенности мы ни строили, обойтись без детерминированных величин и функций невозможно. В конечном итоге все модели описываются детерминированными средствами.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. С одной стороны, между детерминированными и неопределенными явлениями нет той пропасти, как можно было бы предполагать. *Детерминированную, случайную, интервальную и мультиинтервальную величины, а также детерминированное и случайное события можно рассматривать как вырожденные случаи гиперслучайной величи-*

ны, случайную функцию — как вырожденную гиперслучайную функцию, а детерминированную функцию — как вырожденную случайную или вырожденную гиперслучайную функцию.

С другой стороны, различие между детерминированными, случайными, интервальными, мультиинтервальными и гиперслучайными моделями имеется и связано оно с разным соотношением в них детерминизма и неопределенности.

3.5. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Особенности функции распределения могут служить основой для классификации ряда математических моделей. Учитывая соображения, изложенные в предыдущем параграфе, можно предложить следующую их классификацию (рис. 3.3). В этой классификации под многозначными в общем случае подразумеваются не только модели, неоднозначность которых проявляется при рассмотрении множества реализаций (как, например, в классическом случае случайных моделей, рассматриваемых в математической статистике), но и модели, у которых имеет место неодно-

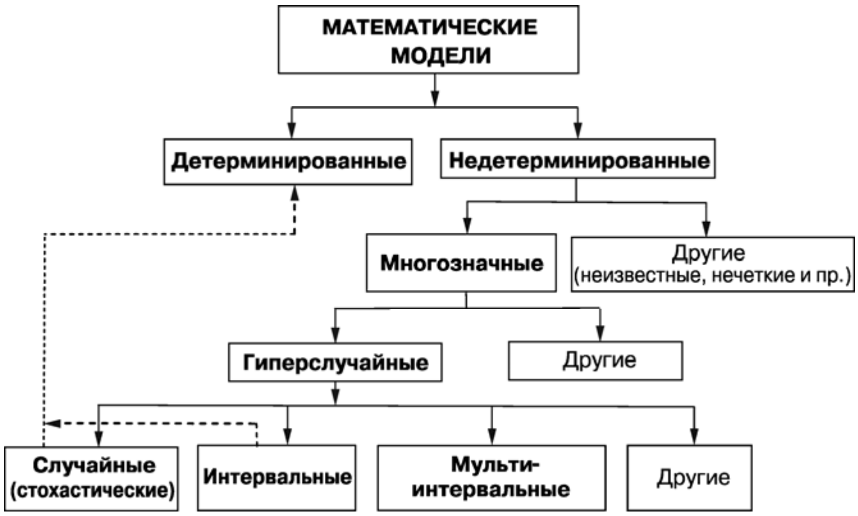


Рис. 3.3. Классификация математических моделей

значность на уровне одной реализации. В последнем случае предполагается, что реализация физической величины описывается не числом, а множеством чисел (многозначной величиной) [5], а реализация физического процесса — многозначной функцией.

Основы математического анализа многозначных величин и функций заложены в работах [Горбань, 2012 (2), (3), Gorban, 2012], в которых введены понятия обобщенного предела, принимающего не обязательно единственное значение, непрерывной многозначной функции, производной и интеграла многозначной функции и др. Основные положения этого анализа приведены в части IV.

[5] Строго говоря, такая трактовка физической величины противоречит [ГОСТ 16263-70, 1970].

СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрены случайные величины и случайные процессы, статистически неустойчивые по отношению к определенным статистикам. Проанализированы с точки зрения статистической устойчивости различные виды нестационарных процессов.

4.1. СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В параграфе 1.5 приведены примеры статистически неустойчивых детерминированных моделей и реальных физических процессов. Некоторые стохастические модели также являются статистически неустойчивыми. Не вдаваясь пока в детали и математические тонкости, рассмотрим этот вопрос на концептуальном уровне. Более корректное с математической точки зрения его освещение отложим до следующих глав.

Рассмотрим случайную величину X, имеющую определенный закон распределения $F(x)$. Множество значений, которое она принимает при проведении N опытов, образует *случайную выборку* $X_1,\ldots,X_N$.

Математическая статистика изучает выборки с помощью *статистик* — функций выборок. В данном случае любая статистика представляет собой *случайную величину*, закон распределения которой определяется функцией распределения $F(x)$.

По выборке $X_1,\ldots,X_N$ может быть рассчитана эмпирическая функция распределения $F_N^*(x)$ (1.7) случайной величины X. Эта функция распределения обладает свойством сходимости, описываемым *основной теоремой математической статистики* (*теоремой Гливенко*).

Теорема Гливенко. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, а $F_N^*(x)$ — эмпирическая функция распределения результатов N наблюдений этой величины. Тогда при $N \to \infty$ функция $F_N^*(x)$ сходится к $F(x)$ почти наверное (с вероятностью единица) [1]:

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_N^*(x)-F(x)\right|\to 0\right\}=1 .$$

Отметим, что поскольку сходимость с вероятностью единица более сильная, чем сходимость по вероятности, то $F_N^*(x)$ сходится к $F(x)$ и по вероятности.

Функция распределения дает исчерпывающее описание случайной величины. Менее полно случайную величину характеризуют различные числовые параметры, в частности, начальные и центральные моменты (математическое ожидание, дисперсия и т.д.).

Моменты $m_1, m_2, \ldots$ функции распределения $F(x)$ могут быть оценены с помощью оценок $m_1^*, m_2^*, \ldots$, сформированных по выборке $X_1, \ldots, X_N$. Если эти случайные оценки сходятся в некотором смысле к моментам $m_1, m_2, \ldots$ (в частности, являются *состоятельными*[2]), то *случайную величину* X *и соответствующую выборку* $X_1, \ldots, X_N$ *можно считать статистически устойчивыми по отношению к этим оценкам.*

Теорема Гливенко не гарантирует сходимость оценок моментов (см. параграф 1.6). Необходимым условием сходимости оценки m_ν^* к моменту m_ν является, естественно, существование момента m_ν.

Не все распределения имеют моменты. Например, распределение Коши, описываемое функцией распределения

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)+\frac{1}{2} \tag{4.1}$$

и плотностью распределения

$$f(x)=C\left[x_0,\gamma\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right], \tag{4.2}$$

[1] Различные варианты сходимости последовательности случайных величин и функций приведены в главе 18.

[2] Состоятельная оценка — оценка, которая сходится по вероятности к оцениваемой величине.

где x_0 — параметр сдвига, $\gamma > 0$ — параметр масштаба, *моментов не имеет* [3].

Если случайная величина X не имеет какого-то момента m_ν, то оценка m_ν^* этого отсутствующего момента не имеет предела (расходится) [4]. Это означает, что оценка m_ν^* статистически неустойчива (*несостоятельна*), и поэтому *случайную величину X, ее распределение и соответствующую ей выборку $X_1,\ldots,X_N$ можно считать статистически неустойчивыми по отношению к рассматриваемой оценке m_ν^*.*

Следуя этой логике, распределение Коши, например, статистически неустойчиво по отношению к оценкам всех моментов.

Заметим, что нарушение статистической устойчивости может иметь место по отношению к любой статистике, а не только к описывающей какой-то момент.

Случайная выборка $X_1,\ldots,X_N$ может быть истолкована и по-другому, а именно: как однородная выборка из стационарного случайного процесса $X(t)$ с независимыми сечениями, описываемыми функцией распределения $F(x)$.

Если такой процесс $X(t)$ не имеет какого-то момента (параметра) m_ν, то соответствующая оценка m_ν^* расходится и тогда *процесс $X(t)$, его распределение и выборка $X_1,\ldots,X_N$ оказываются статистически неустойчивыми по отношению к оценке m_ν^*.*

4.2. СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $X(t)$, описываемый многомерной функцией распределения $F(\vec{x};\vec{t})$. Выборка $X_1 = X(t_1),\ldots,X_N = X(t_N)$ из такого случайного процесса, соответствующая значениям аргумента $t_1,\ldots,t_N$, неоднородная.

---

[3] У распределения Коши существует интеграл в смысле главного значения, описывающий первый момент. Значение этого интеграла равно x_0.

[4] Или сходится к числу, не являющимся моментом.

Статистика, сформированная по такой выборке, представляет собой случайную величину Y^*, закон распределения которой определяется функцией распределения $F(\vec{x};\vec{t})$. При неограниченном увеличении объема выборки возможны два случая: Y^* стремится к некоторой случайной величине Y (в частном случае — к детерминированной величине) или Y^* расходится.

В первом случае при наличии у случайной величины Y момента (параметра) m_ν и сходимости оценки m_ν^* к m_ν величина Y статистически устойчива по отношению к оценке m_ν^*, и поэтому процесс $X(t)$ и соответствующую выборку можно считать *статистически устойчивыми по отношению к оценке* m_ν^*.

При отсутствии у случайной величины Y момента (параметра) m_ν величина Y статистически неустойчива по отношению к оценке m_ν^*, и поэтому процесс $X(t)$ и соответствующую выборку можно считать *статистически неустойчивыми по отношению к оценке* m_ν^*.

Во втором случае не существует случайной величины Y, к которой сходилась бы статистика Y^*. Это можно трактовать как *статистическую неустойчивость процесса* $X(t)$, его распределения и выборки $X_1,\ldots,X_N$ *по отношению к статистике* Y^*.

На практике наблюдается именно такой вариант нарушения статистической устойчивости. Чаще всего имеет место нарушение устойчивости по отношению к среднему. Экспериментальные исследования, подтверждающие этот тезис, описаны в части II и главе 27.

Таким образом, *случайные величины, стационарные и нестационарные случайные процессы* (*а также их распределения и выборки*) *могут быть как статистически устойчивыми, так и неустойчивыми по отношению к определенным статистикам.*

Отсюда следует, что *нестационарность и статистическая неустойчивость — разные понятия.*

4.3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К СРЕДНЕМУ

Представим нестационарный случайный процесс $X(t)$ в виде суммы его математического ожидания $m_x(t)$ и случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ с нулевым математическим ожиданием:

$$X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t).$$

Математическое ожидание среднего $m_y(t)$ определяется математическим ожиданием $m_x(t)$:

$$m_y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t m_x(t_1)\,dt_1.$$

Поэтому при изучении статистической неустойчивости среднего особый интерес представляет математическое ожидание $m_x(t)$.

Рассмотрим случайные процессы с тремя типами изменения математического ожидания $m_x(t)$: периодическим, периодически скачкообразным и апериодическим.

4.3.1. Случайные процессы с периодически изменяющимся математическим ожиданием

Пусть $m_x(t)$ — периодическая функция с периодом T. Тогда ее можно разложить в ряд Фурье:

$$m_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{j2\pi}{T} kt\right), \qquad (4.3)$$

где $\dot{a}_k = a_k \exp(j\varphi_k)$ — комплексный коэффициент разложения, a_k — амплитуда, φ_k — фаза.

При этом математическое ожидание среднего

$$m_y(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin \pi tk/T}{\pi tk/T} \cos(\pi tk/T + \varphi_k). \qquad (4.4)$$

Из выражения (4.4) следует, что переменная часть математического ожидания среднего описывается гармоническими функциями, затухающими по закону $\sin x / x$. Скорость затухания этих функций определяется величиной периода *T*: по мере увеличения периода скорость затухания уменьшается, а при $T \to \infty$ она стремится к нулю.

Минимальная скорость затухания — у первого члена ряда (соответствующего $k = 1$). В математическом ожидании среднего (4.4) гармоники высшего порядка, присутствующие в разложении (4.3), оказываются подавленными. Чем выше порядок гармоники, тем сильнее подавление.

Если длительность интервала наблюдения существенно меньше периода *T*, то изменения математического ожидания среднего $m_y(t)$ незначительны. Это — область выраженной статистической устойчивости. Ситуация, однако, изменяется по мере приближения длительности к периоду *T*. На интервале наблюдения $t \in [0, T]$, как видно из выражения (4.4), происходят значительные изменения математического ожидания, что свидетельствует о выраженной тенденции нарушения статистической устойчивости.

Характеризуя процесс на этом интервале наблюдения, можно считать его статистически неустойчивым.

Заметим, что ощутимые изменения математического ожидания среднего и нарушения статистической устойчивости могут также регистрироваться на интервалах наблюдения, существенно больших периода *T*. Это имеет место, когда гармоники высшего порядка достаточно велики, а их номера не очень большие.

Описанные особенности проиллюстрированы рис. 4.1 (модели 3, 4).

При расчетах использовалась последовательность

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f n / N),$$

рассматриваемая как функция времени $t = \Delta t n$ в часах ($n = \overline{1, N}$, $\Delta t = 0{,}2$ с), с двумя различными значениями частоты *f*. В модели 3 $f = 400$ (рис. 4.1, *а*, *б*), а в модели 4 — $f = 1$ (рис. 4.1, *в*, *г*). В обеих моделях $a = 220$, $\sigma_1 = 1$, множество отсчетов разбито на L блоков по M отсчетов в каждом ($N = ML$, $M = 64$), n_0^l — соответствующий *l*-му блоку отсчет гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, n_n — *n*-й отсчет случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\sigma_2 = 10$.

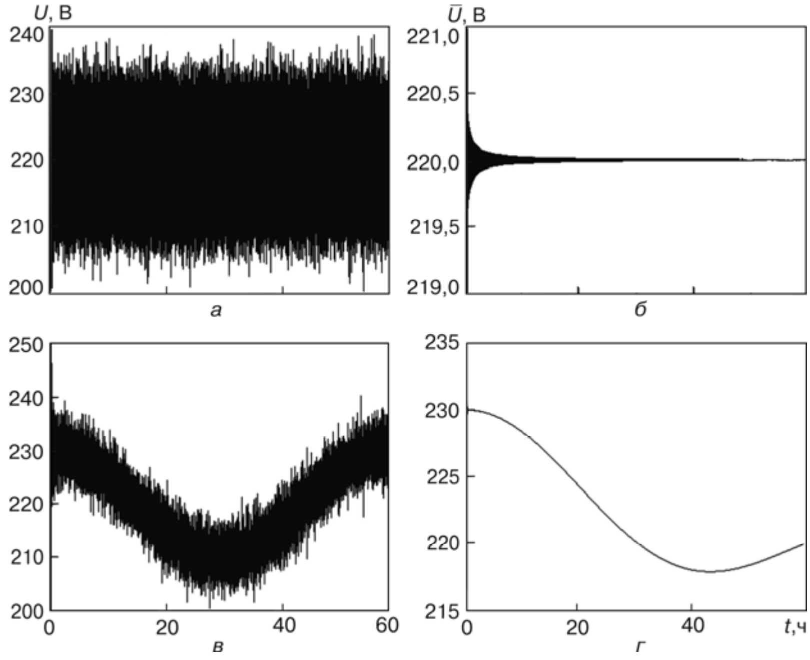


Рис. 4.1. Модели случайного процесса с высокой (модель 3) (*а*) и низкой (модель 4) (*в*) частотой колебания математического ожидания и соответствующие им выборочные средние (*б*, *г*)

Из выражения (4.4) следует, что при $t \to \infty$ и конечном T флуктуации математического ожидания среднего $m_y(t)$ стремятся к нулю. Это означает, что, несмотря на нарушения статистической устойчивости на определенном интервале наблюдения, случайный процесс с периодически изменяющимся математическим ожиданием в целом статистически устойчив.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, описываемый суммой Q примерно одинаковых по уровню нестационарных случайных процессов $X_1(t), X_2(t),\dots, X_Q(t)$, у которых математические ожидания представляют собой периодические функции с существенно отличающимися друг от друга периодами $T_1 < T_2 < \dots < T_Q$.

На интервале наблюдения от нуля до t, значительно меньшем T_1, флуктуации математических ожиданий практически не

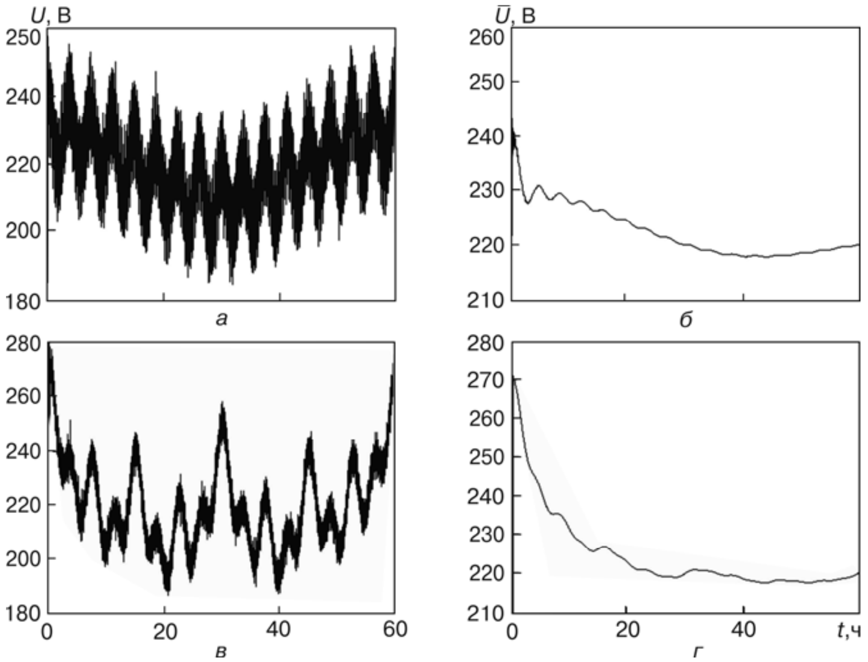


Рис. 4.2. Модели случайного процесса с математическим ожиданием, содержащим три сильно отстоящих друг от друга по частоте гармоники (модель 5) (*а*) и пять близко расположенных по частоте гармоник (модель 6) (*в*), а также соответствующие им выборочные средние (*б*, *г*)

проявляются, и поэтому процесс $X(t)$ можно считать практически устойчивым. При приближении t к T_1 процесс $X_1(t)$ (а следовательно, и процесс $X(t)$) становится статистически неустойчивым. При дальнейшем увеличении времени наблюдения начинают проявляться статистические свойства процесса $X_1(t)$, и он постепенно приобретает характер устойчивого процесса. При этом процесс $X(t)$ также начинает походить на статистически устойчивый процесс.

При приближении t к T_2 процесс $X_2(t)$ становится статистически неустойчивым. Это приводит к тому, что статистическая устойчивость процесса $X(t)$ нарушается и т.д. При $Q \to \infty$ чередование устойчивых и неустойчивых состояний охватывает бесконечный интервал наблюдения и в целом процесс оказывается статистически неустойчивым [5].

Когда периоды связаны неравенствами $T_{q+1} < 2T_q$ ($q = \overline{1, Q-1}$), области неустойчивых состояний сливаются между собой и практически на всем интервале $[T_1, T_Q)$ процесс оказывается статистически неустойчивым.

Описанная схема формирования статистически неустойчивых областей проиллюстрирована моделями 5 и 6 (рис. 4.2).

Модель 5 описывается выражением

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{3} \cos(2\pi f_i n / N),$$

где $f_1 = 256$, $f_2 = 16$, $f_3 = 1$, а модель 6 — выражением

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{5} \cos(2\pi f_i n / N),$$

где $f_1 = 16$, $f_2 = 8$, $f_3 = 4$, $f_4 = 2$, $f_5 = 1$.

В обеих моделях неоговоренные параметры такие же, как в модели 3.

Описанная аддитивная модель может использоваться в качестве модели реальных процессов.

4.3.2. Случайный процесс со скачкообразно изменяющимся математическим ожиданием

Рассмотрим случайный процесс, у которого математическое ожидание содержит скачкообразные периодические всплески, описываемые некоторым законом распределения.

На рис. 4.3, *а* приведен пример такого процесса (модель 7). Его отсчеты описываются выражением $x_n = a + \sigma_1 n_{1n} + \sigma_2 \varepsilon_p (1 + | n_{2n} |)$, где $\sigma_2 = 20$, n_{1n}, n_{2n} — гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ не кратно } p, \\ 1, \text{ если } n \text{ кратно } p, \end{cases}$$

$p = 4000$, а остальные параметры такие же, как в модели 3.

[5] Реальный шумовой процесс такого типа описан в параграфе 9.1.

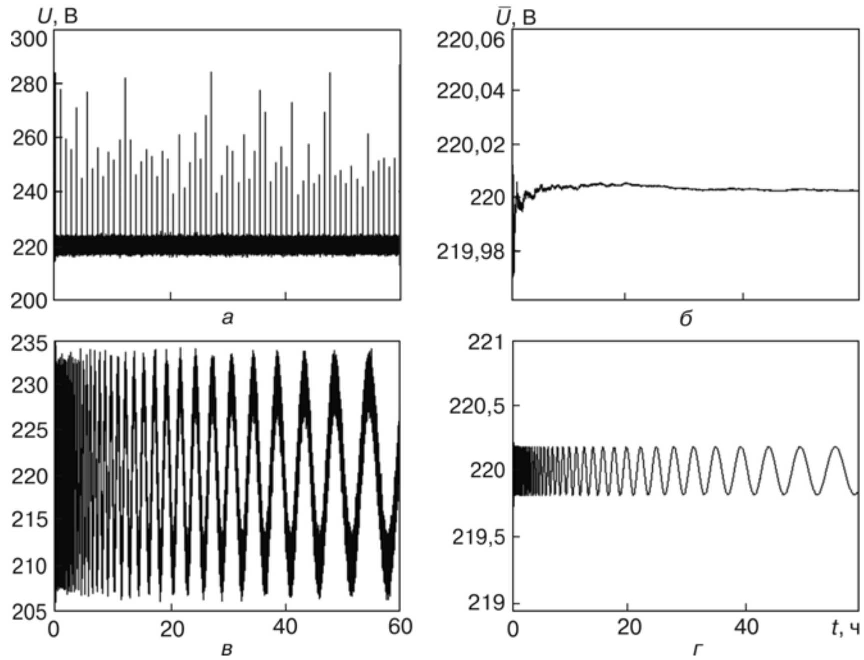


Рис. 4.3. Модель случайного процесса с периодически скачкообразным изменением математического ожидания (модель 7) (*а*), модель случайного процесса с апериодически изменяющимся математическим ожиданием (модель 8) (*в*) и соответствующие им выборочные средние (*б*, *г*)

Такой процесс *статистически устойчивый*. Периодически появляющиеся в нем всплески, как видно из рис. 4.3, *б*, при усреднении сглаживаются.

4.3.3. Случайный процесс с апериодически изменяющимся математическим ожиданием

Заметим, что случайные процессы с периодически изменяющимся математическим ожиданием, рассмотренные в п. 4.3.1, на интервале наблюдения длительностью менее периода T можно интерпретировать как процессы с апериодически изменяющимся математическим ожиданием. Отсюда следует, что такие процессы могут проявлять признаки статистической неустойчивости на определенных интервалах наблюдения.

Пусть $m_x(t)$ допускает разложение в ряд Маклорена:

$$m_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k. \tag{4.5}$$

Тогда

$$m_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k+1}. \tag{4.6}$$

Из выражения (4.6) следует, что изменение математического ожидания $m_x(t)$ по закону t^k приводит к такому же закону изменения математического ожидания среднего $m_y(t)$. Это означает, что если $m_x(t) = t^k (k > 0)$, то случайный процесс статистически неустойчив на любом интервале наблюдения.

Заметим, что из-за наличия в разложении (4.6) дополнительных по сравнению с разложением (4.5) коэффициентов $(k+1)^{-1}$ закон изменения $m_y(t)$ в общем случае не повторяет закон изменения $m_x(t)$, а потому не обязательно процесс с апериодически изменяющимся математическим ожиданием является статистически неустойчивым.

Рассмотрим случайный процесс, у которого математическое ожидание $m_x(t)$ в логарифмическом масштабе изменяется периодически с периодом T. В этом случае математическое ожидание может быть представлено рядом

$$m_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{j2\pi}{T} k \ln t\right).$$

Интегрирование этого выражения с нормировкой на t дает математическое ожидание среднего $m_y(t)$, которое с помощью несложных аналитических преобразований приводится к виду

$$m_y(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{1+4\pi^2 k^2 / T^2}} \times$$

$$\times \sin(2\pi k \ln t/T + \varphi_k + \mathrm{arctg}(T / 2\pi k)).$$

Как видно, для периодической в логарифмическом масштабе функции $m_x(t)$ математическое ожидание среднего $m_y(t)$ описывается рядом *незатухающих гармонических в логарифмическом масштабе функций*. Это означает, что такой процесс статистически неустойчив на интервале наблюдения $[0, \infty)$.

На рис. 4.3, *в*, *г* приведены результаты расчетов для модели, представляемой функцией

$$x_n = a + \sigma_1 n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f \lg n / \lg N)$$

(модель 8), где $\sigma_2 = 10$, $f = 20$, а остальные параметры и величины такие же, как в модели 3.

Математические ожидания реальных процессов вряд ли описываются функциями типа $t^k (k > 0)$ или косинус-логарифмической функцией. При этом, однако, не следует исключать возможности, что отдельные фрагменты реализаций могут описываться подобными функциями с вытекающими из этого последствиями.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Формализовано понятие статистической устойчивости. Введены параметры статистической неустойчивости. Предложены единицы измерения параметров статистической неустойчивости. Введены понятия статистической устойчивости/неустойчивости процессов в узком и широком смыслах. Исследована статистическая устойчивость ряда моделей процессов.

5.1. ПРОЦЕССЫ, СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К СРЕДНЕМУ

Как ни странно, понятие статистической устойчивости до недавнего времени не было формализовано. Применительно к последовательности случайных величин простейший вариант формализации может быть следующим [Горбань, 2011 (1)].

Определение 1а. *Последовательность* $X_1, X_2, \ldots$ *случайных величин* (*случайная выборка*) считается *статистически устойчивой* (*статистически стабильной*), если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2 \qquad (5.1)$$

флуктуации выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = \overline{1, N}) \qquad (5.2)$$

стремится к нулю, где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ — выборочное среднее флуктуации среднего. Последовательности, не удовлетворяющие этому условию, — *статистически неустойчивые.*

Заметим, что оценка дисперсии (5.1) — смещенная. Вместо смещенной оценки можно использовать несмещенную оценку дисперсии, описываемую выражением

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2. \qquad (5.3)$$

Случайный процесс $X(t)$ считается *статистически устойчивым* (*статистически стабильным*), если при устремлении времени наблюдения T к бесконечности математическое ожидание интеграла

$$\frac{1}{T}\int_0^T (Y(t) - \bar{m}_{y_T})^2 dt$$

стремится к нулю, где $Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(t_1)dt_1$ — среднее процесса $X(t)$ на интервале $[0,t]$, $\bar{m}_{y_T} = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)dt$ — среднее среднего на интервале $[0,T]$. Процессы, не удовлетворяющие этому условию, — *статистически неустойчивые.*

Поскольку приближенно детерминированную величину x_0, как отмечалось выше, можно считать вырожденной случайной величиной, у которой функция распределения имеет вид функции единичного скачка в точке x_0: $F(x) = \mathrm{sign}[x - x_0]$, то понятия статистической устойчивости и неустойчивости применимы также для *последовательности детерминированных величин.*

Уменьшение дисперсии выборочного среднего при увеличении объема данных может быть вызвано не только стабилизацией среднего, но также уменьшением дисперсии исходного процесса. Для нивелирования этого эффекта имеет смысл понятие статистической устойчивости переопределить следующим образом.

Определение 1б. *Последовательность случайных величин* $X_1, X_2, \ldots$ *считается статистически устойчивой*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности *параметр статистической неустойчивости*

$$\gamma_N = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]}{ND_{y_N}} = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]}{\bar{D}_{x_N}} \tag{5.4}$$

стремится к нулю, где

$$D_{y_N} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} D_{x_n},$$

$\mathrm{M}[\cdot]$ — оператор математического ожидания, $D_{x_n} = \mathrm{M}[(X_n - m_{x_n})^2]$ — дисперсия случайной величины X_n, а $m_{x_n} = \mathrm{M}[X_n]$ — ее математическое ожидание, $\bar{D}_{x_N}$ — средняя дисперсия случайных величин X_n $(n = \overline{1, N})$: $\bar{D}_{x_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}$.

Если условия определения 1а или определения 1б выполняются, последовательность естественно называть *статистически устойчивой по отношению к среднему*, а при невыполнении этих условий — *статистически неустойчивой по отношению к среднему*.

Процесс обычно описывается последовательностью значений в фиксированные моменты времени, поэтому, рассматривая процессы, можно отождествлять их с соответствующими последовательностями.

Заметим, что в частном случае постоянной дисперсии понятия статистически устойчивого процесса согласно определениям 1а и 1б совпадают.

По результатам наблюдения процесса на конечном интервале невозможно точно установить факт нарушения статистической устойчивости. Однако можно количественно оценить степень флуктуации выборочного среднего в фиксированные моменты времени и, анализируя динамику происходящих изменений, выявить некоторые тенденции, ведущие к нарушению устойчивости.

Такие тенденции характеризуют *параметр статистической неустойчивости* γ_N *и параметр* μ_N, связанный с параметром γ_N, соотношением

$$\mu_N = \sqrt{\gamma_N / (1 + \gamma_N)} \,. \tag{5.5}$$

В отличие от параметра γ_N, ограниченного лишь снизу нулевым значением, параметр μ_N ограничен как снизу, так и сверху: минимально возможное его значение равно нулю, а максимально возможное — единице.

Чем меньше значения параметров γ_N, μ_N, тем более устойчива последовательность. Значения этих параметров, близкие к нулю при больших объемах выборки N, свидетельствуют о высокой статистической устойчивости последовательности, большие же значения — о ее статистической неустойчивости.

Реальные процессы содержат как статистически устойчивую (статистически прогнозируемую), так и статистически неустойчивую (статистически непрогнозируемую) составляющие.

Хотя оба параметра γ_N, μ_N — безразмерные величины, между ними существует различие. Параметр γ_N характеризует абсолютный, а μ_N — относительный уровень неустойчивости.

5.2. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Процедура измерения – это сравнение с некоторой единицей измерения.

Для параметра статистической неустойчивости γ_N *в качестве единицы измерения* может выступать *величина* γ_{0N}, представляющая собой параметр γ_N, рассчитанный для последовательности некоррелированных отсчетов с постоянной дисперсией $D_{x_n} = D_x$ и нулевым математическим ожиданием при фиксированном объеме выборки N.

Для параметра μ_N *в качестве единицы измерения* может выступать величина $\mu_{0N} = \sqrt{\gamma_{0N} / (1 + \gamma_{0N})}$.

Заметим, что в данном случае закон распределения не играет существенной роли и поэтому не оговаривается.

Для указанной эталонной последовательности параметр γ_{0N} аналитически описывается следующим выражением [Горбань, 2011 (3)]:

$$\gamma_{0N} = \frac{N+1}{(N-1)N} C_N - \frac{2}{N-1}, \tag{5.6}$$

где $C_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$.

Получить при тех же предположениях аналитическое выражение для среднеквадратического отклонения (СКО) величины $\tilde{\gamma}_{0N} = \bar{D}_{Y_N} \big/ ND_{y_N}$ не представляется возможным. Однако, использовав дополнительно предположение о гауссовском характере рассматриваемой последовательности, можно вычислить СКО в следующем виде [Горбань, 2011 (3)]:

$$\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}} = \frac{1}{N-1} \sqrt{\frac{2C_N^2}{N^2} + \frac{4(N+1)C_N}{N} + A_N \left(\frac{4}{N} - 2 \right) + \frac{8B_N}{N} - 12}, \tag{5.7}$$

где $A_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, $B_N = \sum_{n=1}^{N} C_{n-1}/n$.

При выводе формулы (5.7) учитывалась известная зависимость [Тихонов, Харисов, 1991] между четырехмерным моментом гауссовских случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4, их корреляционными моментами и математическими ожиданиями m_1, m_2, m_3, m_4:

$$\mathrm{M}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathrm{M}[X_1 X_2]\mathrm{M}[X_3 X_4] +$$

$$+ \mathrm{M}[X_1 X_3]\mathrm{M}[X_2 X_4] + \mathrm{M}[X_1 X_4]\mathrm{M}[X_2 X_3] - 2m_1 m_2 m_3 m_4.$$

Результаты расчетов по формулам (5.6), (5.7) зависимостей параметра статистической неустойчивости γ_{0N} и границ коридора $\gamma_{0N}^{\pm} = \gamma_{0N} \pm k\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ от объема выборки *N*, где k — константа, приведены на рис. 5.1, *а* (соответственно сплошная и пунктирные тонкие линии *1, 1′, 1″*). Там же представлены усредненные по ста реализациям результаты компьютерного имитационного моделирования указанных зависимостей для последовательностей случайных чисел, подчиняющихся гауссовскому (кривые *2, 2′, 2″*) и равномерному (кривые *3, 3′, 3″*) законам распределения.

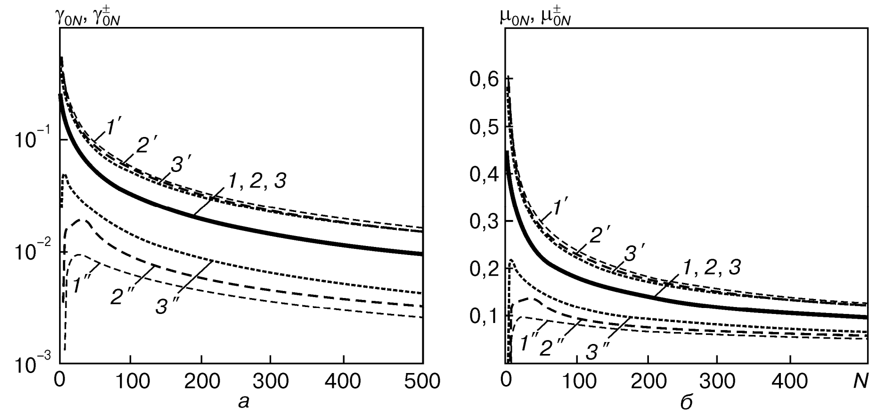


Рис. 5.1. Зависимости γ_{0N}, $\gamma_{0N}^{\pm}$ (*а*) и μ_{0N}, $\mu_{0N}^{\pm}$ (*б*) от объема выборки N ($k = 1$)

На рис. 5.1, *б* приведены результаты аналогичных расчетов и компьютерного имитационного моделирования для параметра статистической неустойчивости μ_{0N} и границ коридора $\mu_{0N}^{\pm} = \sqrt{\gamma_{0N}^{\pm}/(1+\gamma_{0N}^{\pm})}$.

Из рисунков следует, что графики зависимостей γ_{0N} и μ_{0N} от объема выборки *N*, полученные с помощью аналитических выражений (5.6), (5.7), практически совпадают с результатами моделирования, что подтверждает корректность расчетов.

Для $N = 2$ имеем $\gamma_{0N} = 0,25$, а $\mu_{0N} = 0,447$. При увеличении объема выборки N значения этих величин уменьшаются.

Как следует из рисунков, границы коридоров $\gamma_{0N}^{\pm}$ и $\mu_{0N}^{\pm}$, соответствующие гауссовскому и равномерному распределению, мало отличаются друг от друга. Это свидетельствует о слабой зависимости разброса значений $\tilde{\gamma}_{0N}$ и $\tilde{\mu}_{0N} = \sqrt{\tilde{\gamma}_{0N}/(1+\tilde{\gamma}_{0N})}$ от закона распределения.

Абсолютный уровень статистической неустойчивости в единицах измерения γ_{0N} характеризует *параметр*

$$h_N = \gamma_N / \gamma_{0N} . \tag{5.8}$$

Наряду с μ_N *относительный уровень неустойчивости* представляет параметр

$$l_N = \frac{\gamma_N - \gamma_{0N}}{\gamma_N} = \frac{h_N - 1}{h_N}. \quad (5.9)$$

Он связан с параметрами μ_N и γ_{0N} следующим соотношением:

$$l_N = (1 + \gamma_{0N}) - \frac{\gamma_{0N}}{\mu_N^2}.$$

Диапазон изменения параметра h_N составляет $[0, \infty)$, а параметра l_N — $(-\infty, 1]$.

Зависимости границ коридоров $h_{0N}^{\pm} = \gamma_{0N}^{\pm} / \gamma_{0N}$ и $l_{0N}^{\pm} = \left(\gamma_{0N}^{\pm} - \gamma_{0N}\right) / \gamma_{0N}^{\pm}$ от объема выборки N приведены на рис. 5.2 (пунктирные кривые). Сплошными прямыми на рис. 5.2, *а*, *б* изображены эталонные значения параметров.

Из рисунков видно, что с увеличением объема выборки коридоры, описываемые границами $h_{0N}^{\pm}$ и $l_{0N}^{\pm}$, сужаются.

Для практических расчетов вместо параметров γ_N, μ_N, h_N и l_N можно использовать их оценки γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^*.

Оценка γ_N^* может быть вычислена по множеству реализаций или как $\gamma_N^* = \dfrac{\bar{D}_{Y_N}}{\bar{D}_{X_N}}$, где $\bar{D}_{X_N} = \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D_{X_n}^*$ — среднее оценок дисперсий $D_{X_n}^*$, сформированных по отдельным фрагментам реали-

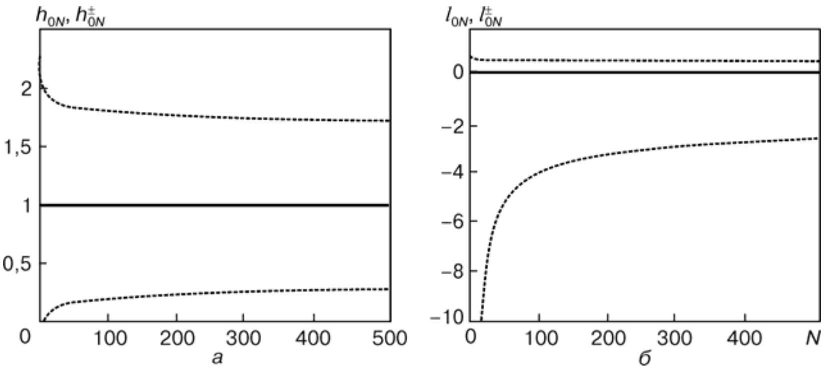


Рис. 5.2. Зависимости границ коридоров $h_{0N}^{\pm}$ (*а*) и $l_{0N}^{\pm}$ (*б*) от объема выборки N

зации последовательности X_n $(n = \overline{1, N})$. Оценки μ_N^*, h_N^* и l_N^* могут быть рассчитаны при наличии оценки γ_N^* по формулам $\mu_N^* = \sqrt{\gamma_N^* / (1 + \gamma_N^*)}$, $h_N^* = \gamma_N^* / \gamma_{0N}$, $l_N^* = (\gamma_N^* - \gamma_{0N}) / \gamma_N^*$.

В отличие от вероятности параметры статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^* — *физические величины*, характеризующие реальные процессы.

Обратим внимание, что в отличие от большинства широко используемых единиц измерения физических величин единицы измерения γ_{0N}, μ_{0N}, h_{0N} и l_{0N} *не требуют физических эталонов*, поскольку являются математическими функциями, определяемыми объемом выборки N. При фиксированном значении N, в принципе, они могут быть рассчитаны абсолютно точно.

В физике небольшое число физических констант типа скорости света, гравитационной постоянной и др. [Фундаментальные физические константы, http] задаются по определению с нулевой погрешностью. Величины γ_{0N}, μ_{0N}, h_{0N} и l_{0N} также имеют нулевую погрешность, однако связано это не с тем, что их полагают таковыми по определению, а поскольку они являются математическими константами.

Возможность использования математических констант в качестве единиц измерения физических величин обусловлена отсутствием размерности параметров γ_N, μ_N, h_N и l_N.

Отметим, что рассматриваемые параметры характеризуют нарушения статистической устойчивости на конкретном интервале наблюдения. Для разных интервалов наблюдения одного и того же процесса значения этих параметров могут быть разными. Существенную роль играет *последовательность взятия отсчетов*. При изменении последовательности параметры изменяются.

Факт нарушения устойчивости процесса может устанавливаться по тенденции изменения параметров γ_N, μ_N, h_N и l_N (или γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^*). Если при больших значениях N наблюдается увеличение этих параметров или стабилизация значения на достаточно высоком уровне, то процесс можно считать неустойчивым, в противном случае — устойчивым.

5.3. ПРОЦЕССЫ, СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ В УЗКОМ СМЫСЛЕ

Рассмотренные критерии и параметры статистической неустойчивости процесса отслеживают динамику изменения выборочного среднего. Однако при этом остаются без внимания функция распределения и другие выборочные моменты.

Заметим, что стремление к нулю математического ожидания выборочной дисперсии среднего процесса (или какого-либо связанного с ним параметра) не гарантирует сходимость выборочной функции распределения к какой-либо функции распределения. Поэтому определения 1а и 1б нельзя признать безукоризненными.

Учитывая изложенное выше, можно предложить несколько альтернативных вариантов определения понятия статистически устойчивой последовательности (процесса).

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ (с различными в общем случае законами распределения). Пусть $N(x)$ — количество членов последовательности $\{X_N\} = X_1, X_2, \ldots, X_N$ объема N, меньших x, а $F_N^*(x) = \dfrac{N(x)}{N}$ — эмпирическая (выборочная) функция распределения, представляющая собой неубывающую ступенчатую функцию.

При неограниченном увеличении числа членов N эмпирическая функция распределения $F_N^*(x)$ может сходиться, а может и не сходится к определенной функции.

Определение 2. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ назовем *статистически устойчивой в узком смысле почти наверное* (*с вероятностью единица*), если существует случайная величина X, описываемая функцией распределения $F(x)$, к которой сходится почти наверное (с вероятностью единица) [2] эмпирическая функция распределения $F_N^*(x)$ при неограниченном увеличении N: $\lim\limits_{N \to \infty} F_N^*(x) = F(x)$, т. е.

$$P\left\{\lim_{N \to \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \left|F_N^*(x) - F(x)\right| = 0\right\} = 1 . \tag{5.10}$$

[2] Определение понятия сходимости с вероятностью единица приведено в параграфе 18.1.

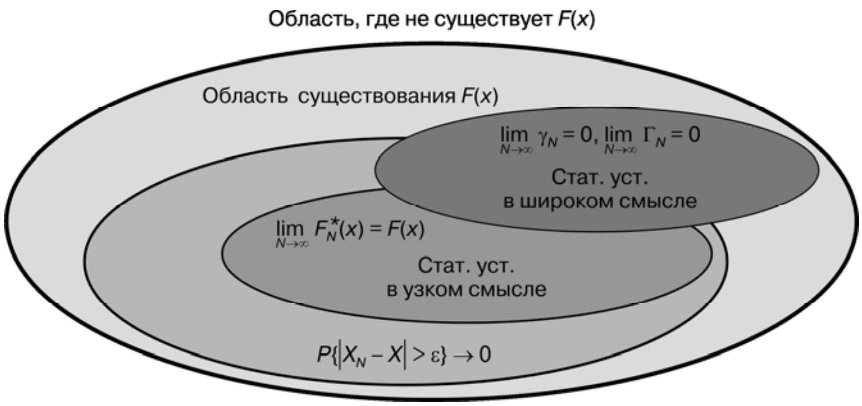


Рис. 5.3. Статистически устойчивые и неустойчивые случайные последовательности (процессы) в узком и широком смыслах

Если такая случайная величина X не существует, последовательность будем называть *статистически неустойчивой в узком смысле*.

Поскольку сходимость с вероятностью единица более сильная, чем сходимость по вероятности, то в случае, когда $F_N^*(x)$ сходится к $F(x)$ почти наверное, имеет место сходимость $F_N^*(x)$ к $F(x)$ и по вероятности (рис. 5.3).

5.4. ПРОЦЕССЫ, СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

Определение 2 может быть полезным при проведении теоретических исследований, однако оно мало пригодно для оценки нарушений статистической устойчивости реальных процессов, поскольку оценка сходимости эмпирической функции распределения представляет собой практически непреодолимую проблему.

Задачу можно существенно упростить, если ограничиться оценкой математических ожиданий выборочных дисперсий двух первых выборочных моментов: среднего и дисперсии (или СКО).

Определение 3а. *Последовательность* $X_1, X_2, \ldots$ *случайных величин назовем статистически устойчивой в широком смысле*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности

1) математическое ожидание выборочной дисперсии (5.1) флуктуации выборочного среднего (5.2) и

2) математическое ожидание выборочной дисперсии

$$\bar{D}_{Z_N} = \frac{1}{N-2}\sum_{n=2}^{N}(Z_n - \bar{m}_{Z_N})^2 \qquad (5.11)$$

выборочного СКО

$$Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}) \qquad (5.12)$$

стремятся к нулю, где $\bar{m}_{Z_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} Z_n$ — среднее флуктуации выборочного СКО.

Последовательности, не удовлетворяющие этому условию, будем называть *статистически неустойчивыми в широком смысле*.

Таким образом, статистически устойчивый процесс в широком смысле — процесс, статистически устойчивый по отношению к среднему и к СКО.

Словосочетания «в узком смысле» и «широком смысле» используются здесь и далее по аналогии с тем, как они применяются применительно к понятию стационарного процесса [Горбань, 2003].

Обратим внимание, что области статистической устойчивости (как в широком, так и в узком смысле) располагаются внутри области существования функции распределения $F(x)$, а области неустойчивости охватывают не только части области, в которой существует функция распределения $F(x)$ но и область, в которой она не существует (см. рис. 5.3).

Не всякий процесс, устойчивый в узком смысле, является устойчивым в широком смысле, и, наоборот, не всякий процесс, устойчивый в широком смысле, является устойчивым в узком смысле.

Определение 3а страдает тем же недостатком, что и определение 1а. Для нивелирования влияния изменения дисперсии исследуемого процесса представляется целесообразным предложить следующий вариант определения понятия статистической устойчивости в широком смысле.

Определение 3б. *Последовательность случайных величин* $X_1, X_2, \ldots$ *назовем статистически устойчивой в широком смысле*, если при устремлении объема выборки N к бесконечности стремятся к нулю

1) параметр статистической неустойчивости по отношению к среднему (5.4) и

2) параметр статистической неустойчивости по отношению к СКО:

$$\Gamma_N = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Z_N}\right]}{ND_{y_N}} = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Z_N}\right]}{\bar{D}_{x_N}}. \tag{5.13}$$

Последовательности, не удовлетворяющие этому условию, будем называть *статистически неустойчивыми в широком смысле* (см. рис. 5.3).

Наряду с параметром Γ_N можно использовать параметры $\mathrm{M}_N = \sqrt{\Gamma_N/(1+\Gamma_N)}$, $H_N = \Gamma_N/\gamma_{0N}$ и $L_N = (\Gamma_N - \gamma_{0N})/\Gamma_N$, аналогичные параметрам μ_N, h_N и l_N.

Параметры Γ_N, M_N, H_N и L_N — безразмерные величины. Диапазон изменения параметра Γ_N — $[0,\infty)$, параметра M_N — $[0,1]$, параметра H_N — $[0,\infty)$, а параметра L_N — $(-\infty,1]$.

Для практических расчетов на конечном интервале наблюдения вместо параметров Γ_N, M_N, H_N и L_N можно использовать их оценки: $\Gamma^*_N = \frac{\bar{D}_{Z_N}}{\bar{D}_{X_N}}$, $\mathrm{M}^*_N = \sqrt{\Gamma^*_N/(1+\Gamma^*_N)}$, $H^*_N = \Gamma^*_N/\gamma_{0N}$ и $L^*_N = (\Gamma^*_N - \gamma_{0N})/\Gamma^*_N$.

Параметры статистической неустойчивости γ_N, μ_N, h_N, l_N и Γ_N, M_N, H_N, L_N позволяют оценить *интервал статистической устойчивости* τ_s исследуемого процесса — интервал, на котором нарушения статистической устойчивости пренебрежимо малы.

Критерием нарушения статистической устойчивости может служить выход за установленную верхнюю границу коридора (γ^+_{0N}, μ^+_{0N}, h^+_{0N} или l^+_{0N}) соответствующей оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему (γ^*_N, μ^*_N, h^*_N или l^*_N), соответствующей оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО (Γ^*_N, M^*_N, H^*_N или L^*_N) или обеих этих оценок.

5.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Возможности использования описанных параметров для оценки степени нарушения статистической устойчивости процессов иллюстрируют приведенные на рис. 5.4 зависимости параметров статистической неустойчивости выборочного среднего γ_N^* и μ_N^* от объема выборки (времени наблюдения), рассчитанные для восьми моделей, рассмотренных в главах 1 и 4. Линиями *1—8* показаны результаты расчетов соответственно для моделей, приведенных на рис. 1.1 (модели 1, 2), 4.1 (модели 3, 4), 4.2 (модели 5, 6) и 4.3 (модели 7, 8).

При расчетах входящие в параметры статистической неустойчивости дисперсии заменялись оценками, формируемыми по выборке.

Из рисунков видно, что для моделей 1—3 и 7, соответствующих статистически устойчивым процессам (белый шум, гармоническое колебание, случайный процесс с периодическим изменением математического ожидания, случайный процесс с периодическим скачкообразным изменением математического ожидания), с увеличением времени наблюдения t значения параметров статистической неустойчивости монотонно уменьшаются.

Для моделей же 4—6 и 8, соответствующих статистически неустойчивым процессам, (случайный процесс с математическим ожиданием, изменяющимся с малой частотой, случайный процесс

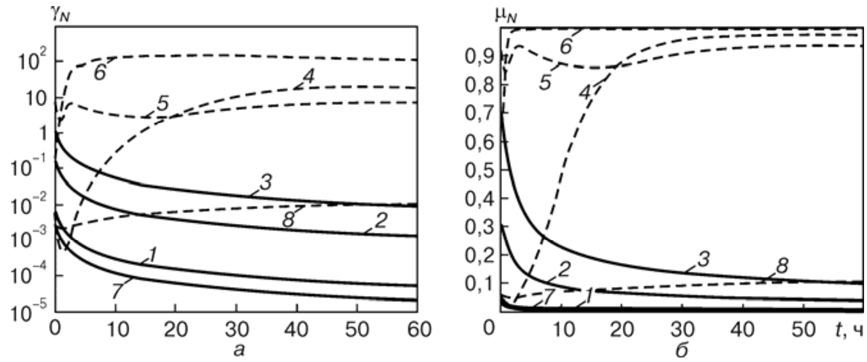


Рис. 5.4. Зависимости параметров статистической неустойчивости выборочного среднего γ_N^* (*а*) и μ_N^* (*б*) от времени наблюдения

с математическим ожиданием, содержащим ряд сильно отстоящих друг от друга по частоте гармоник, случайный процесс с апериодически изменяющимся математическим ожиданием) значения параметров статистической неустойчивости проявляют тенденцию к возрастанию.

В области больших времен наблюдения для моделей статистически неустойчивых процессов параметры γ_N^* и μ_N^* принимают значения, большие, чем для моделей статистически устойчивых процессов. Это подтверждает возможность использования этих параметров для установления факта нарушения статистической устойчивости.

В заключение главы отметим, что оценки параметров статистической неустойчивости $\gamma_N^*, \mu_N^*, h_N^*, l_N^*$ и $\Gamma_N^*, \mathrm{M}_N^*, H_N^*, L_N^*$, рассматриваемые без усреднения по множеству реализаций, могут быть использованы не только в случае случайных последовательностей и стохастических процессов, но и в случае последовательностей и процессов, не имеющих вероятностной меры.

ЗАВИСИМОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ОТ ОСОБЕННОСТЕЙ ЕГО ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Исследована зависимость статистической устойчивости процесса от особенностей его временных характеристик, в частности от параметров флуктуации математического ожидания и корреляции отсчетов.

6.1. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НА СТАТИСТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $X(t)$ с некоррелированными сечениями и постоянной дисперсией D_x. Представим его последовательностью отсчетов $X_1, X_2, \ldots$ в фиксированные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Выделим в этой последовательности две составляющие: детерминированную последовательность математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots$ и случайную последовательность центрированных отсчетов $\overset{\circ}{X}_1,\ \overset{\circ}{X}_2, \ldots$.

Представим выборочное среднее n первых отсчетов последовательности $X_1, X_2, \ldots$ выражением

$$Y_n = \bar{m}_{y_n} + \overset{\circ}{Y}_n, \tag{6.1}$$

где $\bar{m}_{y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ — среднее значение математических ожиданий последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а $\overset{\circ}{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{X}_i$ — среднее центрированных отсчетов $\overset{\circ}{X}_1,\ \overset{\circ}{X}_2, \ldots, \overset{\circ}{X}_n$.

С учетом выражения (6.1) параметры статистической неустойчивости γ_N, μ_N, h_N и l_N, описываемые соответственно выражениями (5.4), (5.5), (5.8), (5.9), можно записать как

$$\gamma_N = q_N + \gamma_{0N}, \tag{6.2}$$

$$\mu_N = \sqrt{\frac{q_N + \gamma_{0N}}{q_N + (1 + \gamma_{0N})}}, \tag{6.3}$$

$$h_N = \frac{q_N}{\gamma_{0N}} + 1, \tag{6.4}$$

$$l_N = \frac{q_N}{q_N + \gamma_{0N}}, \tag{6.5}$$

где $q_N = \bar{D}_{\bar{m}_{yN}} \big/ D_x$ — нормированная дисперсия флуктуации среднего математических ожиданий, $\bar{D}_{\bar{m}_{yN}}$ — дисперсия флуктуации среднего математических ожиданий: $\bar{D}_{\bar{m}_{yN}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\bar{m}_{y_n} - \bar{m}_{\bar{m}_{yN}})^2$, $\bar{m}_{\bar{m}_{yN}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\bar{m}_{y_n}$ — среднее флуктуации среднего математических ожиданий.

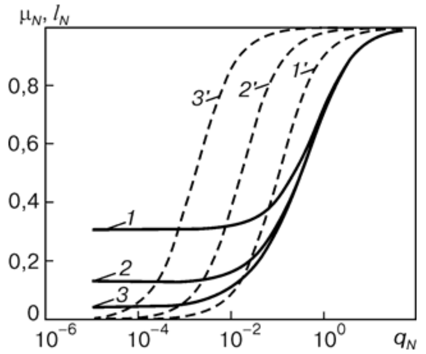
Из выражений (6.2)—(6.5) следует, что при увеличении параметра q_N (или дисперсии флуктуации среднего математических ожиданий $\bar{m}_{y_n}$) значения параметров статистической неустойчивости γ_N, μ_N, h_N и l_N возрастают. При значительных флуктуациях возможно нарушение статистической устойчивости.

Зависимости параметров статистической неустойчивости μ_N и l_N от параметра q_N приведены на рис. 6.1. Кривые *1—3* соответствуют параметру μ_N, а *1′—3′* — параметру l_N. Кривые *1, 1′* получены для $N = 16$, *2, 2′* — для $N = 256$, а *3, 3′* — для $N = 4096$.

Из рисунка видно, что при $q_N < 1$ более чувствительным к изменению уровня q_N оказывается параметр l_N, а при $q_N > 1$ — параметр μ_N. Отсюда следует, что при малых нарушениях статистической устойчивости предпочтительнее использовать параметр l_N, а при больших — параметр μ_N.

При увеличении объема выборки N значения параметра μ_N уменьшаются, а значения параметра l_N, наоборот, возрастают.

Рис. 6.1. Зависимость параметров статистической неустойчивости μ_N и l_N от параметра q_N



При малых нарушениях статистической устойчивости ($q_N \ll \gamma_{0N}$) параметр l_N, как следует из выражения (6.5), практически линейно зависит от q_N.

Нарушения статистической устойчивости вызывают не только флуктуации (вариации) среднего математических ожиданий, но и другие отклонения от эталонных условий, в частности наличие корреляции между элементами выборки.

6.2. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ОТСЧЕТОВ НА СТАТИСТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА

На рис. 6.2 приведены результаты моделирования, подтверждающие факт изменения статистической устойчивости при наличии корреляции между элементами выборки. Кривые *1* получены для эталонных условий (последовательности некоррелированных гауссовских отсчетов с постоянной дисперсией и нулевым математическим ожиданием), кривые *2* — для условий с

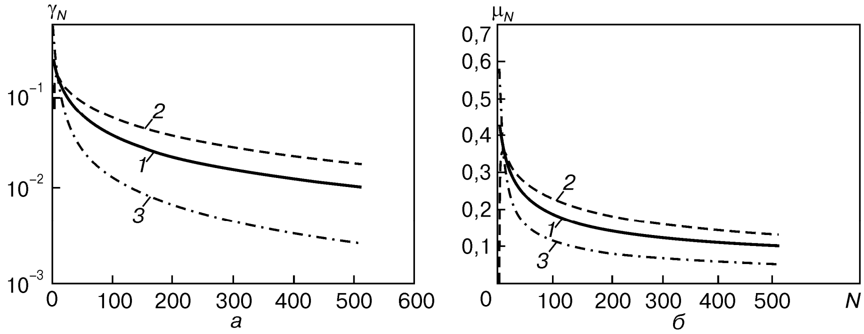


Рис. 6.2. Зависимость параметров γ_N (*а*) и μ_N (*б*) от объема выборки N при различных типах корреляции между ее элементами

положительной корреляцией, а кривые *3* — для условий с отрицательной корреляцией.

Положительная корреляция в данном случае моделировалась гауссовской последовательностью, в которой элементы с четными номерами повторяли элементы с предыдущими нечетными номерами, а отрицательная корреляция — последовательностью, в которой элементы с четными номерами повторяли элементы с предыдущими нечетными номерами, взятыми с противоположным знаком.

Как видно из рис. 6.2, наличие положительной корреляции отсчетов ведет к уменьшению статистической устойчивости, а отрицательной корреляции — к ее увеличению. В обоих случаях процесс стремится к статистически устойчивому состоянию.

ЗАВИСИМОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА ОТ ЕГО СПЕКТРА

Рассмотрено преобразование Винера—Хинчина. Обращено внимание, что существуют случайные процессы, которые не имеют одновременно корреляционной функции, характерной для стационарного процесса, и спектральной плотности мощности. Установлена связь между статистической устойчивостью непрерывного процесса и его спектральной плотностью мощности. Исследована статистическая устойчивость непрерывных процессов со степенной спектральной плотностью мощности.

7.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИНЕРА—ХИНЧИНА

Рассмотрим случайный процесс $X_T(t)$, определенный на интервале $t \in [-T/2, T/2]$. Поскольку детерминированную величину приближенно можно считать частным случаем случайной величины, то как и ранее, детерминированный процесс будем рассматривать как частный случай случайного процесса.

Процесс $X_T(t)$ может быть представлен в эквивалентной форме *комплексным спектром* $\dot{A}_{X_T}(f)$. Процесс $X_T(t)$ и его комплексный спектр $\dot{A}_{X_T}(f)$ связаны между собой преобразованием Фурье:

$$X_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{X_T}(f) \exp(j2\pi ft) df,$$

$$\dot{A}_{X_T}(f) = \int_{-T/2}^{T/2} X_T(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \qquad (7.1)$$

Важной характеристикой процесса являются его *спектр мощности* $S_{X_T}(f)$, связанный с комплексным спектром $\dot{A}_{X_T}(f)$ следующей зависимостью:

$$S_{X_T}(f) = \frac{1}{T} \left| \dot{A}_{X_T}(f) \right|^2. \qquad (7.2)$$

Обратим внимание, что комплексный спектр однозначно определяет процесс, однако спектр мощности определяет его неоднозначно. Одной и той же зависимости спектра мощности от частоты соответствует множество процессов с различными мгновенными спектрами.

Заметим, что поскольку процесс $X_T(t)$ — случайный, то при фиксированной частоте f величины $\dot{A}_{X_T}(f)$ и $S_{X_T}(f)$ — случайные величины.

Спектральная плотность мощности (СПМ) процесса $X_T(t)$ на конечном интервале наблюдения T представляет собой усредненный по ансамблю спектр мощности $S_{X_T}(f)$:

$$S_{x_T}(f) = \mathrm{M}\left[S_{X_T}(f)\right] = \mathrm{M}\left[\frac{1}{T}\left|\dot{A}_{X_T}(f)\right|^2\right].$$

При $T \to \infty$ СПМ $S_{x_T}(f)$ переходит в СПМ $S_x(f) = \lim\limits_{T\to\infty} S_{x_T}(f)$ процесса $X(t)$, определенного на бесконечно большом интервале наблюдения.

Отметим, что эти соотношения справедливы *как для стационарных, так и нестационарных процессов.*

Корреляционная функция $K_{x_T}(t_1, t_2)$ случайного процесса $X_T(t)$ связана с его комплексным спектром $\dot{A}_{X_T}(f)$ следующей зависимостью:

$$K_{x_T}(t_1, t_2) = \mathrm{M}\left[X_T(t_1) X_T(t_2)\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}\left[\dot{A}_{X_T}(f_2)\, \overset{*}{\dot{A}}_{X_T}(f_1)\right] \exp(j2\pi(f_2 t_2 - f_1 t_1))\, df_1\, df_2.$$

Если спектральные составляющие процесса некоррелированные, то при $T \to \infty$ корреляционная функция имеет вид

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}\left[\left|\dot{A}_{X_T}(f)\right|^2\right] \exp(j2\pi f\tau)\, df =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{x_T}(f) \exp(j2\pi f\tau)\, df = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau)\, df, \qquad (7.3)$$

характерный для стационарного процесса, где $\tau = t_2 - t_1$.

В данном случае под стационарным процессом подразумевается процесс, *стационарный в широком смысле*, у которого математическое ожидание постоянно ($m_x(t) = m_x = \text{const}$), а корреляционная функция зависит только от разности значений аргумента t: $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$.

Из выражения (7.3) следует, что *процесс с постоянным математическим ожиданием стационарен*, если его *спектральные составляющие некоррелированные.*

В случае, когда процесс стационарный, его СПМ и корреляционная функция связаны между собой известным *преобразованием Винера—Хинчина:*

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau, \tag{7.4}$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f \tau) df. \tag{7.5}$$

Отметим одну тонкость, на которую обычно не обращают внимания: *далеко не все процессы имеют одновременно корреляционную функцию $K_x(\tau)$ и СПМ $S_x(f)$.*

Существуют процессы, описываемые определенными СПМ, но не имеющие корреляционных функций вида $K_x(\tau)$. И, наоборот, *существуют процессы, описываемые корреляционными функциями вида $K_x(\tau)$, но не имеющие СПМ.*

На первый взгляд, первая часть утверждения представляется очевидной, а вторая — несколько странной. Понятно, что процесс $X(t)$, у которого корреляционная функция не определяется разностью аргументов τ, — нестационарный процесс. Но что значит, что процесс не имеет СПМ? Рассмотрим конкретные примеры.

7.2. ПРИМЕРЫ ПРОЦЕССОВ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОДНОВРЕМЕННО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И СПМ

Пусть $\overset{\circ}{X}(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и степенной ковариационной функцией $R_{\overset{\circ}{x}}(\tau) = K_{\overset{\circ}{x}}(\tau) = C_0 |\tau|^{-\alpha}$, где C_0, α — константы.

Поскольку ковариационная функция не может быть больше дисперсии ($R_x(\tau) \le R_x(0)$), на параметр α необходимо наложить ограничение $\alpha \ge 0$.

С учетом симметрии ковариационной функции СПМ процесса можно записать в виде

$$S_{\overset{\circ}{x}}(f) = 2C_0 \int_0^{\infty} \tau^{-\alpha} \cos(2\pi f \tau) d\tau . \qquad (7.6)$$

Интеграл (7.6) сходится на множестве $\mathrm{A} = \{0 < \alpha < 1\}$. Тогда

$$S_{\overset{\circ}{x}}(f) = 2C_0 \frac{\Gamma(-\alpha+1)}{(2\pi f)^{-\alpha+1}} \cos\frac{\pi(-\alpha+1)}{2},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Отсюда следует, что при $\alpha \in \mathrm{A}$ СПМ рассматриваемого процесса описывается степенной функцией. Параметр формы его спектра $\beta = -\alpha + 1$. Множество значений параметра β, соответствующих $\alpha \in \mathrm{A}$, описывается выражением $\mathrm{B} = \{0 < \beta < 1\}$.

Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ ($0 < \beta < 1$) процесс $\overset{\circ}{X}(t)$ *стационарный*. При этом он имеет одновременно и корреляционную функцию, и СПМ.

Рассмотрим значения α, при которых интеграл (7.6) расходится.

При одних значениях $\alpha \notin \mathrm{A}$ он принимает бесконечно большие значения определенного знака (в частности при $\alpha = 1, 2, \dots$). При других же $\alpha \notin \mathrm{A}$ он расходится, не принимая какого-либо конкретного значения.

Второй тип расходимости имеет место, например, при $\alpha = 0$. Тогда для всех $f > 0$ функция

$$\lim_{T\to\infty} 2C_0 \int_0^{T} \cos(2\pi f \tau) d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{C_0}{\pi f} \sin(2\pi f T)$$

флуктуирует вокруг нуля в диапазоне $\pm C_0/\pi f$.

Таким образом, в случае, когда $\alpha \notin \mathrm{A}$, процесс не имеет СПМ. Проявляется это в расходимости интеграла (7.6).

Следовательно, *не все, даже стационарные, процессы, описываемые корреляционной функцией вида $K_x(\tau)$, имеют СПМ.* В частности процесс со степенной корреляционной функцией не имеет СПМ, если определяющий его параметр $\alpha \geq 1$.

Нетрудно убедиться, что процесс, описываемый степенной СПМ $S_{\overset{\circ}{x}}(f) \sim 1/f^{\beta}$ с показателем формы $\beta \notin B$, не имеет характерной для стационарного процесса корреляционной функции вида $K_x(\tau)$. Тогда интеграл, стоящий в правой части выражения (7.5), расходится.

7.3. ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИНЕРА—ХИНЧИНА

Преобразование Винера—Хинчина, связывающее корреляционную функцию $K_x(\tau)$ *стационарного случайного процесса* $X(t)$ с его спектральной плотностью мощности $S_x(f)$, может быть использовано для описания *нестационарных случайных процессов* [Харкевич, 1973].

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $X(t)$, определенный на всей числовой оси. Корреляционную функцию этого процесса можно представить в виде

$$K_x(t,\tau) = \mathrm{M}\left[X(t)X(t-\tau)\right]. \tag{7.7}$$

Средняя по аргументу t корреляционная функция $\bar{K}_x(\tau)$ может быть определена следующим образом:

$$\bar{K}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} K_x(t,\tau)\,dt. \tag{7.8}$$

Спектр средней корреляционной функции $\bar{K}_x(\tau)$ описывается выражением

$$\bar{S}_x(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau. \tag{7.9}$$

Подставляя выражения (7.7), (7.8) в формулу (7.9), получаем

$$\bar{S}_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{M}\left[X(t)X(t-\tau)\right]\exp(-j2\pi f\tau)dtd\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\mathrm{M}\left[X(t)X(t_1)\right]\exp[-j2\pi f(t-t_1)]dtdt_1 =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{M}\left[\dot{A}_{X_T}(f)\overset{*}{\dot{A}}_{X_T}(f)\right] = \lim_{T\to\infty}\mathrm{M}\left[S_{X_T}(f)\right] = S_x(f), \tag{7.10}$$

где комплексный спектр $\dot{A}_{X_T}(f)$ и спектр мощности $S_{X_T}(f)$ описываются выражениями (7.1) и (7.2).

Из выражения (7.10) следует, что спектр средней корреляционной функции $\bar{S}_x(f)$ можно трактовать как

• усредненный по ансамблю нормированный квадрат модуля мгновенного спектра $\dot{A}_{X_T}(f)$ на бесконечно большом интервале T,

• усредненный по ансамблю спектр мощности $S_{X_T}(f)$ на бесконечно большом интервале T,

• СПМ $S_x(f)$ процесса $X(t)$.

Среднюю корреляционную функцию процесса можно найти по его СПМ $S_x(f)$ следующим образом:

$$\bar{K}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau) df. \tag{7.11}$$

Выражения (7.9) и (7.11) представляют собой *обобщенное преобразование Винера—Хинчина*, справедливое *как для стационарных, так и нестационарных процессов.*

Обратим внимание, что *не обязательно нестационарный процесс имеет одновременно среднюю корреляционную функцию* $\bar{K}_x(\tau)$ *и СПМ* $S_x(f)$.

Существуют нестационарные процессы, описываемые определенными СПМ, но не имеющие средних корреляционных функций. И, наоборот, *существуют нестационарные процессы, описываемые определенными средними корреляционными функциями, но не имеющие СПМ.*

Ситуация с нестационарными процессами напоминает ситуацию, рассмотренную в параграфах 7.1 и 7.2 для стационарного процесса, в которых шла речь о возможном отсутствии или корреляционной функции $K_x(\tau)$, или СПМ $S_x(f)$. В данном случае отмечается возможность отсутствия или средней корреляционной функции $\bar{K}_x(\tau)$, или СПМ $S_x(f)$.

В принципе, могут существовать процессы, у которых отсутствуют обе характеристики: и среднее корреляционной функции $\bar{K}_x(\tau)$, и СПМ $S_x(f)$.

Отметим, что отсутствие той или иной характеристики вызывается *нарушением сходимости.*

7.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА И ЕГО СПМ

Представим случайный процесс $X_T(t)$ на интервале времени $[0,T]$ в виде суммы центрированного процесса $\overset{\circ}{X}_T(t)$ и среднего $\bar{m}_{X_T}$ по времени:

$$X_T(t) = \overset{\circ}{X}_T(t) + \bar{m}_{X_T}, \tag{7.12}$$

где $\bar{m}_{X_T} = \frac{1}{T}\int_0^T X_T(t)dt.$

В общем случае процесс $X_T(t)$ может быть нестационарным.

Процесс $\overset{\circ}{X}_T(t)$ связан со своим комплексным спектром $\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f)$ парой преобразований Фурье:

$$\overset{\circ}{X}_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f)\exp(j2\pi ft)df, \tag{7.13}$$

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f) = \int_0^T \overset{\circ}{X}_T(t)\exp(-j2\pi ft)dt. \tag{7.14}$$

Среднее процесса $X_T(t)$

$$Y_T(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X_T(t_1)dt_1 = \overset{\circ}{Y}_T(t) + \bar{m}_{Y_T}, \tag{7.15}$$

где

$$\overset{\circ}{Y}_T(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \overset{\circ}{X}_T(t_1)dt_1 \tag{7.16}$$

— среднее центрированного процесса, $\bar{m}_{Y_T} = \bar{m}_{X_T}$.

Среднее $\overset{\circ}{Y}_T(t)$ связано со своим комплексным спектром $\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f)$ парой преобразований Фурье:

$$\overset{\circ}{Y}_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f)\exp(j2\pi ft)df, \tag{7.17}$$

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f) = \int_0^T \overset{\circ}{Y}_T(t)\exp(-j2\pi ft)dt. \tag{7.18}$$

Для непрерывного процесса $X_T(t)$ параметр статистической неустойчивости γ_T, аналогичный параметру статистической неустойчивости γ_N для дискретного процесса (см. формулу (5.4)), описывается выражением

$$\gamma_T = \mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_T}\right] / \bar{D}_{x_T},$$

где $\bar{D}_{Y_T} = \dfrac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{Y}{}_T^2(t)dt$ — оценка дисперсии процесса $Y_T(t)$, $\bar{D}_{x_T} = \dfrac{1}{T}\int_0^T D_x(t)dt$ — средняя дисперсия процесса $X_T(t)$, $D_x(t)$ — дисперсия процесса $X_T(t)$.

Математическое ожидание оценки дисперсии процесса $Y_T(t)$

$$\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_T}\right] = \mathrm{M}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{Y}{}_T^2(t)dt\right]. \tag{7.19}$$

Мощность процесса не зависит от базиса его представления (*равенство Парсеваля*). Поэтому

$$\frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{Y}{}_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\overset{\circ}{Y}_T}(f)df, \tag{7.20}$$

где

$$S_{\overset{\circ}{Y}_T}(f) = \frac{1}{T}\left|\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f)\right|^2 \tag{7.21}$$

— спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{Y}_T(t)$.

Выражая комплексный спектр $\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f)$ через комплексный спектр $\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f)$ с помощью равенств (7.18), (7.16), (7.13) и проводя интегрирование по t_1, выражение (7.18) можно записать в следующем виде:

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f_1)\dot{\Delta}_T(f, f_1)df_1, \tag{7.22}$$

где

$$\dot{\Delta}_T(f, f_1) = \int_0^T \frac{\sin \pi f_1 t}{\pi f_1 t}\exp[j\pi(f_1 - 2f)t]dt. \tag{7.23}$$

Функция $\dot{\Delta}_T(f, f_1)$ обладает режекторными свойствами, в чем нетрудно убедиться. Представим интеграл (7.23) в виде суммы интегральных синуса и косинуса, учтем, что [Прудников, Брычков, Маричев, 1981]

$$\int_0^x \frac{1-\cos x}{x}\,dx = C + \ln x - \mathrm{ci}(x),$$

и воспользуемся известным асимптотическим представлением интегральных синуса и косинуса [Янке, Эмде, Леш, 1964]:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \approx -\frac{\cos x}{x},$$

$$\mathrm{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \approx \frac{\sin x}{x}.$$

В результате несложных, но громоздких аналитических преобразований можно получить следующее приближенное выражение для функции $\dot{\Delta}_T(f, f_1)$ при большом T:

$$\dot{\Delta}_T(f, f_1) \sim \begin{cases} T \quad \text{при} \quad f_1 = f = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi f_1}\left[\dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(f_1) - j\left(C + \ln\left|2\pi f_1 T\right|\right)\right] \ \text{при } f_1 = f \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi f_1}\left[\dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(f_1) + j\left(C + \ln\left|2\pi f_1 T\right|\right)\right] \ \text{при } f_1 \neq f = 0, \\ \dot{C}_0 \ \text{при других} \quad (f, f_1), \end{cases} \tag{7.24}$$

где $\mathrm{sgn}(x)$ — знак числа x, C — *постоянная Эйлера—Маскерони* ($C \approx 0{,}577216$), $\dot{C}_0$ — ограниченная по модулю величина, не зависящая от T.

При $T \to \infty$ и $f_1 = f \neq 0$ выражение (7.24) эквивалентно выражению

$$\dot{\Delta}_T(f, f_1) \sim \frac{\delta(f - f_1)}{2\pi f_1 T}\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(f_1) - j(C + \ln\left|2\pi f_1 T\right|)\right]. \tag{7.25}$$

Использовав асимптотическое равенство (7.25) в формуле (7.22), для больших значений T и $f \neq 0$ получим соотношение

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_T}(f) \sim -j\frac{\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f)\ln\left|fT\right|}{2\pi f T}.$$

Подставим это выражение в формулу (7.21) и воспользуемся соотношениями (7.19), (7.20). В результате для больших значений T имеем

$$\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_T}\right] = \frac{1}{2\pi^2 T^2}\int_0^\infty \frac{\ln^2 fT}{f^2} S_{\overset{\circ}{x}_T}(f)df, \tag{7.26}$$

где $S_{\overset{\circ}{x}_T}(f) = \frac{1}{T}\mathrm{M}\left[\left|\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_T}(f)\right|^2\right]$ — СПМ процесса $\overset{\circ}{X}_T$.

С учетом равенства Парсеваля

$$\bar{D}_{x_T} = 2\int_0^\infty S_{\overset{\circ}{x}_T}(f)df. \tag{7.27}$$

Для упрощения дальнейших выкладок не в ущерб общности можно принять, что время и частота — безразмерные величины.

Для нахождения главных значений интегралов в выражениях (7.26) и (7.27) заменим нижний и верхний пределы интегрирования соответственно на $1/T$ и T. Тогда при $T \to \infty$ параметр статистической неустойчивости

$$\gamma = \lim_{T\to\infty}\gamma_T = \lim_{T\to\infty}\frac{\int_{1/T}^{T}\frac{\ln^2 fT}{f^2}S_{\overset{\circ}{x}_T}(f)df}{4\pi^2 T^2\int_{1/T}^{T}S_{\overset{\circ}{x}_T}(f)df}. \tag{7.28}$$

Из формулы (7.28) следует, что *статистическая устойчивость процесса, имеющего СПМ, определяется СПМ.*

Обратим внимание, что формула (7.28) справедлива не только для стационарных, но и для нестационарных и детерминированных процессов.

7.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО СТЕПЕННОЙ СПМ

Рассмотрим для примера процесс с нулевым средним, СПМ которого при $T\to\infty$ и $f \neq 0$ описывается степенной функцией:

$$S_{\overset{\circ}{x}_T}(f) = C_0/f^\beta, \tag{7.29}$$

где C_0 — константа.

Таблица 7.1

№ п/п	Значение параметра β	Статистическая устойчивость	Существование одновременно СПМ и КФ
1	$\beta \le 0$	+	—
2	$0 < \beta < 1$	+	+
3	$\beta \ge 1$	—	—

Заметим, что модель (7.29) охватывает широкий спектр процессов: процессы, у которых с понижением частоты интенсивность возрастает ($\beta > 0$), белый шум, у которого интенсивность одинакова на всех частотах ($\beta = 0$), а также процессы с возрастающей при повышении частоты интенсивностью ($\beta < 0$). Эта модель может описывать детерминированный, стационарный или нестационарный процесс.

Подставляя выражение (7.29) в формулу (7.28), имеем

$$\gamma = \lim_{T\to\infty} \frac{\int\limits_{1/T}^{T} \frac{\ln^2 fT}{f^{\beta+2}}\,df}{4\pi^2 T^2 \int\limits_{1/T}^{T} f^{-\beta} df}. \tag{7.30}$$

В результате интегрирования и раскрытия неопределенности получается аналитическое выражение, анализ которого показывает, что процесс статистически устойчив при $\beta < 1$ и неустойчив при $\beta \ge 1$.

Эти результаты, а также результаты, касающиеся условий существования одновременно СПМ и корреляционной функции (КФ) процесса вида $K_x(\tau)$, приведены в табл. 7.1.

ЗАВИСИМОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ОТ ЕГО СПЕКТРА

Установлена связь между статистической устойчивостью дискретного процесса и его спектральной плотностью мощности. Приведены результаты моделирования, подтверждающие корректность формул, описывающих зависимость параметров статистической неустойчивости от спектральной плотности мощности процесса.

8.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ И СПМ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА

Процесс $X_T(t)$ конечной длительности T может быть представлен последовательностью дискретных отсчетов:

$$X_N(n) = \overset{\circ}{X}_N(n) + \bar{m}_{X_N} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N), \tag{8.1}$$

где $N = T / \Delta t$ — объем выборки, Δt — период дискретизации, $\overset{\circ}{X}_N(n)$ — центрированная составляющая последовательности $X_N(n)$, $\bar{m}_{X_N} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_N(n)$ — ее среднее.

Составляющая $\overset{\circ}{X}_N(n)$ связана со своим комплексным спектром $\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k)$ соотношениями

$$\overset{\circ}{X}_N(n) = \sum_{k=1}^{N} \dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k)\dot{W}_{kn},$$

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overset{\circ}{X}_N(n)\overset{*}{W}_{kn},$$

где k — номер спектрального отсчета ($k = \overline{1, N}$),

$$\dot{W}_{kn} = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1) \right),$$

а звездочка над буквой означает комплексное сопряжение.

Среднее последовательности $X_N(n)$

$$Y_N(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_N(i) = \overset{\circ}{Y}_N(n) + \bar{m}_{Y_N},$$

где $\overset{\circ}{Y}_N(n)$ — центрированная составляющая последовательности $Y_N(n)$, $\bar{m}_{Y_N}$ — ее среднее ($\bar{m}_{Y_N} = \bar{m}_{X_N}$).

Составляющая $\overset{\circ}{Y}_N(n)$ связана со своим комплексным спектром $\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k)$ соотношениями

$$\overset{\circ}{Y}_N(n) = \sum_{k=1}^{N} \dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k)\dot{W}_{kn},$$

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overset{\circ}{Y}_N(n)\overset{*}{\dot{W}}_{kn}.$$

Дискретные аналоги формул (7.20)—(7.23) имеют следующий вид:

$$\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} \overset{\circ}{Y}{}^2_N(n) = \frac{N}{N-1}\sum_{k=1}^{N} S_{\overset{\circ}{Y}_N}(k), \tag{8.2}$$

$$S_{\overset{\circ}{Y}_N}(k) = \left| \dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k) \right|^2, \tag{8.3}$$

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k) = \sum_{k_1=1}^{N} \dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k_1)\dot{\Delta}_N(k, k_1), \tag{8.4}$$

$$\dot{\Delta}_N(k,k_1) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}(k_1-1)n}{n\sin\frac{\pi}{N}(k_1-1)} \times$$

$$\times\exp\left\{ j\frac{\pi}{N}\left[(k_1-1) - 2(k-1)\right](n-1) \right\}. \tag{8.5}$$

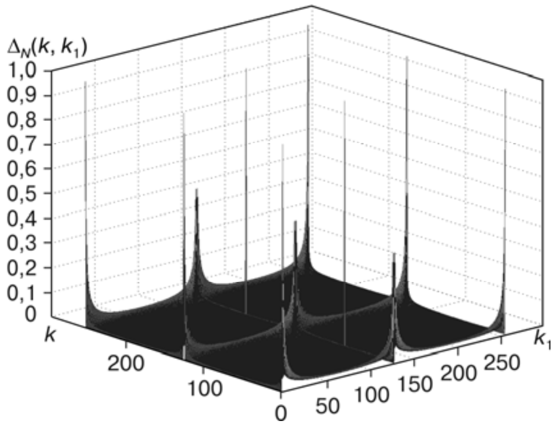


Рис. 8.1. Зависимость модуля функции $\Delta_N(k,k_1)$ от номеров спектральных отсчетов k и k_1 для $N = 128$

Анализ выражения (8.5) и компьютерное моделирование показывают, что функция $\dot{\Delta}_N(k,k_1)$, подобно функции $\dot{\Delta}_T(f,f_1)$, описываемой формулой (7.23), обладает режекторными свойствами.

На рис. 8.1 приведена зависимость модуля функции $\Delta_N(k,k_1) = \left|\dot{\Delta}_N(k,k_1)\right|$ от номеров спектральных отсчетов k и k_1. Как видно, функция $\Delta_N(k,k_1)$ периодическая по аргументам k и k_1 с периодами соответственно N и $2N$. В диапазоне $1 \le k \le N+1$,

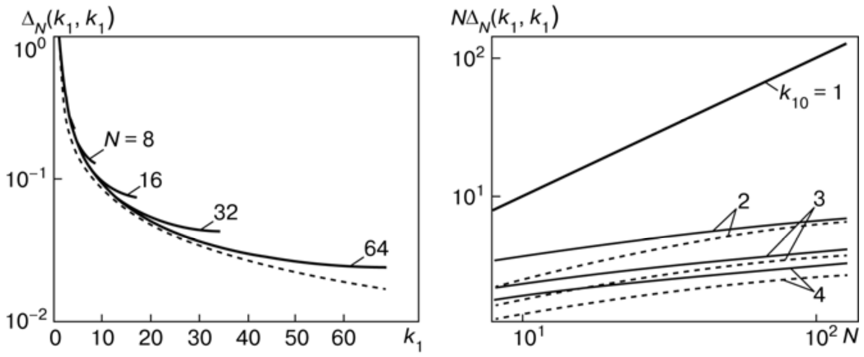


Рис. 8.2. Зависимости функции $\Delta_N(k_1,k_1)$ от аргумента k_1 (*а*) и функции $N\Delta_N(k_1,k_1)$ от объема выборки N при фиксированных значениях параметра k_1 (*б*)

$1 \le k_1 \le N+1$ в подавляющем большинстве точек она близка к нулю. Повышенные уровни (гребни) наблюдаются при совпадении аргументов ($k_1 = k$) и на нулевой частоте ($k = 1$). Вблизи точек $(1, 1)$, $(N+1, 1)$, $(N/2, N+1)$ и $(N+1, N+1)$, $(1, N+1)$ уровень повышенный. Максимальные значения, равные единице, эта функция принимает в первых трех указанных точках, а нулевое значение — в последних двух.

Вдоль гребней на интервале $1 \le k_1 \le N/2$ уровень функции $\Delta_N(k, k_1)$ уменьшается с увеличением аргумента k_1 (рис. 8.2, *а*, сплошные линии), а на интервале $N/2 < k_1 \le N$ — увеличивается по тому же закону. На этом рисунке пунктирной линией изображена аппроксимирующая функция.

На интервале $1 < k_1 \le N/2$ имеют место следующие равенства:

$$\dot{\Delta}_N(k_1, k_1) = -\overset{*}{\dot{\Delta}}_N(N - k_1 + 1, N - k_1 + 1) =$$

$$= \overset{*}{\dot{\Delta}}_N(1, k_1) = -\dot{\Delta}_N(1, N - k_1 + 1).$$

При увеличении объема выборки N функция $N\Delta_N(k, k_1)$ возрастает. Поскольку разрешение по частоте $1/T$ зависит от длительности процесса T, для разных интервалов наблюдения T фиксированной частоте f_1 соответствуют разные номера спектральных отсчетов k_1.

Для фиксированной ненулевой частоты ($k_1 \ne 1$) функция $N\Delta_N(k_1, k_1)$ с увеличением времени наблюдения растет примерно по логарифмическому закону, а для нулевой частоты ($k_1 = 1$) — по линейному. Зависимость функции $N\Delta_N(k_1, k_1)$ от объема выборки N для спектральных отсчетов $k_1 = \dfrac{(k_{10} - 1)N + N_0}{N_0}$, соответствующих фиксированным частотам ($k_{10} = \overline{1,4}$, $N_0 = 8$), приведены на рис. 8.2, *б* (сплошные линии). Пунктирными линиями изображены аппроксимирующие функции.

Для аппроксимации использовался дискретный аналог формулы (7.24):

$$\dot{\Delta}_N(k,k_1)=\begin{cases}1 \quad \text{при} \quad k_1=k=1,\\ A_{1k_1}\left[\dfrac{\pi}{2}-jL_{1k_1}\right] \quad \text{при} \quad k=k_1, \quad 1<k_1\le\dfrac{N}{2},\\ A_{1k_1}\left[\dfrac{\pi}{2}+jL_{1k_1}\right] \quad \text{при} \quad k=1, \quad 1<k_1\le\dfrac{N}{2},\\ A_{2k_1}\left[-\dfrac{\pi}{2}-jL_{2k_1}\right] \quad \text{при} \quad k_1=k, \quad \dfrac{N}{2}<k_1\le N,\\ A_{2k_1}\left[-\dfrac{\pi}{2}+jL_{2k_1}\right] \quad \text{при} \quad k=1, \quad \dfrac{N}{2}<k_1\le N,\\ 0 \quad \text{при} \quad \text{других} \quad (k,\,k_1),\end{cases} \tag{8.6}$$

где $A_{1k_1}=\dfrac{1}{2\pi(k_1-1)}$, $L_{1k_1}=C+\ln(2\pi(k_1-1))$, $A_{2k_1}=\dfrac{1}{2\pi(N-k_1+2)}$, $L_{2k_1}=C+\ln\left(2\pi(N-k_1+2)\right)$, полученный с помощью известного выражения для сумм рядов [Янке, Эмде, Леш, 1964]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\begin{Bmatrix}\sin xn\\ \cos xn\end{Bmatrix}=\frac{\pi-x}{2}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} \qquad (0<x<2\pi).$$

С учетом соотношения (8.6) спектр $\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k)$ при большом N описывается следующим выражением:

$$\dot{A}_{\overset{\circ}{Y}_N}(k)\sim\begin{cases}A_{1k}\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k)\left[\dfrac{\pi}{2}-jL_{1k}\right] \quad \text{при} \quad 1<k\le\dfrac{N}{2},\\ A_{2k}\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k)\left[-\dfrac{\pi}{2}-jL_{2k}\right] \quad \text{при} \quad \dfrac{N}{2}<k\le N.\end{cases} \tag{8.7}$$

Дискретный аналог выражения (7.26) при большом N имеет следующий вид:

$$\mathrm{M}\left[\bar{D}_{\overset{\circ}{Y}_N}\right]\approx\frac{N}{2\pi^2(N-1)}\sum_{k=2}^{N/2}\frac{1}{(k-1)^2}\left[\frac{\pi^2}{4}+L_{1k}^2\right]S_{\overset{\circ}{x}_N}(k), \tag{8.8}$$

где $S_{\overset{\circ}{x}_N}(k)$ — СПМ последовательности $\overset{\circ}{X}_N(n)$:

$$S_{\overset{\circ}{x}_N}(k)=\mathrm{M}\left[S_{\overset{\circ}{X}_N}(k)\right]=\mathrm{M}\left[\left|\dot{A}_{\overset{\circ}{X}_N}(k)\right|^2\right].$$

Учитывая, что в соответствии с равенством Парсеваля

$$\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}{}_N^2(n)\right]=\frac{2N}{N-1}\sum_{k=2}^{N/2}S_{\overset{\circ}{x}_N}(k),$$

параметр статистической неустойчивости можно представить в таком виде:

$$\gamma_N=\frac{\sum\limits_{k=2}^{N/2}\frac{1}{(k-1)^2}\left[\frac{\pi^2}{4}+\left(C+\ln(2\pi(k-1))\right)^2\right]S_{\overset{\circ}{x}_N}(k)}{4\pi^2\sum\limits_{k=2}^{N/2}S_{\overset{\circ}{x}_N}(k)}. \tag{8.9}$$

8.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО СТЕПЕННОЙ СПМ

Рассмотрим для примера дискретный процесс со СПМ, описываемый выражением

$$S_{\overset{\circ}{x}_N}(k)=\frac{C_0N^\beta}{(k-1)^\beta},\quad k=\overline{2,N/2}, \tag{8.10}$$

где C_0 — константа.

Подставив выражение (8.10) в формулу (8.9), получим

$$\gamma_N=\frac{\sum\limits_{k=2}^{N/2}(k-1)^{-(\beta+2)}\left[\frac{\pi^2}{4}+\left(C+\ln(2\pi(k-1))\right)^2\right]}{4\pi^2\sum\limits_{k=2}^{N/2}(k-1)^{-\beta}}. \tag{8.11}$$

Результаты расчетов параметров γ_N и μ_N с использованием формулы (8.11) приведены на рис. 8.3, *а* и 8.3, *б* соответственно (сплошные линии). Пунктирными линиями для сравнения изображены аналогичные кривые для эталонной статистически устойчивой последовательности с некоррелированными элементами, нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией D_x, полученные аналитическим путем. На обоих рисунках с увеличением объема выборки N при $\beta<1$ кривые стремятся к нулевому, а при $\beta\geq 1$ — к ненулевому значению. Это означает, что

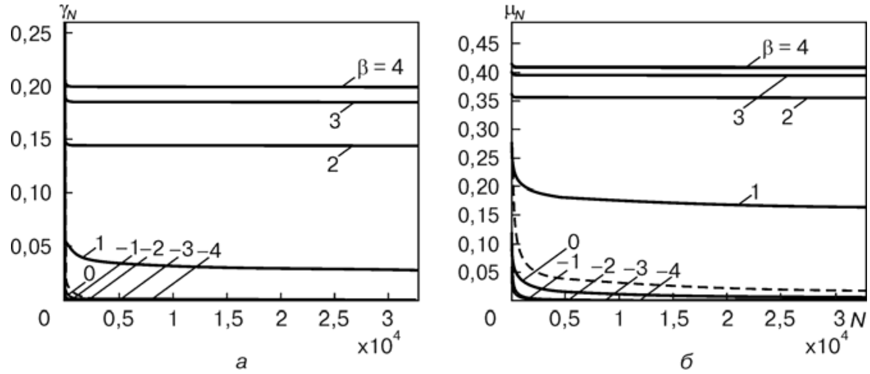


Рис. 8.3. Зависимость параметров γ_N (*а*) и μ_N (*б*) от объема выборки N

последовательность со СПМ, описываемой степенной функцией (8.10), проявляет свойство статистической устойчивости при $\beta < 1$ и свойство статистической неустойчивости при $\beta \geq 1$.

Результаты приведенных расчетов полностью согласуются с аналогичными выводами, полученными в главе 7 аналитическим путем для непрерывного случая.

Некоторое расхождение между кривыми для $\beta = 0$ и кривыми для контрольной эталонной последовательности можно объяснить различием принятых моделей при ограниченном объеме выборки. По мере увеличения объема выборки погрешность, как видно из рис. 8.3, уменьшается.

Поскольку при единичном значении параметра β происходит смена неустойчивого состояния на устойчивое, процесс с параметром $\beta = 1$ можно рассматривать как предельный неустойчивый процесс.

8.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ СТЕПЕННОЙ СПМ

Для проверки корректности полученных формул проведено компьютерное моделирование. С помощью датчика случайных чисел моделировался белый гауссовский шум, подвергавшийся затем фильтрации фильтром с различными коэффициентами передачи, описываемыми степенной функцией с параметром $\beta/2$, $\beta = \overline{-4,2}$ (рис. 8.4).

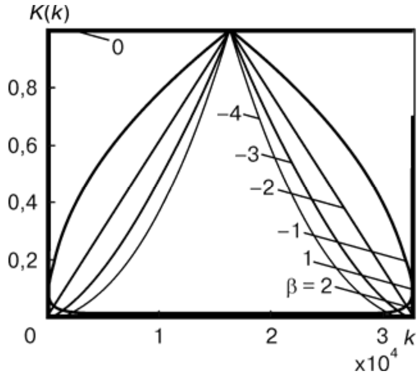


Рис. 8.4. Коэффициенты передачи фильтров

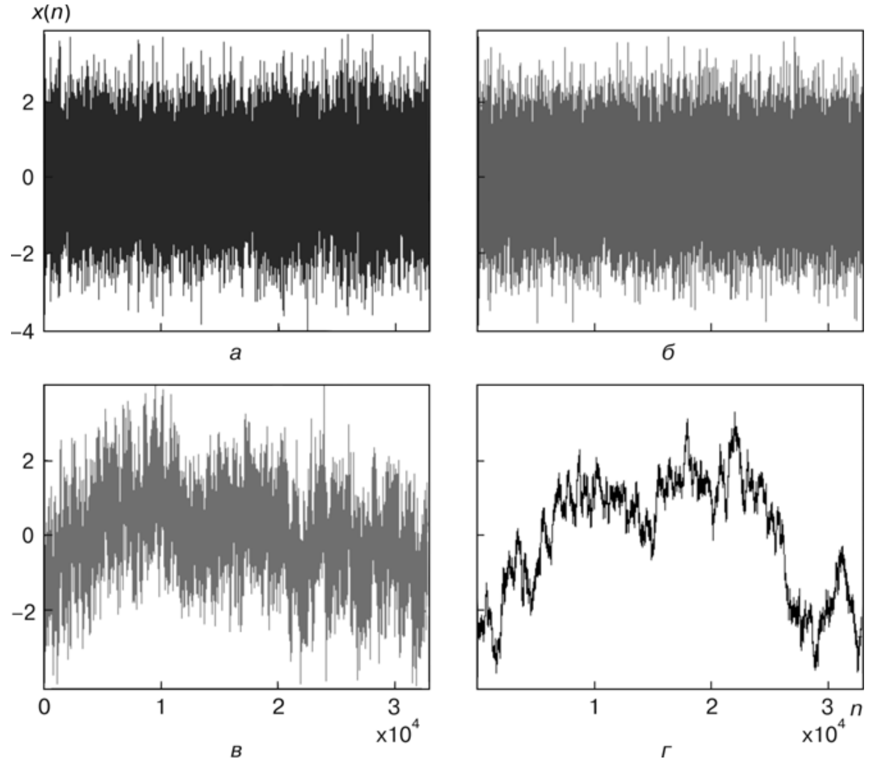


Рис. 8.5. Реализации шумов, сформированных фильтрами с параметрами $\beta = -4$ (*а*), $\beta = 0$ (*б*), $\beta = 1$ (*в*) и $\beta = 2$ (*г*)

Примеры реализаций шумов, сформированных в результате фильтрации, и их спектры приведены соответственно на рис. 8.5, *а—г* и 8.6, *а—г*. Соответствующие выборочные средние представлены на рис. 8.7, *а—г*.

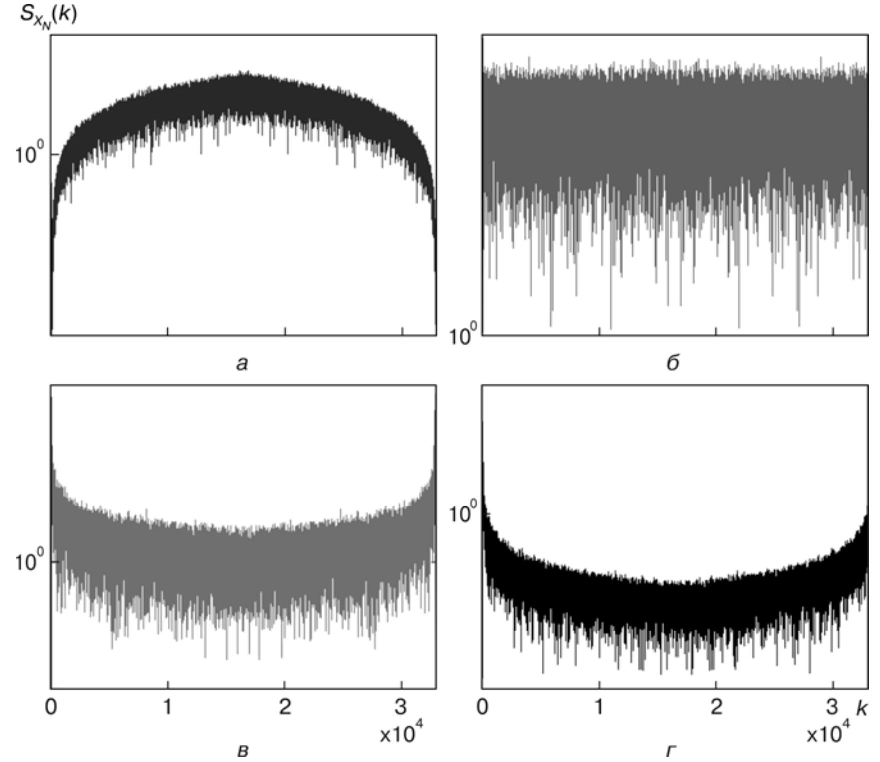


Рис. 8.6. Спектры шумов, сформированных фильтрами с параметрами $\beta = -4$ (*а*), $\beta = 0$ (*б*), $\beta = 1$ (*в*) и $\beta = 2$ (*г*)

По множеству реализаций полученных шумов рассчитывались оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^* и h_N^* (рис. 8.8, 8.9). Оценки формировались путем усреднения данных по 512 реализациям.

На рисунках сплошными линиями показаны оценки γ_N^*, μ_N^* и h_N^* при разных значениях параметра β, а пунктирными линиями — результаты расчета аналогичных параметров γ_N, μ_N и h_N с использованием формулы (8.11).

Как видно, расчетные кривые хорошо согласуются с результатами моделирования. Прослеживается выраженная тен-

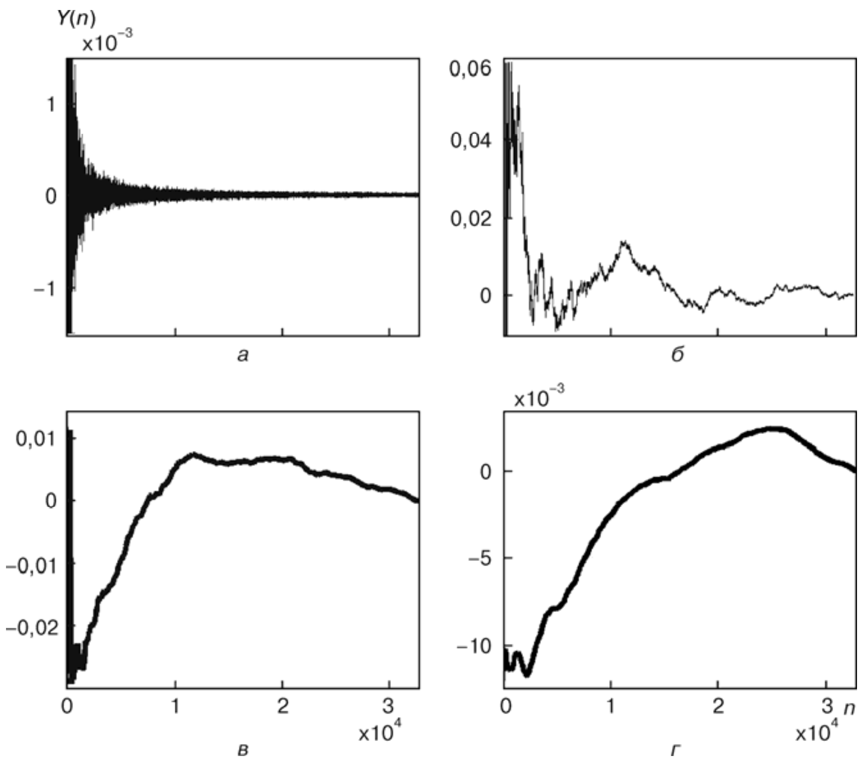


Рис. 8.7. Выборочные средние шумов, сформированных фильтрами с параметрами $\beta = -4$ (*а*), $\beta = 0$ (*б*), $\beta = 1$ (*в*) и $\beta = 2$ (*г*)

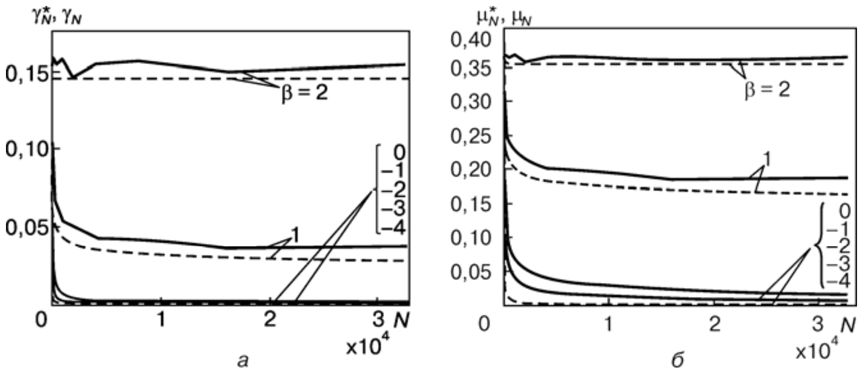


Рис. 8.8. Параметры статистической неустойчивости γ_N^*, γ_N (*а*) и μ_N^*, μ_N (*б*)

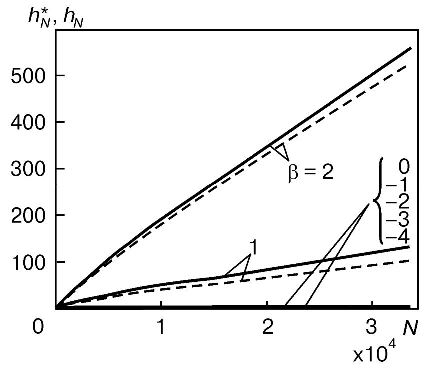


Рис. 8.9. Параметры статистической неустойчивости h_N^* и h_N

денция уменьшения значений параметров γ_N^*, μ_N^* и γ_N, μ_N с увеличением объема выборки для статистически устойчивых процессов (с параметрами формы $\beta < 1$) и тенденция стабилизации их уровня для статистически неустойчивых процессов (с параметрами формы $\beta = \overline{1,2}$).

Таким образом, результаты моделирования подтверждают зависимость статистической устойчивости процесса от формы его спектральной плотности мощности.

ЧАСТЬ II

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Во второй части книги представлены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости разнообразных процессов разной физической природы, проведенные с использованием описанной выше методики.

Исследованы, в частности, колебания напряжения городской сети, высоты морских волн и периода их следования, температуры и скорости звука в океане, интенсивности излучения астрофизических объектов, температуры воздуха и количества осадков, магнитного поля Земли, курса валют и др.

Исследована статистическая устойчивость разных типов шумов: цветных, фликкер, самоподобных (фрактальных).

Выявлены причины нарушения статистической устойчивости процессов.

Обобщены результаты экспериментальных и модельных исследований.

Глава 9

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА БОЛЬШИХ ИНТЕРВАЛАХ НАБЛЮДЕНИЯ

Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости различных физических процессов: собственных шумов усилителя, гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют. Обращено внимание, что на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости не обнаруживаются, однако на больших интервалах наблюдения все процессы оказываются статистически неустойчивыми.

9.1. ПРИМЕРЫ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

При длительном наблюдении любой величины или процесса [1] обнаруживаются более-менее значимые нарушения статистической устойчивости. Для примера на рис. 9.1, *а—з* приведены результаты исследования динамики изменения усредненных спектров собственных шумов низкокачественного бытового усилителя [2].

При относительно небольшом количестве усредняемых мгновенных спектров (в данном случае до сотни) по мере увеличения их числа усредненный спектр становится все более и более сглаженным (см. рис. 9.1) и уровень шумов уменьшается, однако далее эта тенденция нарушается: усредненный спектр становится более изрезанным и его уровень возрастает. Дальнейшее увеличение числа усредняемых спектров (в данном случае до тысячи)

[1] Исключение могут составлять, по всей видимости, лишь мировые константы.

[2] Для исследования преднамеренно был выбран низкокачественный усилитель, так как в нем нарушение статистической устойчивости начинает проявляться уже на небольшом интервале наблюдения.

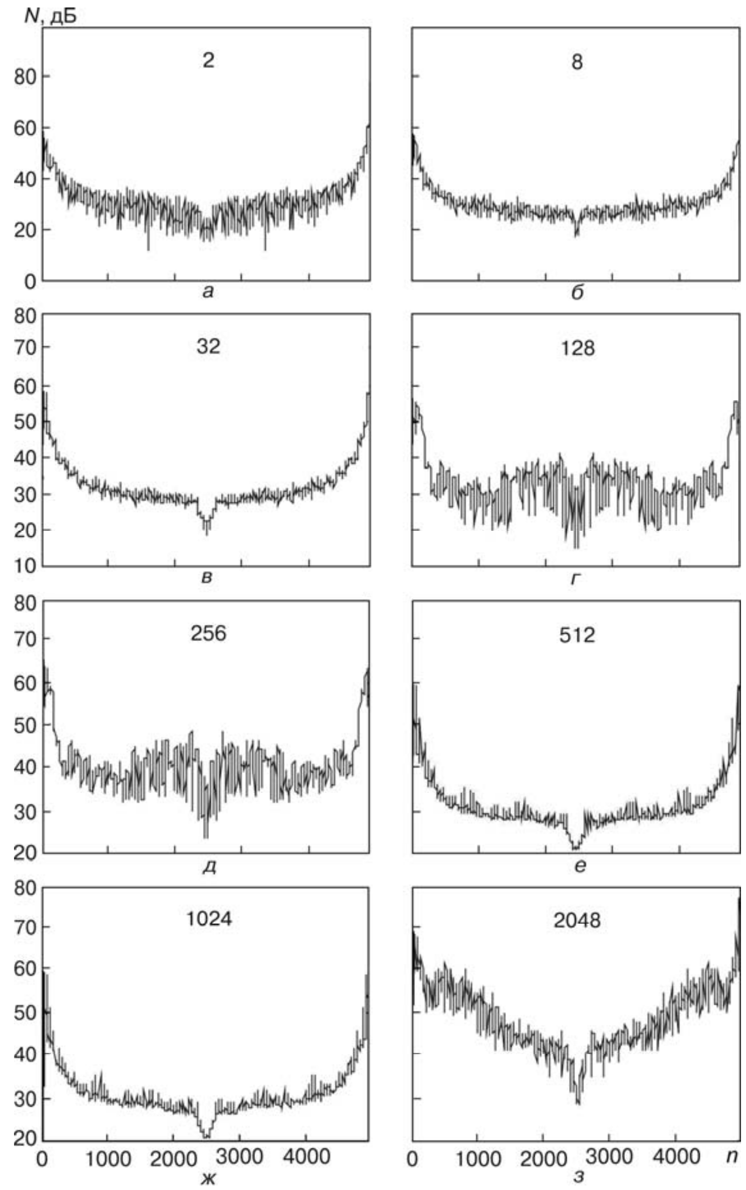


Рис. 9.1. Усредненный спектр собственных шумов усилителя при различном числе усреднений: 2, 8, 32, 128, 256, 512, 1024 и 2048 (соответственно *а—з*). Ось абсцисс – номер *n* спектрального отсчета

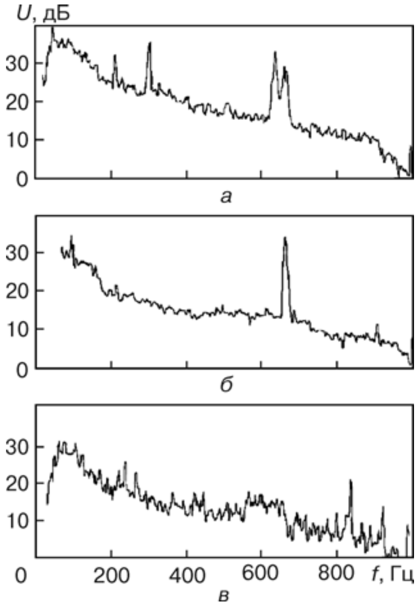


Рис. 9.2. Спектры шумов одного и того же судна в разные периоды наблюдения

снова вызывает сглаживание усредненного спектра и уменьшение уровня шумов, однако затем эта тенденция опять нарушается.

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что длительное накопление данных не всегда приводит к желаемому подавлению шумов [3].

Судя по результатам измерений, рассматриваемый шумовой процесс соответствует рассмотренной в п. 4.3.1 модели, описываемой суммой примерно одинаковых по уровню нестационарных случайных процессов, у которых математические ожидания представляют собой периодические функции с существенно различающимися периодами.

Другой пример касается гидроакустики. На рис. 9.2 приведены спектры шумов морского судна, полученные автором в одной из Тихоокеанских экспедиций 80-х годов [4] (см. [Горбань, 2008, Gorban, 2008]). Спектры сняты в моменты времени, отстоящие друг от друга примерно на 10 минут. Как видно, они существенно различаются между собой. Дискретные составляющие на частотах 200 и 300 Гц, присутствующие в спектре, представленном на рис. 9.2, *а*, отсутствуют в спектрах, изображенных на рис. 9.2, *б*, *в*. Дискретные составляющие на частотах 625 и 650 Гц вначале трансформируются в дискретную составляющую на частоте 650 Гц, а затем исчезают. Зато появляются другие

[3] Приведенные спектры были получены и исследованы автором в 2010 г. В.И. Иваненко, давно и плодотворно занимающийся проблемой неопределенности (см., например, [Иваненко, Лабковский, 1990]), сообщил автору в частной беседе, что аналогичные исследования он проводил еще в 60-х годах XX в. и пришел к тем же выводам.

[4] Исследования проводились на научно-исследовательских судах «Академик М.А. Лаврентьев» и «Академик А.П. Виноградов» по приглашению Тихоокеанского океанологического института ДВНЦ АН СССР (ныне ДВО РАН).

дискретные составляющие, в частности на частотах 225, 250, 830, 925 Гц.

Спектры шумоизлучения судов и кораблей на более низких частотах (до 100 Гц) значительно более изрезаны. Исследование динамики изменения низкочастотных спектров показывает, что они тоже изменяются, хотя и не так быстро.

Изменения спектров шумоизлучения может быть вызвано разными причинами, в частности изменением режимов работы судовых устройств и механизмов.

Большую роль играет перемещение источника звука относительно приемника. Объясняется это следующим образом [Горбань, 2008, Gorban, 2008].

Гидроакустическая среда распространения колебаний существенно неоднородна, в особенности по глубине. В результате этого возникают *эффекты многолучевого* (на высоких и средних частотах) и *многомодового* (на низких частотах) *распространения* колебаний. Параметры лучей или мод, приходящих в точку приема, определяются гидрологическими условиями распространения колебаний, их частотой, а также расстоянием между источником звука и приемником. При взаимном перемещении источника и приемника расстояние изменяется, что вызывает статистически непрогнозируемые нарушения когерентности сигнала и, как следствие, нарушение статистической устойчивости спектра принимаемых колебаний.

Поэтому в условиях движения спектр принимаемого колебания значительно отличается от спектра излученного колебания. Интервал времени, в течение которого спектр мало изменяется, существенно зависит от направления и скорости взаимного перемещения источника звука и приемника, а также от частоты колебаний. Чем быстрее изменяется расстояние, тем меньше этот интервал. Как правило, для высоких частот он меньше, чем для низких частот.

При отсутствии взаимного перемещения источника звука и приемника эффект нарушения статистической устойчивости также наблюдается. В этом случае он вызван динамикой изменения среды. Поскольку эти изменения протекают достаточно медленно, интервал времени, на котором спектры мало изменяются, существенно больше.

Изменчивость спектров принимаемых колебаний ограничивает допустимую длительность их накопления.

Приведенные результаты исследований динамики изменения спектра собственных шумов усилителя и спектра шумов судна свидетельствуют об их статистической неустойчивости.

В этих исследованиях степень нарушения устойчивости количественно не оценивалась. Рассмотрим результаты других исследований, в которых проводились расчеты параметров статистической неустойчивости.

9.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ГОРОДСКОЙ ЭЛЕКТРОСЕТИ

Параметры электросети, в том числе и напряжение, изменяются. Существует стандарт [ГОСТ Р 51317.3.3-99, 1999], определяющий допустимые отклонения напряжения от номинального значения, вызываемые техническими средствами. Согласно этому стандарту максимальное относительное изменение напряжения не должно превышать 5,32 %, если эти изменения «вызваны ручными переключениями или частота их повторения меньше 1/ч».

Для изучения статистической устойчивости медленных колебаний напряжения электросети был изготовлен макет, включающий понижающий трансформатор, согласующее устройство (делитель напряжения) и компьютер с 16-разрядной звуковой картой.

Ввод сигнала в компьютер осуществлялся с частотой дискретизации 5 кГц. По каждым 1024 отсчетам вычислялись действующие (эффективные) значения напряжения, записываемые в память компьютера. Запись велась сеансами на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней.

Продолжительность каждого сеанса составляла около 60 часов. За время сеанса записывалось $N = 2^{20} \approx 1$ млн отсчетов напряжения.

Обработка полученных записей показала, что напряжение сети постоянно изменялось. В разных сеансах изменения носили разный характер. Для примера на рис. 1.5 (глава 1) приведены типичные зависимости напряжения сети от времени (в часах), полученные на протяжении двух сеансов, и соответствующие им выборочные средние.

Анализ полученного экспериментального материала выявил характерную особенность, присущую всем сделанным записям: *незатухающий характер выборочного среднего* (см. рис. 1.5, *б*, *г*).

Результаты расчетов параметров статистической неустойчивости выборочного среднего γ_N^* и μ_N^* для четырех сеансов записи приведены на рис. 9.3.

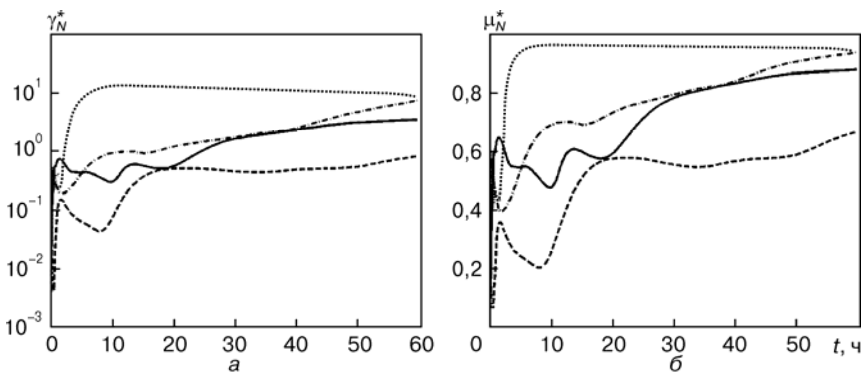


Рис. 9.3. Параметры статистической неустойчивости γ_N^* (*а*) и μ_N^* (*б*) для колебаний напряжения электросети на 60-часовых интервалах наблюдения

Как видно, в области больших времен наблюдения значения этих параметров либо проявляют тенденцию к возрастанию, либо, достигнув максимума, остаются примерно на одном и том же уровне.

Для всех полученных записей (не только соответствующих приведенным на рис. 9.3) значения параметров статистической неустойчивости γ_N^* и μ_N^* в конце 60-часового наблюдения оказались большими. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что *колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер.*

Интервал, на котором параметры статистической неустойчивости принимают большие значения, начинается от нескольких часов и доходит до конца записей. Следовательно, *интервал статистической устойчивости* τ_s *колебаний напряжения городской электросети равен примерно одному часу.*

Устойчивый характер наблюдаемых нарушений статистической устойчивости колебаний электросети, а также результаты предыдущего параграфа позволяют предположить, что аналогичные нарушения статистической устойчивости присущи и другим физическим явлениям.

9.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТЫ МОРСКИХ ВОЛН И ПЕРИОДА ИХ СЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время достаточно хорошо разработана теория случайного поля морских волн (см., например, [Полников, 2007]). Однако нет информации о статистической устойчивости параметров волнения.

Для оценки статистической устойчивости высоты морских волн и периода их следования были проведены специальные исследования. При этом использовались статистические данные о параметрах волнения моря, полученные Институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН за 15 месяцев наблюдения в районе Новороссийска (с сентября 2001 г. по декабрь 2003 г.) [Единая государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ]. Данные собраны с помощью волновой станции, показания которой регистрировались с интервалом от одного до нескольких часов.

Волнение моря за время наблюдения изменялось в широких пределах.

По собранным данным были получены оценки параметра статистической неустойчивости μ_N^* высоты морских волн и периода их следования (рис. 9.4).

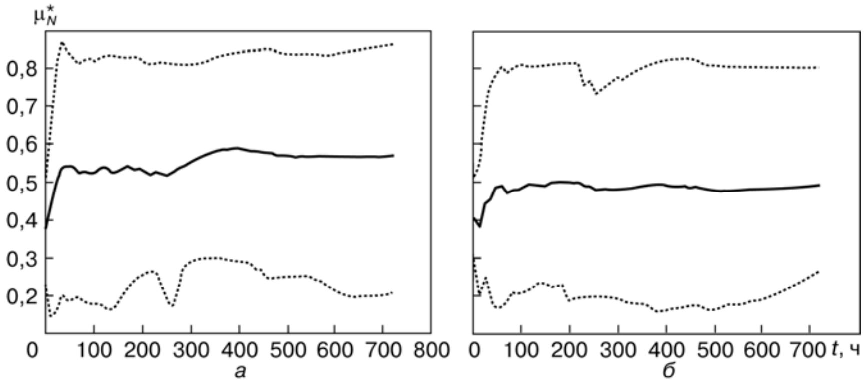


Рис. 9.4. Зависимости усредненных по 15 месяцам значений параметра статистической неустойчивости μ_N^* (сплошные кривые) и границ изменения этого параметра (точечные кривые) от времени наблюдения: *а* — для высоты максимальных волн, *б* — для периода максимальных волн

Дискретность вывода результатов расчета параметра статистической неустойчивости — примерно 10 ч. Нулевой отсчет времени соответствует первому результату расчета.

Из рис. 9.4 видно, что параметр статистической неустойчивости μ_N^* везде принимает большие значения. Это означает, что практически на всем интервале наблюдения *зависимости высоты и периода волн от времени носят явно статистически неустойчивый характер.*

Интервал статистической устойчивости τ_s колебаний высоты волн и периода их следования равен примерно 12 часам. Статистический прогноз этих параметров на интервале времени свыше полусуток практически невозможен.

9.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Магнитное поле Земли изменяется во времени и пространстве. На протяжении многих лет в различных точках Земли ведется систематическое наблюдение за его колебаниями. Такие работы проводит, в частности, Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.

На рис. 9.5, *а*, *в*, *д* приведены зависимости от времени x-, y- и z-составляющих индукции магнитного поля, построенные на основе данных этого института [Данные о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы, http], на рис. 9.5, *б*, *г*, *е* — соответствующие зависимости средних, а на рис. 9.6 — параметры статистической неустойчивости μ_N^*, рассчитанные по описанной выше методике.

Данные регистрировались с интервалом в один час. Оценка дисперсии D_{x_n} вычислялась по 16 измерениям.

Анализ рисунков показывает, что в целом магнитное поле Земли статистически неустойчиво, хотя существуют интервалы относительной устойчивости.

Интервал статистической устойчивости τ_s колебания магнитного поля Земли равен нескольким месяцам. Статистический прогноз индукции магнитного поля свыше нескольких месяцев проблематичен, а свыше нескольких лет — практически невозможен.

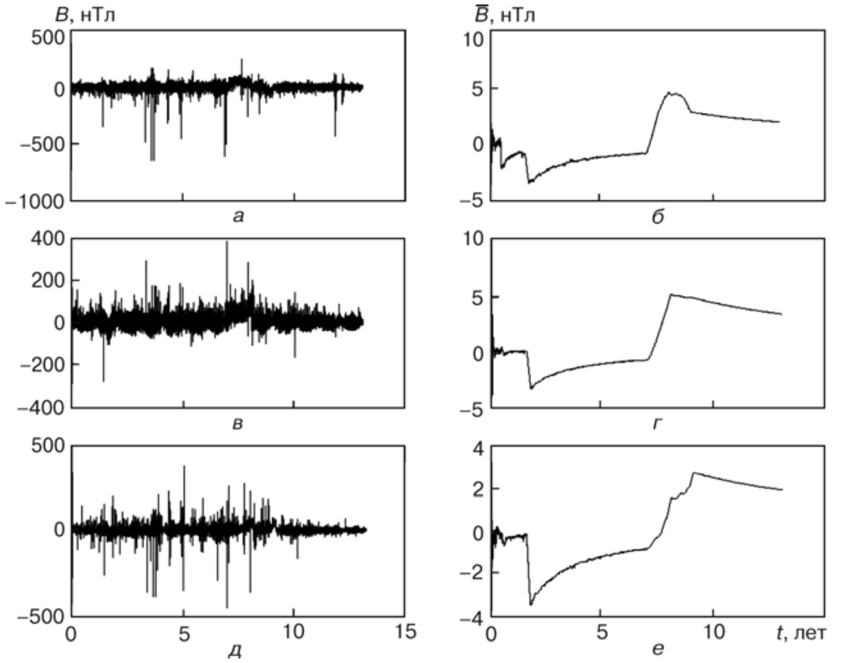


Рис. 9.5. Изменение *x*-, *y*- и *z*-составляющих индукции магнитного поля (*а*, *в*, *д*) и соответствующих выборочных средних (*б*, *г*, *е*) за 13 лет наблюдения в районе Москвы

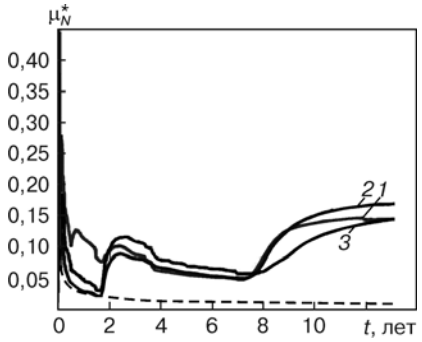


Рис. 9.6. Зависимости параметров статистической неустойчивости μ_N^* для *x*-, *y*- и *z*-составляющих индукции магнитного поля (соответственно кривые *1*, *2*, *3*) за 13 лет наблюдения в районе Москвы, а также для контрольного белого гауссовского шума (пунктирная кривая)

9.5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ КОТИРОВКИ ВАЛЮТ

Представление о статистической неустойчивости котировки валют дают кривые на рис. 9.7, полученные по данным FOREX [FOREX].

Из графиков следует, что параметр статистической неустойчивости принимает большие значения с первых же часов наблюдения и постоянно возрастает.

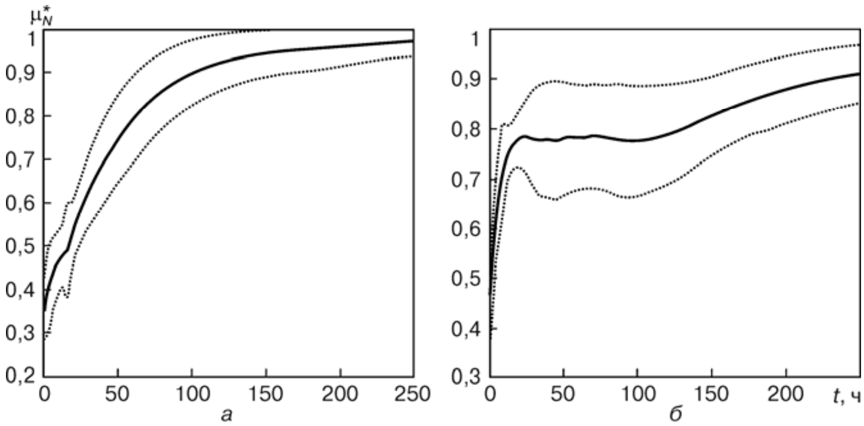


Рис. 9.7. Усредненный по 16 декадам параметр статистической неустойчивости μ_N^* (сплошная кривая) и границы изменения этого усредненного параметра (точечные кривые), определяемые СКО, для котировки конвертируемого австралийского доллара (AUD) по отношению к доллару США (USD) за 2001 г. (*а*) и 2002 г. (*б*)

Таким образом, *интервал статистической устойчивости* τ_s *колебания курса валют равен примерно 1—2 ч.* Статистический прогноз на большем интервале времени практически невозможен.

Глава 10

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районах Москвы и Киева, а также скорости ветра в районе Чернобыля. Все исследованные процессы оказались статистически неустойчивыми. Степень их неустойчивости разная. Установлено, что колебания температуры значительно более неустойчивы, чем колебания количества осадков.

10.1. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПОГОДУ

Погода и климат постоянно изменяются под воздействием множества факторов. Степень влияния каждого из них зависит от временного масштаба прогноза. При прогнозировании на период до месяца первостепенное значение имеют внутренние факторы, определяющие динамическую неустойчивость атмосферных течений, а при долгосрочном метеорологическом прогнозировании (ДМП), охватывающем прогноз погоды на период от месяца до двух лет и прогноз климата на больший срок, — внешние факторы, вызываемые воздействиями неадиабатического характера [Технологии].

Предвидеть изменение внешних факторов сложно, а зачастую, и невозможно. Поэтому при ДМП качество прогноза оказывается значительно ниже, чем при прогнозировании на небольшой срок.

Изменение характера воздействия внешних факторов сопровождается изменениями статистических условий, которые, как показывают экспериментальные исследования, приводят к нарушению статистической устойчивости процессов.

Заметим, что статистическая устойчивость того или другого параметра, характеризующего состояние атмосферы, зависит от интервала времени, на который осуществляется прогноз, и географического положения точки наблюдения. Выводы, касающиеся одного района, могут быть не справедливы для другого.

На протяжении многих лет ведутся ежесуточные наблюдения за температурой, осадками, скоростью ветра и другими метеорологическими параметрами в различных точках Земли.

Ниже приведены результаты оценки статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районах Москвы и Киева, а также скорости ветра в районе Чернобыля.

10.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА И КОЛИЧЕСТВА ОСАДКОВ В РАЙОНЕ МОСКВЫ

Для исследования статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районе Москвы использовались данные наблюдения за 43 года (с 1949 по 1992 г.) [Архив погоды по городам СНГ, http], в частности, суточные максимальные и минимальные температуры, а также среднесуточные осадки. Динамика изменения этих параметров показана на рис. 10.1, *а*, *в*, *д*, динамика изменения средних $y = \bar{x}$ — на рис. 10.1, *б*, *г*, *е*.

На рис. 10.2 приведены рассчитанные путем усреднения данных за 43 года наблюдения оценки математических ожиданий колебаний в течение года минимальной и максимальной суточной температуры, математического ожидания количества среднесуточных осадков, а также соответствующих среднеквадратических отклонений (СКО).

На этих рисунках хорошо прослеживаются сезонные изменения математических ожиданий и СКО. Минимум температуры наблюдали в середине января, максимум — в середине июля. В эти периоды СКО температуры достигало соответственно максимума и минимума. Кривая на рис. 10.2, *б* менее изрезана, чем на рис. 10.2, *г*, что указывает на больший интервал стационарности СКО минимальной температуры, чем СКО максимальной температуры.

Минимумы математического ожидания и СКО осадков наблюдали в середине марта, а максимумы — в начале июля. Обращает на себя внимание сильная положительная корреляция между математическим ожиданием и СКО осадков и отрицательная корреляция между математическим ожиданием и СКО температуры.

Кривые на рис. 10.2, *д*, *е* существенно более изрезаны, чем на рис. 10.2, *а*—*г*, что указывает на значительно меньшие интервалы

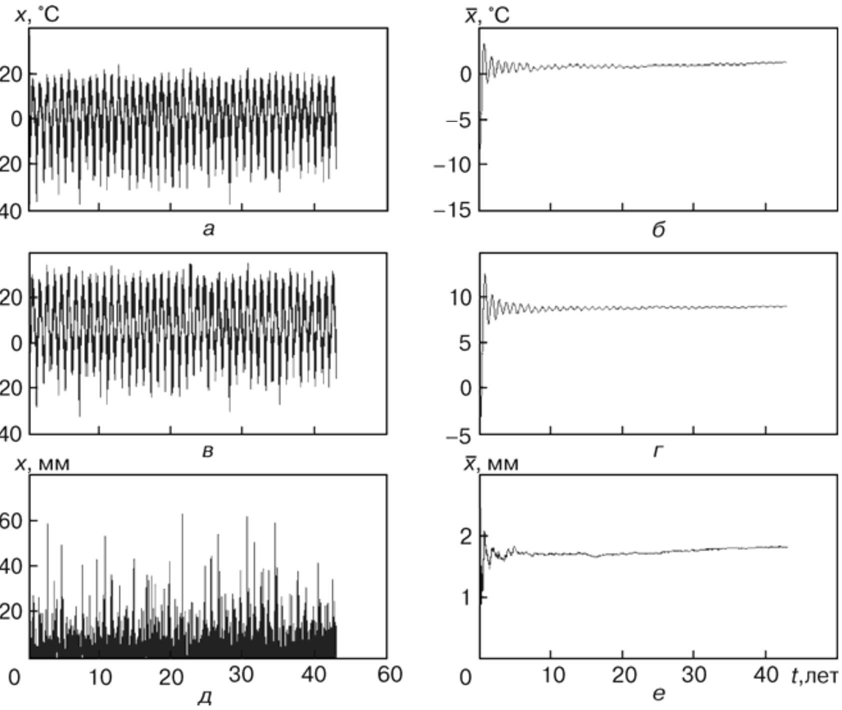


Рис. 10.1. Динамика изменения минимальной (*а*) и максимальной (*в*) суточных температур воздуха, количества среднесуточных осадков (*д*), а также соответствующих средних величин (*б*, *г*, *е*) на интервале $[0, t]$ за 43 года наблюдения

стационарности математического ожидания и СКО осадков, чем соответствующие интервалы стационарности температуры.

На первый взгляд, приведенные на рис. 10.1, *б*, *г* и *е* кривые средних $\bar{x}(t)$ затухают с увеличением времени t и дисперсия средних стремится к нулю. Если это так, то процессы изменения температуры и количества осадков должны быть статистически устойчивыми. Однако более детальный анализ с использованием параметров γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^* вносит существенные корректировки.

На рис. 10.3, 10.5, 10.7 приведены результаты расчетов изменения указанных параметров за весь период наблюдения для минимальной и максимальной суточных температур и количества среднесуточных осадков, а на рис. 10.4, 10.6, 10.8 — усред-

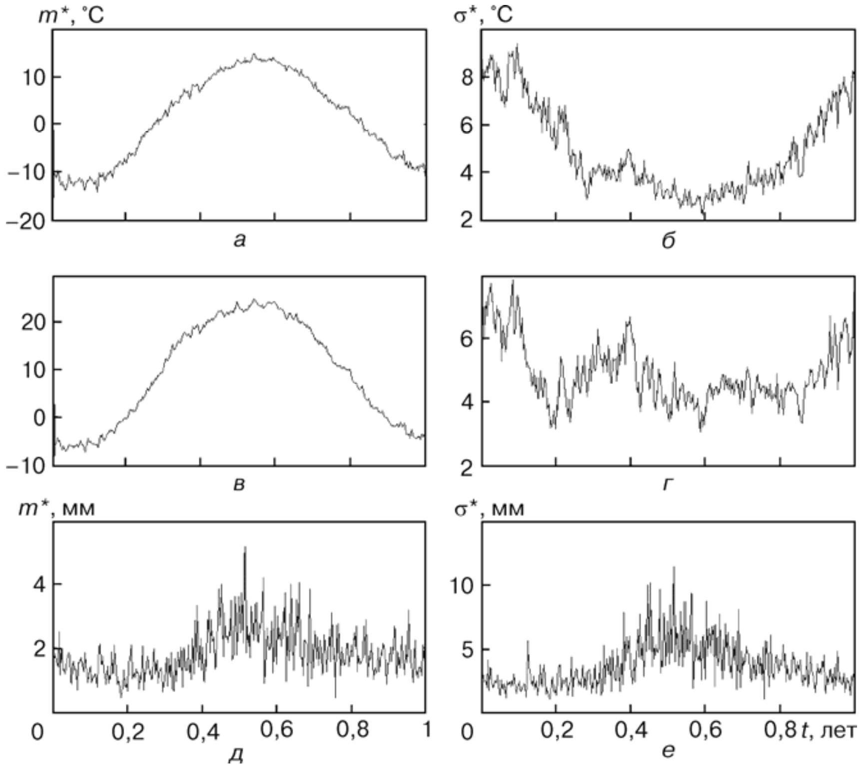


Рис. 10.2. Результаты расчетов оценок математических ожиданий минимальной (*а*) и максимальной (*в*) суточных температур, математического ожидания количества среднесуточных осадков (*д*), а также соответствующих СКО (*б*), (*г*), (*е*)

ненные по 43 годам результаты расчетов этих параметров на протяжении года.

Пары верхних сплошных кривых на рис. 10.3—10.8 соответствуют минимальной и максимальной температурам, нижние — осадкам, а пунктирные линии — идеальному статистически устойчивому процессу.

На рис. 10.4, 10.6, 10.8 точечными линиями изображены границы коридоров на уровне 0,2 СКО.

Кривые на рис. 10.3 и 10.4 получены без коррекции данных наблюдения, а на рис. 10.5—10.8 — с предварительной корректировкой. Целью коррекции являлось исключение влияния детерминиро-

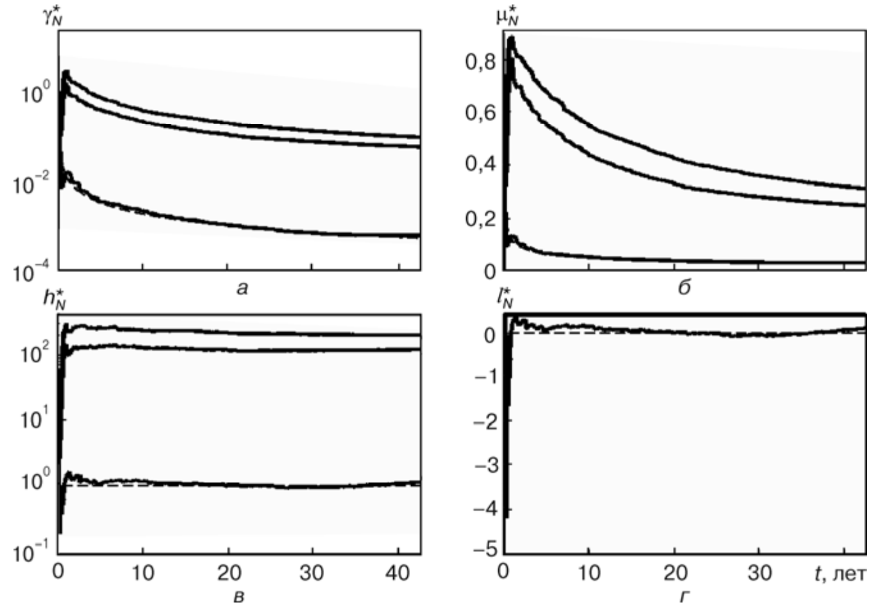


Рис. 10.3. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур, а также для количества среднесуточных осадков, соответствующие 43 годам наблюдения

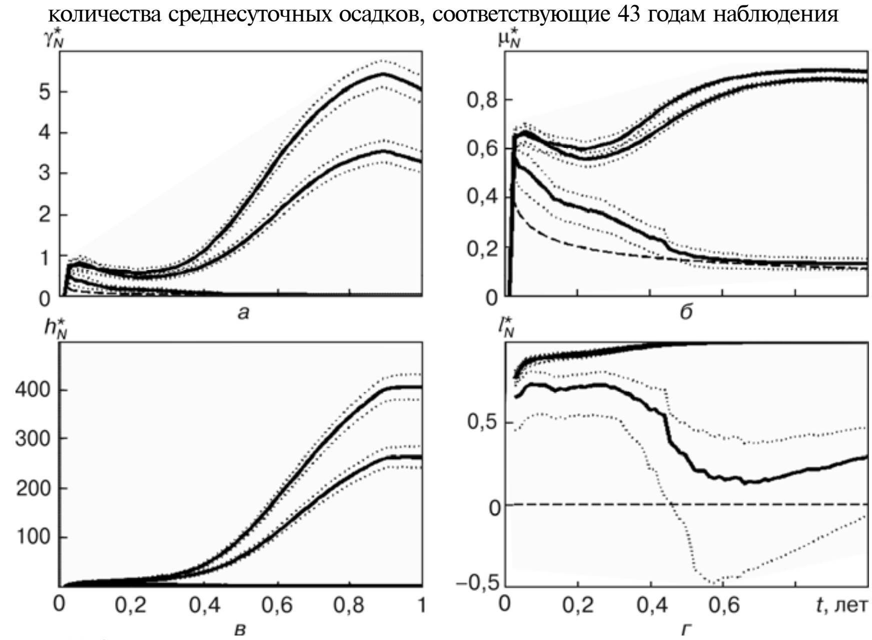


Рис 10.4. Усредненные оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур и количества среднесуточных осадков

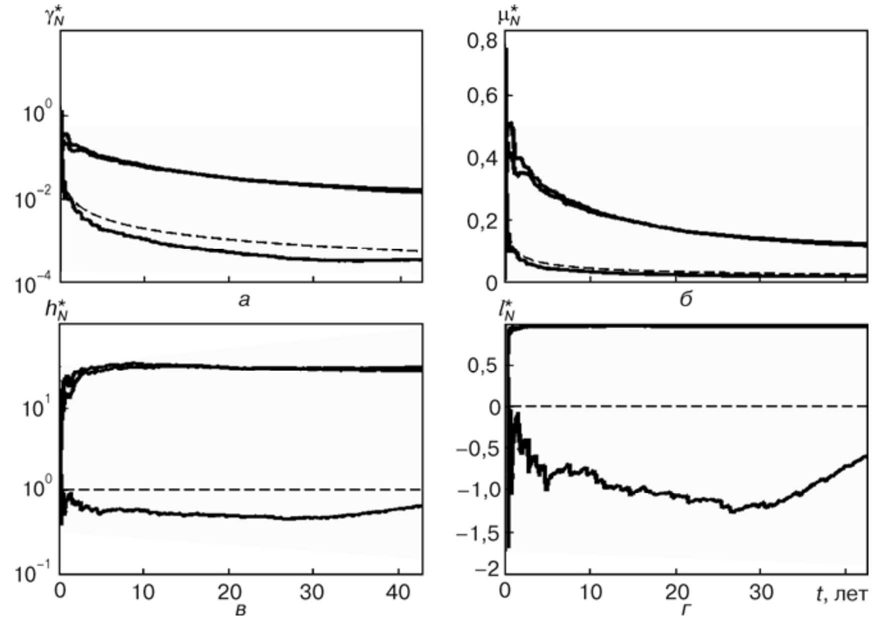


Рис. 10.5. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур, а также для количества среднесуточных осадков, соответствующие 43 годам наблюдения (исходные данные подвергнуты коррекции первого типа)

ванных составляющих на параметры статистической неустойчивости.

Коррекция первого типа (см. рис. 10.5 и 10.6) осуществлялась путем вычитания из данных наблюдения соответствующих оценок математических ожиданий (см. рис. 10.2, *а*, *в*, *д*). Коррекция второго типа (см. рис. 10.7 и 10.8) — путем вычитания из исходных данных оценок математических ожиданий и последующей нормировки полученных величин на соответствующие оценки СКО (см. рис. 10.2, *б*, *г*, *е*).

Коррекция обоих типов, как следует из рис. 10.5—10.8, приводит к уменьшению значений оценок статистической неустойчивости, особенно заметному на годичном интервале наблюдения. Этот эффект можно объяснить тем, что при отсутствии коррекции изменения температуры и количества осадков определяются

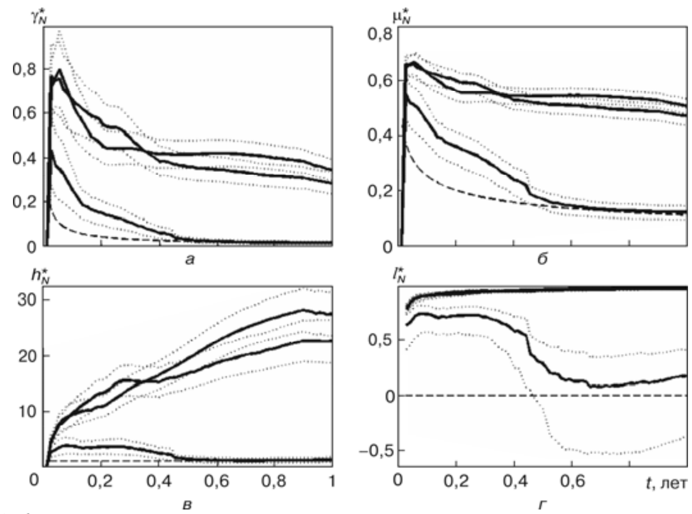


Рис. 10.6. Усредненные оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур и количества среднесуточных осадков (исходные данные подвергнуты коррекции первого типа)

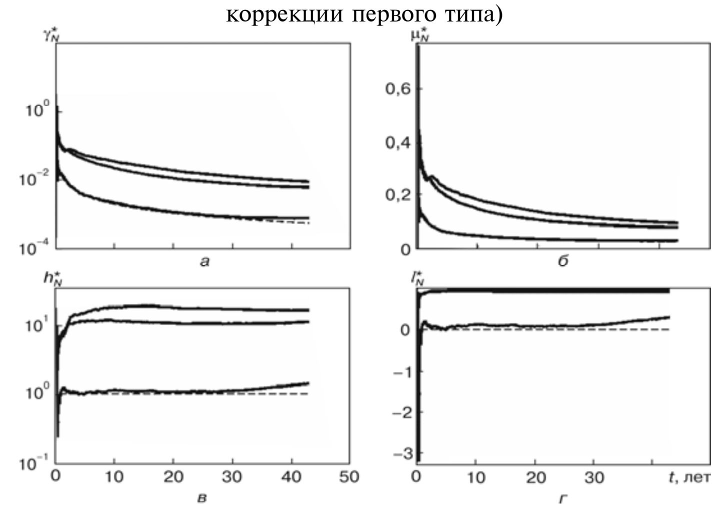


Рис. 10.7. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур, а также для количества среднесуточных осадков, соответствующие 43 годам наблюдения (исходные данные подвергнуты коррекции второго типа)

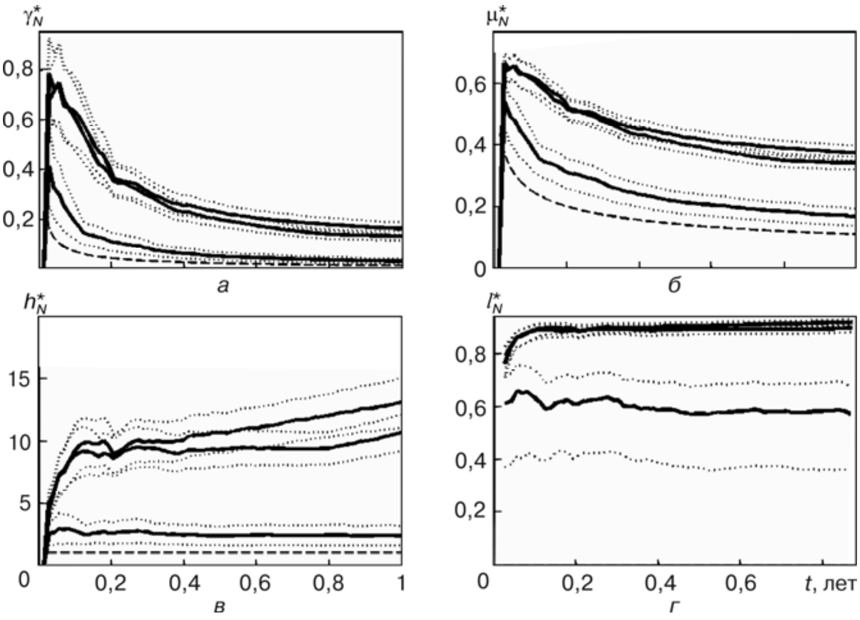


Рис. 10.8. Усредненные оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и I_N^* (*г*) для минимальной и максимальной суточных температур и количества среднесуточных осадков (исходные данные подвергнуты коррекции второго типа)

в первую очередь сезонными колебаниями, искажающими значения параметров статистической неустойчивости, а при наличии коррекции происходит частичная (при коррекции первого типа) или почти полная (при коррекции второго типа) фильтрация указанных детерминированных составляющих колебаний.

Из рис. 10.3—10.8 видно, что колебания количества осадков носят существенно более устойчивый характер, чем колебания температуры, причем как при наличии, так и отсутствии коррекции данных, как при большом (сорокатрехлетнем), так и малом (годичном) интервале наблюдения.

Из рис. 10.7 и 10.8 следует, что при фильтрации детерминированных составляющих процессов колебания количества осадков носят практически статистически устойчивый характер. Колебания же температуры явно статистически неустойчивы. Нарушения статистической устойчивости колебаний температуры наблюдаются уже по истечению нескольких недель (см. рис. 10.8).

Полученные результаты свидетельствуют, что на больших интервалах наблюдения колебания количества осадков корректно могут быть описаны с помощью стохастических моделей. Использование же таких моделей для описания колебаний температуры воздуха представляется необоснованным.

10.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА И КОЛИЧЕСТВА ОСАДКОВ В РАЙОНЕ КИЕВА

Для исследования статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков в районе Киева использовались данные наблюдения за 112 лет (с 1881 по 1992 г.) [Архив погоды по городам СНГ, http]. Исследованию были подвергнуты суточные максимальные и минимальные температуры, а также среднесуточные осадки.

На рис. 10.9 представлены результаты оценки параметров статистической неустойчивости μ_N^* и h_N^*. При расчетах проводилась предварительная сезонная коррекция данных, осуществляемая путем вычитания оценок математических ожиданий и последующей нормировки полученных величин на соответствующие оценки СКО. Кривые на рис. 10.9, *в*, *г* получены путем усреднения по 112 годам результатов расчета параметров на протяжении года.

Верхние сплошные кривые соответствуют максимальной и минимальной суточным температурам, а нижние сплошные кривые — осадкам. Для сравнения результатов пунктирными линиями изображены параметры статистической неустойчивости и штрихпунктирными — среднеквадратические отклонения (СКО) от этих параметров.

Из кривых на рис. 10.9 следуют такие же выводы, как и при исследовании статистической устойчивости температуры воздуха и количества осадков в районе Москвы (см. параграф 10.2):

- на больших интервалах наблюдения изменения температуры носят явно выраженный статистически неустойчивый характер, колебания же осадков статистически более устойчивы (*интервал статистической устойчивости* τ_s *колебаний количества осадков составляет, как минимум, многие десятки лет*);
- нарушения статистической устойчивости колебаний температуры наблюдаются уже по истечению нескольких недель (*ин-*

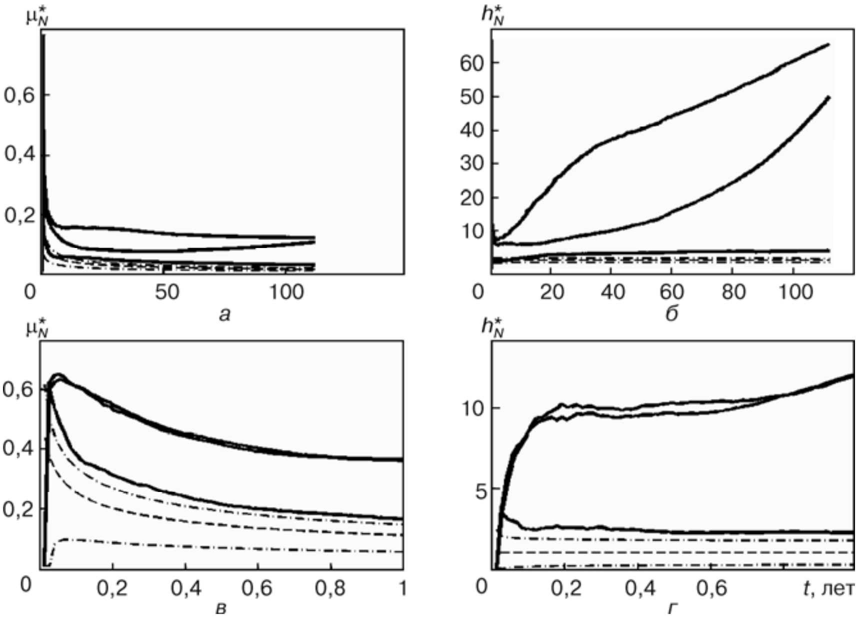


Рис. 10.9. Оценки параметров статистической неустойчивости μ_N^* (*а*, *в*) и h_N^* (*б*, *г*) для минимальной и максимальной суточных температур и количества среднесуточных осадков: *а*, *б* соответствуют 112 годам наблюдения, *в*, *г* — усредненным оценкам

тервал статистической устойчивости τ_s *колебаний температуры воздуха равен приблизительно 0,5—1 месяцу*).

Отсюда следует, что для статистического описания колебаний осадков на протяжении десятков лет можно использовать классические стохастические модели, для описания же колебаний температуры необходимы другие модели, учитывающие нарушения статистической устойчивости.

10.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ВЕТРА В ЧЕРНОБЫЛЕ

На протяжении многих лет в различных точках земного шара ведутся систематические наблюдения за скоростью ветра. Полученные данные используются для построения долгосрочных метеорологических прогностических моделей, обеспечивающих прогноз развития ураганов и смерчей на месяцы и годы вперед, а они, в свою очередь, — для принятия ответственных решений, в том числе касающихся строительства объектов повышенной опасности. К числу таких объектов относится, в частности, защитная конструкция «Укрытие» атомной электростанции в г. Чернобыль.

Существенными параметрами, определяющими тип прогностической модели, являются параметры, характеризующие статистическую устойчивость колебаний скорости ветра.

Для оценки статистической устойчивости колебаний скорости ветра в Чернобыльском регионе были подвергнуты обработке результаты среднесуточных измерений скорости ветра v на метеостанции г. Чернобыль (рис. 10.10, *а*). Измерения проводились с точностью 1 м/с на протяжении 11 лет с 2000 по 2010 г. [Дані Галузевого державного архіву гідрометслужби України].

По результатам измерений были рассчитаны выборочное среднее $\bar{v}$ на протяжении всего интервала наблюдения (рис. 10.10, *б*), а также оценки изменения на протяжении года математического ожидания m_v^* (рис. 10.10, *в*) и СКО s_v^* скорости ветра (рис. 10.10, *г*). Оценки получены путем усреднения данных по 11 годам наблюдения.

На рис. 10.10, *б* видно, что выборочное среднее не стремится к постоянной величине, т. е. процесс явно статистически неустойчив. Кроме того, выборочное среднее флуктуирует с периодом год, что обусловлено сезонными колебаниями средней скорости ветра (рис. 10.10, *в*) и СКО (рис. 10.10, *г*).

Далее были рассчитаны параметры статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^* (рис. 10.11—10.14, соответственно *а*, *б*, *в* и *г*, сплошные линии). Рис. 10.11 и 10.12 получены без учета сезонных изменений скорости ветра, а рис. 10.13 и 10.14 — с учетом таких изменений. В последнем случае исходные данные корректировались путем вычитания оценки математического ожидания и нормировки полученной разности на оценку СКО. Рис. 10.11 и 10.13 получены без усреднения параметра γ_N^* по множеству реализаций (11 годам), а рис. 10.12 и 10.14 — с таким усреднением.

Для сравнения на рисунках пунктирными линиями изображены зависимости рассматриваемых параметров статистической неустойчивости от времени для идеального статистически устойчивого процесса, а точечными линиями — соответствующие границы коридоров на уровне трех СКО.

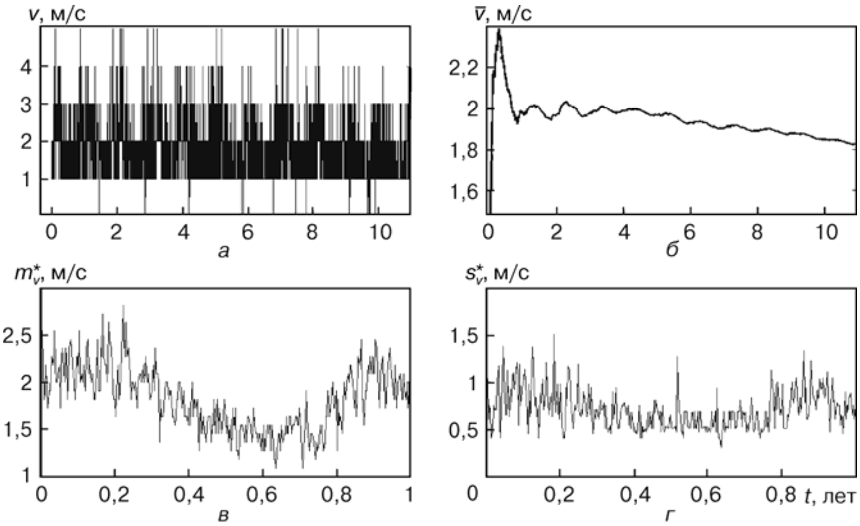


Рис. 10.10. Среднесуточные изменения скорости ветра во времени: *а* — динамика изменения скорости ветра за период наблюдения, *б* — динамика изменения выборочного среднего скорости ветра за период наблюдения, *в* — оценка изменения на протяжении года математического ожидания скорости ветра, *г* — оценка изменения на протяжении года СКО скорости ветра

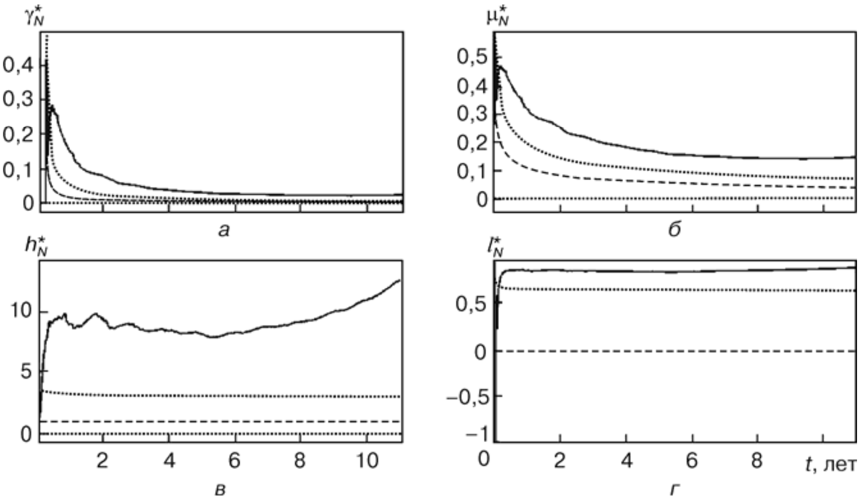


Рис. 10.11. Динамика изменения параметров статистической неустойчивости во времени за 11 лет наблюдения без компенсации сезонных изменений: γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*)

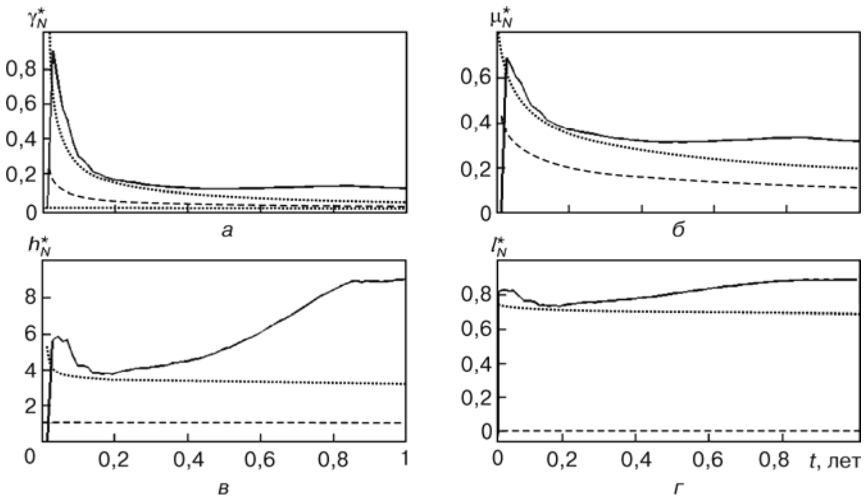


Рис. 10.12. Динамика изменения усредненных за 11 лет наблюдения параметров статистической неустойчивости без компенсации сезонных изменений: γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*)

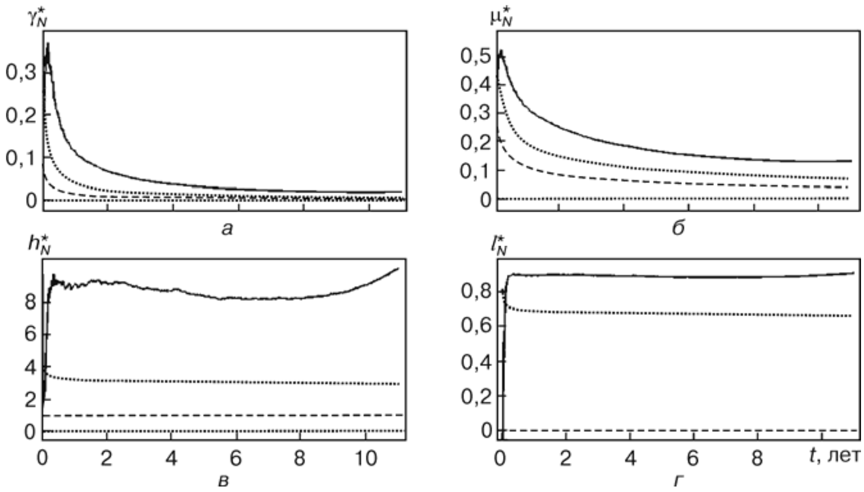


Рис. 10.13. Динамика изменения параметров статистической неустойчивости во времени за 11 лет наблюдения при наличии компенсации сезонных изменений: γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*)

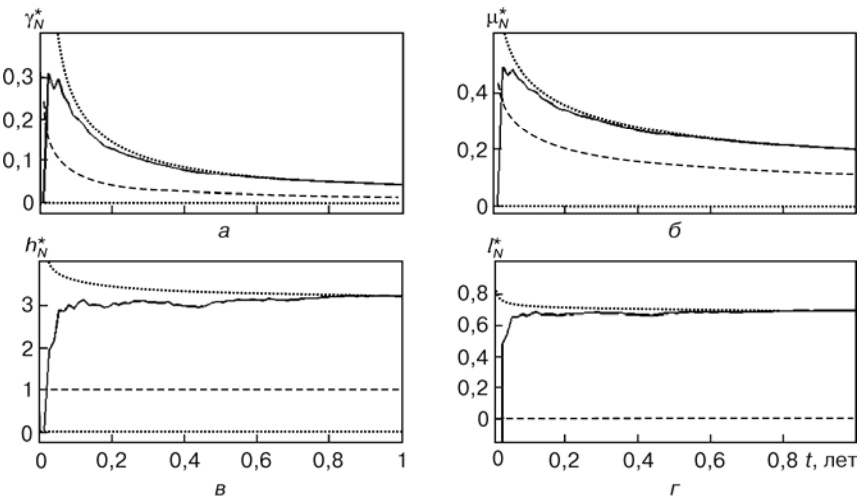


Рис. 10.14. Динамика изменения усредненных за 11 лет наблюдения параметров статистической неустойчивости при наличии компенсации сезонных изменений: γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*)

Из рис. 10.11—10.14 видно, что *колебания скорости ветра носят явно статистически неустойчивый характер.* Нарушения устойчивости вызваны как сезонными изменениями, так и другими причинами.

Статистический прогноз на основе стохастических моделей возможен при отсутствии компенсации сезонных изменений на интервале времени не более нескольких недель, при компенсации же сезонных изменений он увеличивается до нескольких месяцев.

Таким образом, *интервал статистической устойчивости* τ_s *колебаний скорости ветра равен нескольким месяцам.* При необходимости прогнозирования скорости ветра на интервалах времени, большем указанного, использование стохастических моделей необосновано.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ ЗВУКА В ТИХОМ ОКЕАНЕ

Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости колебаний температуры и скорости звука в Тихом океане. Установлена статистическая неустойчивость этих процессов.

11.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И СКОРОСТЬ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

Среда распространения гидроакустических колебаний, как правило, неоднородна и нестационарна.

Неоднородность и нестационарность проявляются в том, что скорость звука c оказывается функцией пространственных координат $\vec{x}$ и времени t: $c = c(t, \vec{x})$. Если среда обладает, к тому же, поглощающими свойствами, то скорость звука — комплексная величина.

Распространение волн описывается волновым уравнением. Для неоднородной нестационарной поглощающей среды при относительно небольших перепадах плотности в прямоугольной системе координат это уравнение записывается следующим образом:

$$\nabla^2 \Phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{c^2(t, \vec{x})} \frac{\partial^2 \Phi(t, \vec{x})}{\partial t^2}, \qquad (11.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — лапласиан, $\Phi(t, \vec{x})$ — потенциал скорости.

В свободном пространстве (без границ) решение уравнения (11.1) зависит от закона изменения скорости звука во времени и пространстве. В ограниченном пространстве решение уравнения (11.1) определяется этим законом в районе наблюдения и граничными условиями.

Решения уравнения (11.1) описывают волновые процессы, «разрешенные» для данных условий. Конкретный вид волн, распространяющихся в среде, зависит от вынужденных колебаний, порождаемых источником звука. Если источник создает определенную волну из числа «разрешенных», то она будет распространяться, если же источник ее не создает, то, естественно, в среде ее не будет.

Океан представляет собой неоднородную и нестационарную среду. Скорость звука в нем изменяется по глубине, зависит от географических координат и подвержена изменению во времени.

Из-за непостоянства скорости звука пространство освещается неравномерно. В результате образуются зоны тени и конвергенции. Кроме того, на высоких частотах происходит расщепление лучей и образование многолучевых сигналов, а на низких частотах — формирование множества мод.

Знание распределения скорости звука по глубине (так называемого c-профиля) позволяет прогнозировать освещенность пространства и оптимизировать обработку сигналов.

Скорость звука в океане зависит в основном от трех параметров: температуры T, солености s и глубины h.

Известен ряд формул, описывающих скорость звука через эти параметры. Одной из наиболее точных считается формула Росса:

$$c = 0,01635h + 1,75 \cdot 10^{-7} h^2 + 2,05 \cdot 10^{-5} Th - 8,1 \cdot 10^{-9} Th^2 +$$

$$+2,05 \cdot 10^{-5}(s-35)h - 2,55 \cdot 10^{-9}(s-35)h^2.$$

Анализ этой зависимости показывает, что наиболее существенные изменения скорости звука вызывают изменения температуры.

Поэтому все особенности, характерные для температуры (в том числе касающиеся нарушений статистической устойчивости), распространяются и на скорость звука.

11.2. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛУЧЕННЫХ ДАННЫХ

Для оценки статистической устойчивости колебаний скорости звука во времени использовались записи температуры воды в Тихом океане, сделанные Тихоокеанским океанологическим институтом им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения РАН в период с 23.10.2010 по 11.05.2011.

Измерения температуры воды проводились в заливе Посьета с помощью двух пар термодатчиков, разнесенных на расстояние 3,6 км (рис. 11.1).

Глубина места постановки термодатчиков — 41,5 и 42 м. Датчики располагались на расстоянии 10 и 20 м от дна. Снятие данных осуществлялось с интервалом 15 мин. В итоге за 197 дней наблюдения (4730 ч) с помощью каждого термодатчика было проведено $K = 18920$ измерений. Чувствительность датчиков — 0,025 °C.

Динамика изменения температуры во времени показана на рис. 11.2 (записи наложены друг на друга).

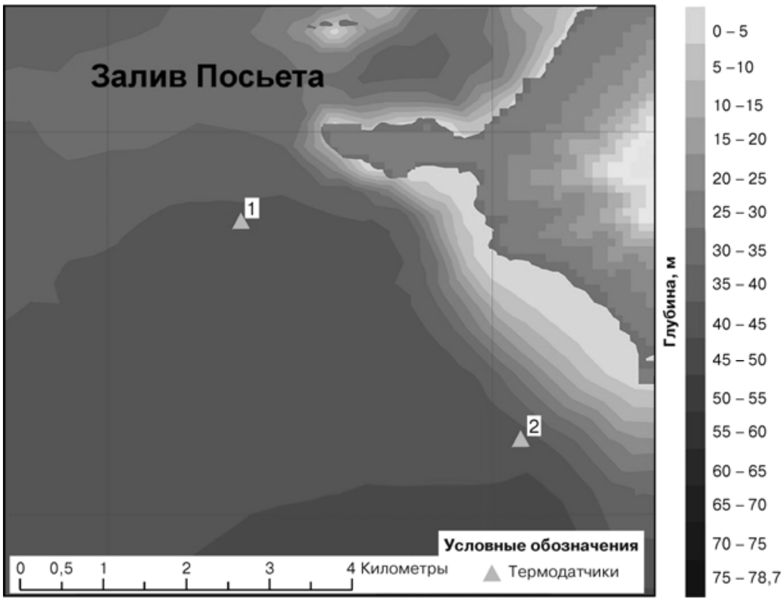


Рис. 11.1. Место постановки термодатчиков

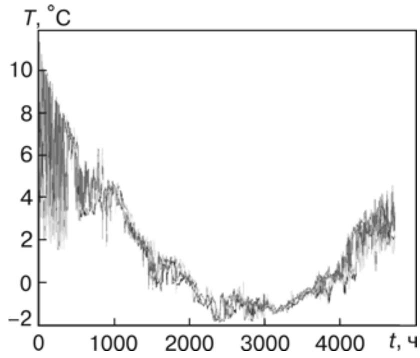


Рис. 11.2. Изменение температуры воды во времени

Мгновенные спектры колебаний температуры в децибелах как функции номера спектрального отсчета k представлены на рис. 11.3 и 11.4 (извилистые линии). Разрешение по частоте равно $58{,}7 \cdot 10^{-9}$ Гц.

Для сравнения на рис. 11.3 приведены сдвинутые вдоль оси ординат на 100 дБ графики зависимостей от k степенных функций $1/k^{\beta}$, $\beta = \overline{1{,}5}$ (толщина линий возрастает с увеличением β).

На рисунках видно, что энергия в основном сосредоточена в первых 80—100 спектральных отсчетах. Особенно мощными яв-

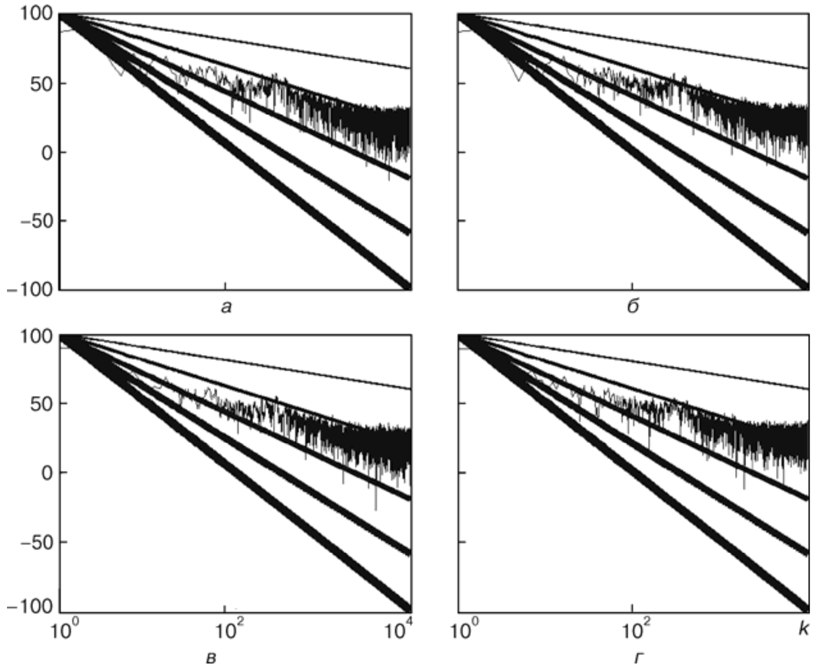


Рис. 11.3. Мгновенные спектры колебаний температуры для термодатчиков 1—4 (*а*—*г*)

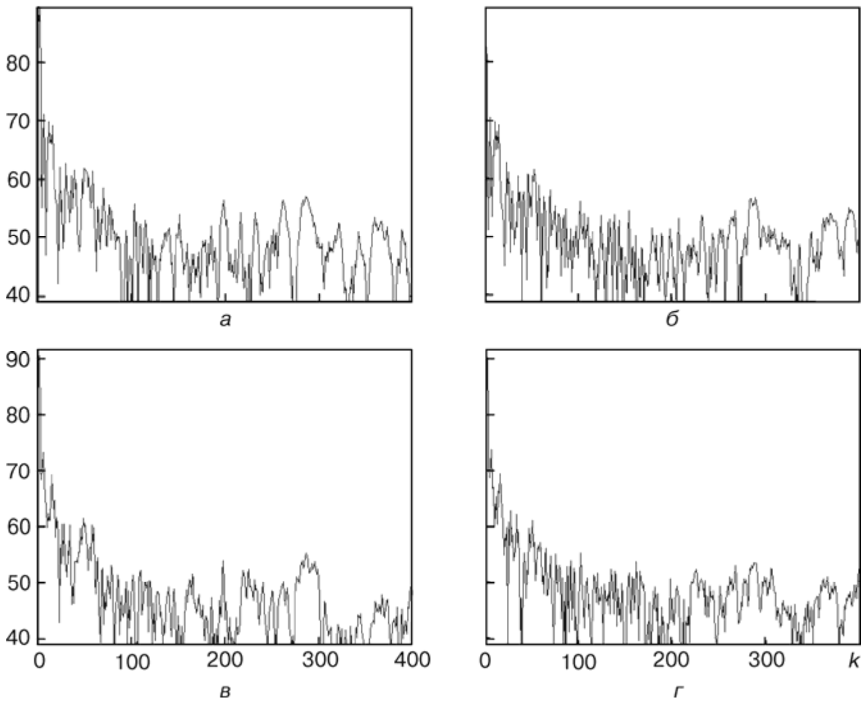


Рис. 11.4. Мгновенные спектры колебаний температуры в области низких частот для термодатчиков 1—4 (*а—г*)

ляются первые 3—4 отсчета, соответствующие сезонному изменению температуры. Первые два отсчета находятся на уровне 90 дБ.

Прослеживаются суточные колебания, соответствующие 197 спектральному отсчету, а также периодические колебания, соответствующие 8 и 16 спектральным отсчетам (0,8 и 0,4 месячным циклам), ряду спектральных отсчетов до 100—150 (циклам с периодом менее 1,3—1,9 суток) и ряду отсчетов в диапазоне от 220 до 400 (циклам с периодом 12—21,5 ч).

Обратим внимание, что в области низких частот спадание спектра с частотой хорошо аппроксимируется степенной функцией с параметром β, практически везде превосходящим единицу. Поскольку степенные процессы с параметром $\beta \geq 1$ статистически неустойчивы по отношению к среднему (см. параграф 7.4), то можно предположить, что исследуемые колебания тоже статистически неустойчивы.

11.3. ПАРАМЕТРЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ В ОКЕАНЕ

Сезонные колебания температуры, естественно, оказывают влияние на статистическую устойчивость. Для уменьшения их влияния исходные данные подвергались низкочастотной фильтрации, обеспечивающей режекцию четырех (а в другом случае четырехсот) низкочастотных спектральных составляющих.

Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^*, h_N^* и l_N^* колебаний температуры, зарегистрированных термодатчиками, представлены на рис. 11.5—11.7 сплошными линиями. На рисунках толщина этих линий возрастает с увеличением номера термодатчика.

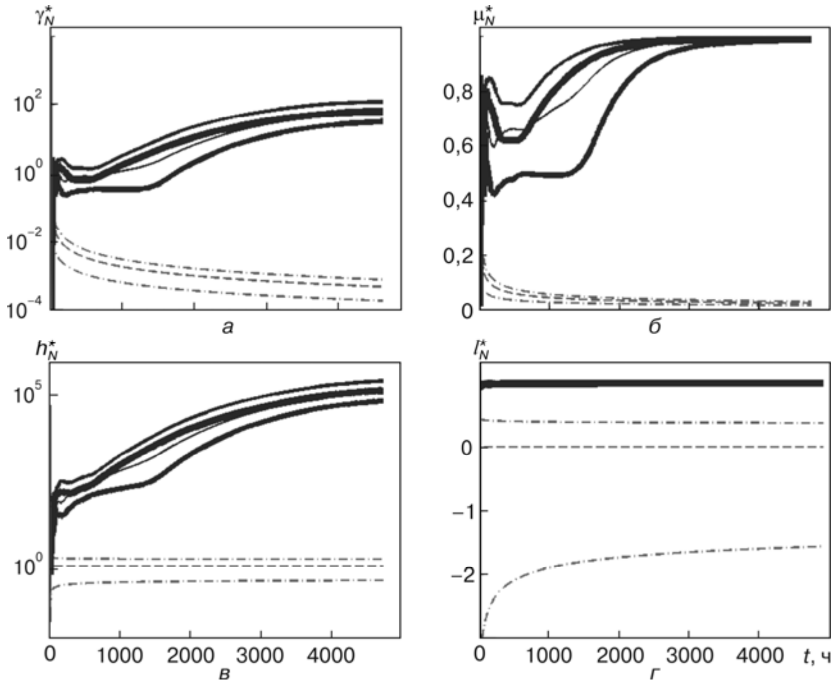


Рис. 11.5. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) без режекции спектральных составляющих

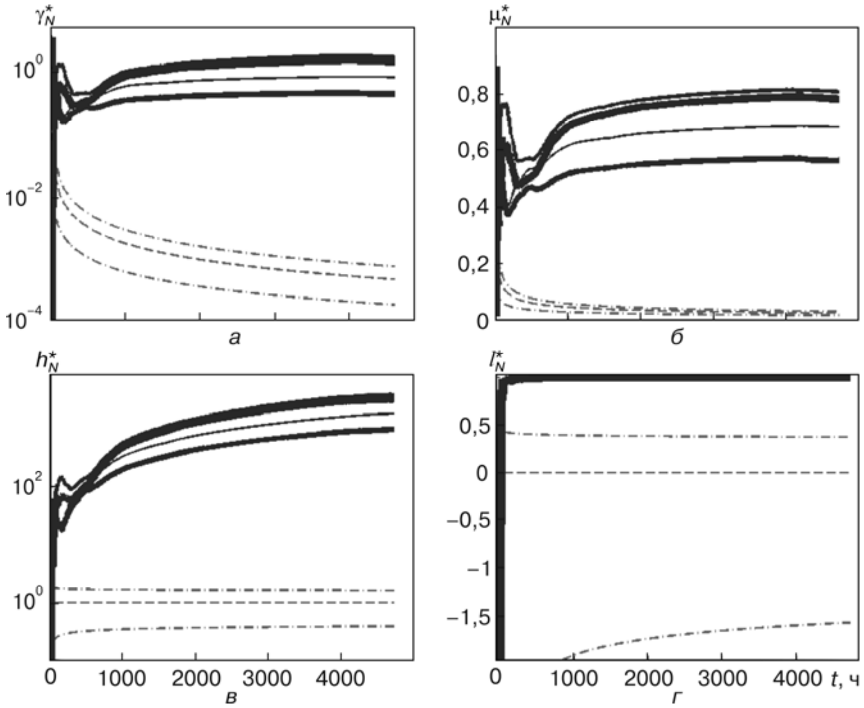


Рис. 11.6. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и I_N^* (*г*) при режекции 4 спектральных составляющих

Кривые на рис. 11.5 получены без режекции спектральных составляющих, на рис. 11.6 — с режекцией первых 4 составляющих, а на рис. 11.7 — с режекцией 400 составляющих.

На рисунках для сравнения пунктирными линиям изображены зависимости, полученные для эталонной последовательности с некоррелированными отсчетами, постоянной дисперсией и нулевым математическим ожиданием, а штрихпунктирными линиями — односигмовые отклонения от эталонных кривых.

Из рис. 11.5 видно, что при отсутствии режекции рассматриваемые процессы крайне неустойчивые. Можно предположить, что неустойчивость связана с сезонным изменением температуры. Однако, как выясняется, причина не в этом. Хотя при использовании режекции (см. рис. 11.6, 11.7) устойчивость не-

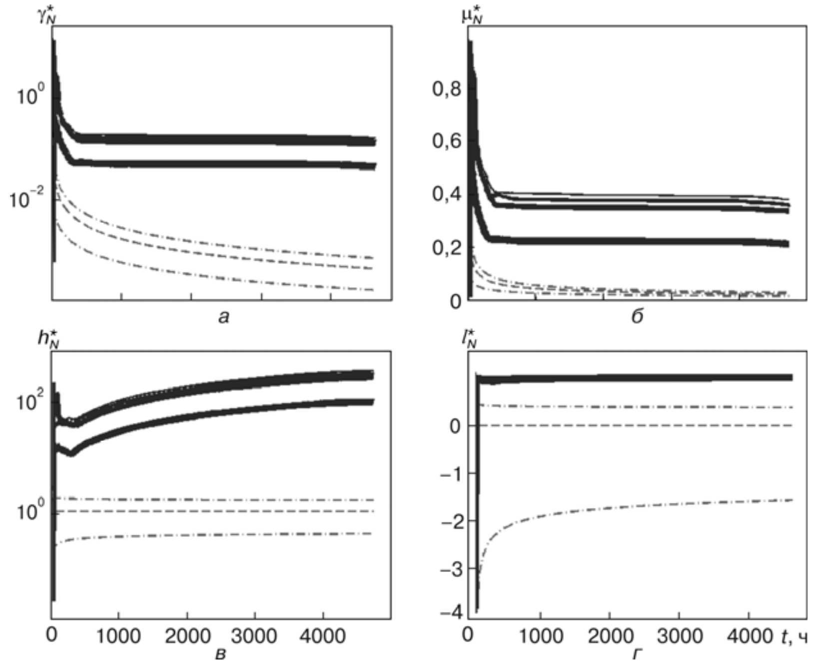


Рис. 11.7. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) при режекции 400 спектральных составляющих

сколько повышается, но даже при отбрасывании первых 400 спектральных составляющих процессы остаются явно статистически неустойчивыми. *Интервал статистической устойчивости* τ_s *колебаний температуры воды в широком диапазоне частот составляет в лучшем случае несколько десятков часов.*

Особый интерес представляет устойчивость колебаний температуры в узких полосах. Исследования показывают, что в целом колебания в узких полосах существенно более устойчивы, чем в широких полосах.

На рис. 11.8 для примера приведены оценки параметров неустойчивости колебаний температуры для спектральной полосы [270, 340] отсчетов. В интервале от 100 до 500—800 ч наблюдения колебания статистически устойчивы. При большем интерва-

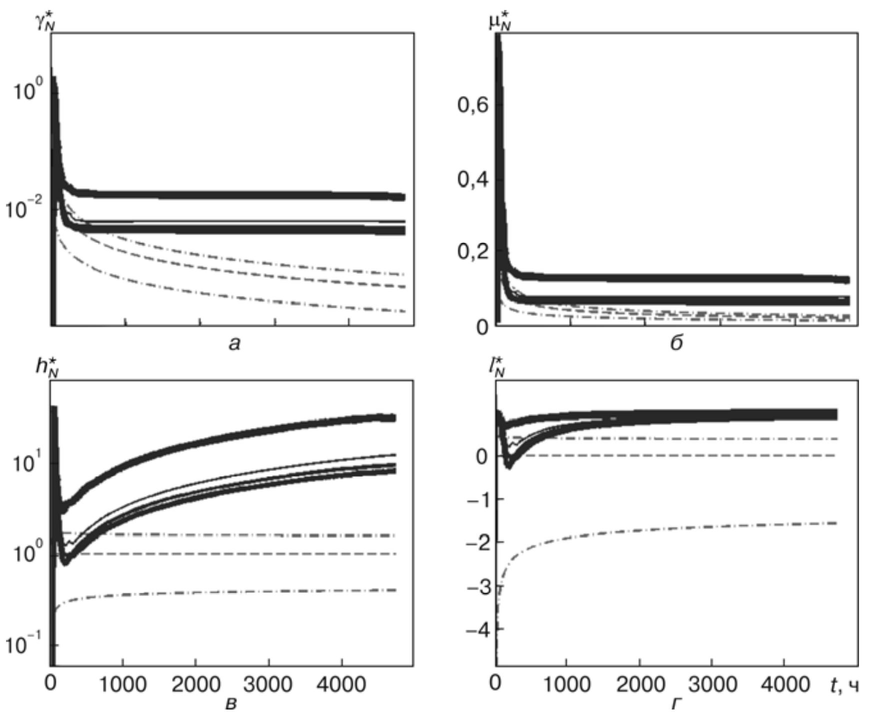


Рис. 11.8. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*), h_N^* (*в*) и l_N^* (*г*) для спектральной полосы [270, 340] отсчетов

ле наблюдения они неустойчивы. Однако при этом значения параметров, характеризующих нарушение статистической устойчивости, не сильно отличаются от значений, соответствующих параметрам эталонной статистически устойчивой последовательности.

То, что колебания в узких полосах более устойчивы, чем в широких, подтверждают [Горбань, Ярощук, 2012] и оценки параметров статистической неустойчивости колебаний температуры, рассчитанные для третьоктавных и четвертьоктавных полос частот.

Исследования показывают, что в узких полосах колебания с периодом от 0,5 до 2 ч и более 10 ч статистически неустойчивые. Статистически устойчивыми оказываются некоторые (но не все) узкополосные колебания со средним периодом от 2 до 10 ч.

Обобщая результаты главы, можно отметить, что *широкополосные колебания температуры воды в океане носят статистически неустойчивый характер. Интервал статистической устойчивости* τ_s *составляет несколько десятков часов. Узкополосные колебания температуры воды со средним периодом от 2 до 10* ч *иногда устойчивы на протяжении недель*.

Поскольку колебания температуры являются определяющим фактором скорости звука в океане, *эти выводы в полной мере относятся и к скорости звука*.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Приведены результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения статистической устойчивости излучения астрофизических объектов в рентгеновском диапазоне частот. Все исследованные колебания статистически неустойчивы. Наиболее устойчивыми оказались колебания интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307. Установлено, что на всем интервале наблюдения эти колебания статистически устойчивы по отношению к среднему, но неустойчивы по отношению к среднеквадратическому отклонению.

12.1. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Хотя многие результаты исследований указывают в целом на ограниченный характер феномена статистической устойчивости частоты, возникает вопрос: только ли фундаментальные физические константы могут претендовать на роль идеально статистически устойчивых явлений? Возможно, существуют физические процессы, неотличимые от идеально статистически устойчивых.

Косвенным указанием, что такие процессы могут существовать в природе, служат результаты анализа статистической устойчивости колебаний количества осадков на протяжении десятков лет наблюдения (см. главу 10), свидетельствующие о достаточно высоком уровне их стабильности. Хотя кривые параметров статистической неустойчивости этих колебаний в некоторых случаях выходят за границу среднеквадратического интервала отклонения от кривых, соответствующих идеально устойчивому процессу, однако уходят недалеко.

Если искомые статистически устойчивые процессы существуют, то, по всей видимости, искать их надо, прежде всего, среди источников космического излучения, некоторые из которых, как известно, отличаются высокой стабильностью параметров.

Исследованию были подвергнуты потоки рентгеновского излучения от трех астрофизических аккрецирующих источников рентгеновского излучения: GRS 1915+105, Cygnus X-1 и PSRJ 1012+5307. Данные для исследования взяты на сайте [All-Sky Monitor]. Измерения интенсивности U проводились в период с 1 января 1996 г. по 31 декабря 2011 г. Средняя периодичность измерений составляла 2,7 ч для GRS 1915+105, 3 ч для Cygnus X-1 и 2,8 ч для PSRJ 1012+5307.

Система GRS 1915+105 представляет собой звезду-донор с массой $M_d = (1,2 \pm 0,2)\, M_{\circ}$, вращающуюся с периодом 33,5 суток вокруг быстро вращающейся черной дыры с массой $M_b = (14 \pm 4)\, M_{\circ}$ [Тимашев, 2007, Greiner, Cuby, McCaughrean, 2001], где $M_{\circ}$ — масса Солнца. Излучение этой системы сопровождается мощными рентгеновскими вспышками. Система GRS 1915+105 рассматривается как звездный аналог активных ядер галактик, черпающих энергию из сверхтяжелых черных дыр.

Система Cygnus X-1 состоит из [Тимашев, 2007, Гнедин, 1997] сверхгиганта массой $M_d = (33 \pm 9)\, M_{\circ}$, наблюдаемого в оптической части спектра, и черной дыры массой $M_b = (16 \pm 5)\, M_{\circ}$. Рентгеновское излучение генерируется во внутренних слоях плоского газового диска, образованного в результате перетекания вещества от сверхгиганта в черную дыру.

Источник PSR J1012+5307 представляет собой пульсар.

12.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ОТНОШЕНИЮ К СРЕДНЕМУ

Для выяснения статистической устойчивости источников GRS 1915+105, Cygnus X-1 и PSRJ 1012+5307 по данным измерений их интенсивности излучения (рис. 12.1, *а*, 12.2, *а*, 12.3, *а*) рассчитывались СПМ (рис. 12.1, *б*, 12.2, *б*, 12.3, *б*) и выборочные средние (рис. 12.1, *в*, 12.2, *в*, 12.3, *в*).

На рис. 12.1, *б*, 12.2, *б*, 12.3, *б* спектры изображены сплошными линиями. Для сравнения пунктирными линиями представлены сдвинутые вдоль оси ординат до уровня первого отсчета спектров графики степенных функций $1/f^{\beta}$, $\beta = \overline{1,4}$, f — частота.

Как следует из рис. 12.1, *б* и 12.2, *б*, основная энергия излучения источников GRS 1915+105 и Cygnus X-1 сосредоточена в области низких частот. При этом с увеличением частоты низко-

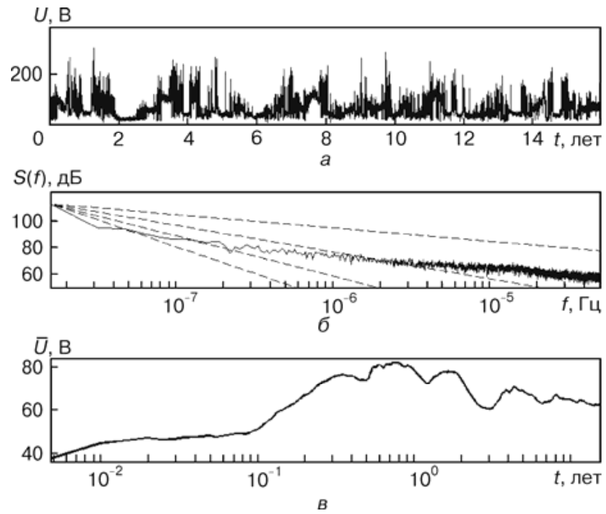


Рис. 12.1. Изменение интенсивности излучения во времени (*а*), СПМ излучения (*б*) и изменение выборочного среднего во времени (*в*) источника GRS 1915+105

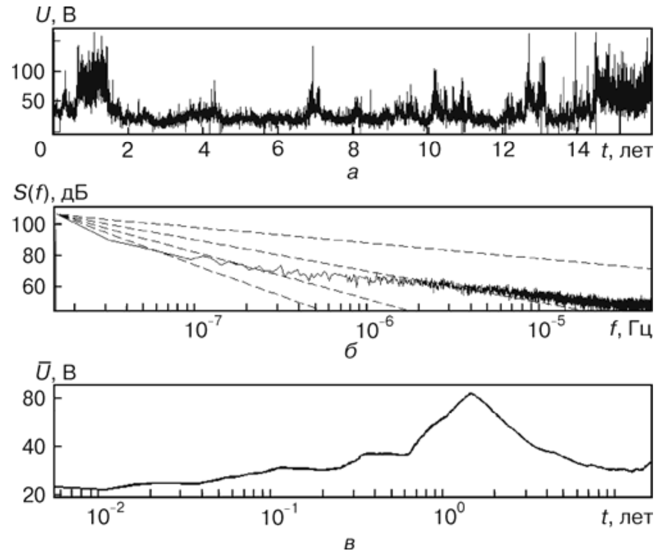


Рис. 12.2. Изменение интенсивности излучения во времени (*а*), СПМ (*б*) и изменение выборочного среднего во времени (*в*) источника Cygnus X-1

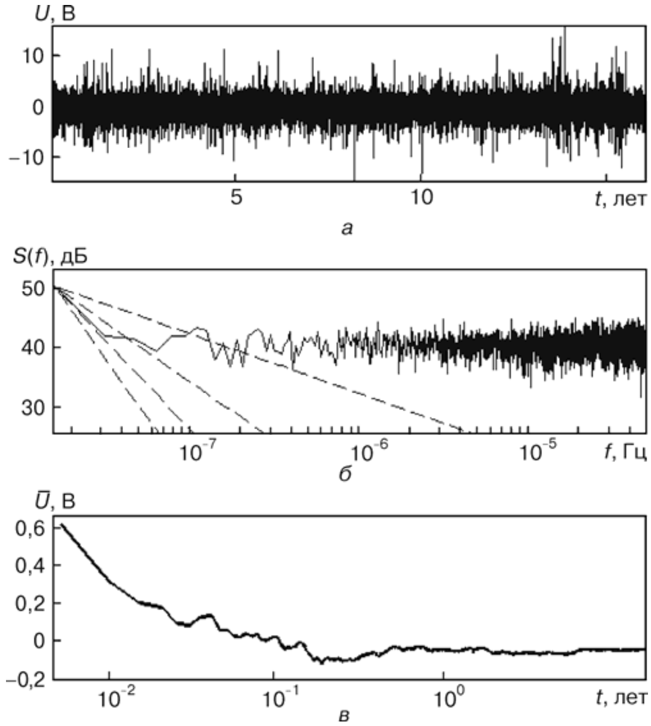


Рис. 12.3. Изменение интенсивности излучения во времени (*а*), СПМ излучения (*б*) и изменение выборочного среднего во времени (*в*) пульсара PSR J1012+5307

частотная часть спектра спадает примерно по закону $1/f^3$. Поскольку процесс, описываемый степенной СПМ с параметром $\beta \geq 1$, статистически неустойчивый по отношению к среднему (см. параграф 7.4), то можно предположить, что излучение рассматриваемых двух источников носит статистически неустойчивый характер. Подтверждением тому служат кривые выборочного среднего (рис. 12.1, *в* и 12.2, *в*), не проявляющие тенденции к стабилизации значений.

В отличие от источников GRS 1915+105 и Cygnus X-1 энергия излучения пульсара PSR J1012+5307 (см. рис. 12.3, *б*) распределена равномерно по частоте (близка к белому шуму). Это указывает на статистическую устойчивость излучения. Подтверждает предположение кривая выборочного среднего (рис. 12.3, *в*), которая проявляет стремление к постоянному значению.

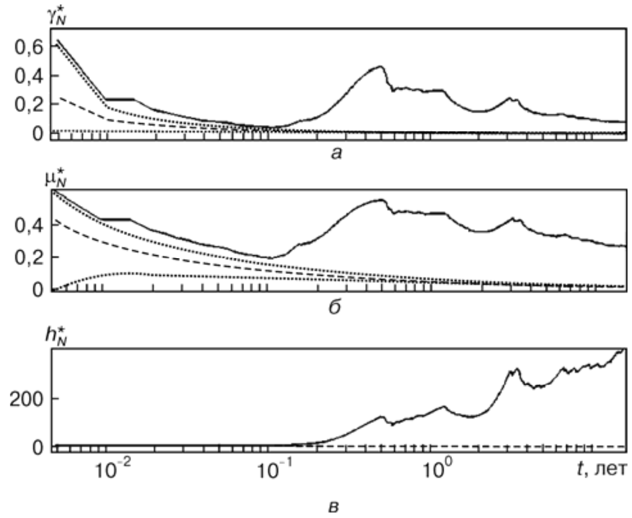


Рис. 12.4. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*) и h_N^* (*в*) для источника GRS 1915+105

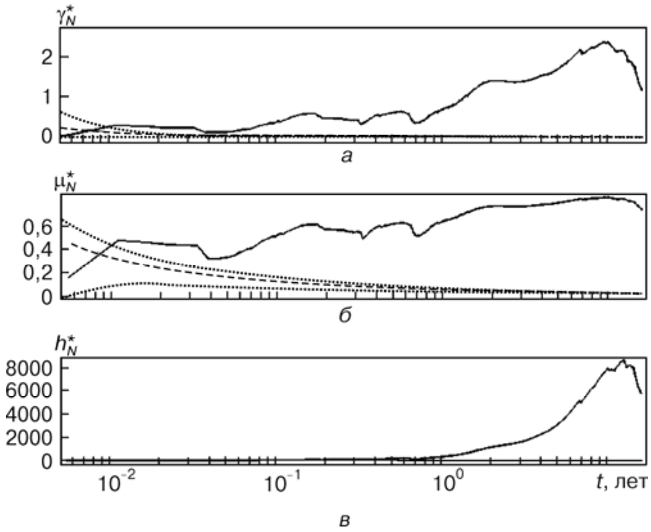


Рис. 12.5. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*) и h_N^* (*в*) для источника Cygnus X-1

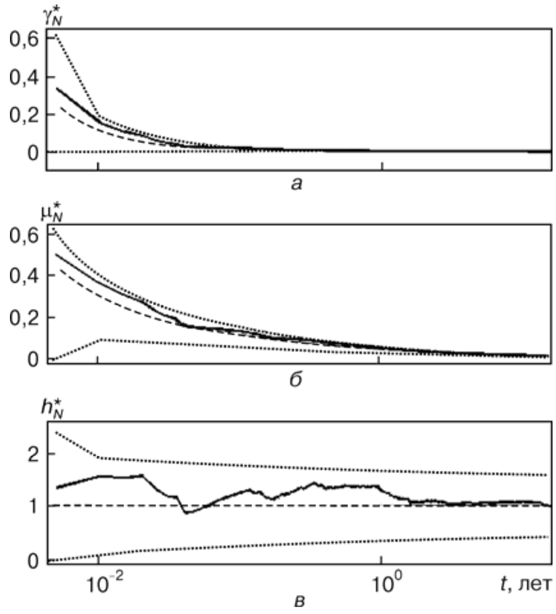


Рис. 12.6. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^* (*а*), μ_N^* (*б*) и h_N^* (*в*) для пульсара PSR J1012+5307

Изложенные предположения относительно статистической неустойчивости излучения источниками GRS 1915+105 и Cygnus X-1 и статистической устойчивости излучения пульсаром PSR J1012+5307 находят подтверждение на уровне анализа оценок параметров статистической неустойчивости (рис. 12.4—12.6).

На рис. 12.4—12.6 сплошными линиями изображены оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^* и h_N^* для трех исследуемых источников излучения, пунктирными — параметры статистической неустойчивости γ_N, μ_N и h_N для идеального устойчивого процесса, а точечными — отклонения на величину СКО от них.

Динамика изменения параметров статистической неустойчивости γ_N^*, μ_N^* и h_N^* указывает на то, *что по отношению к выборочному среднему излучение источника GRS 1915+105 носит статистически устойчивый характер на протяжении примерно месяца*, *источника Cygnus X-1 — на протяжении недели*, а *пульсара PSR J1012+5307 — на протяжении всего времени наблюдения* (*полутора десятка лет*).

12.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

В параграфе 5.4 введено понятие статистической устойчивости процесса в широком смысле, определяемое как статистическая устойчивость процесса одновременно по отношению к среднему и СКО. Процессы, не удовлетворяющие этому условию, названы статистически неустойчивыми в широком смысле.

Поскольку излучения источников GRS 1915+105 и Cygnus X-1 носят статистически неустойчивый характер по отношению к выборочному среднему, очевидно, что излучения этих источников оказываются статистически неустойчивыми в широком смысле.

Излучение же пульсара PSR J1012+5307 статистически устойчиво по отношению к выборочному среднему и поэтому вопрос о статистической устойчивости или неустойчивости его излучения в широком смысле остается открытым.

Для выяснения вопроса исследовалось выборочное СКО Z_N излучения пульсара. При этом рассчитывались и анализировались соответствующие оценки параметров статистической неустойчивости Γ_N^*, M_N^* и H_N^* (см. параграф 5.4). Для сравнения расчеты проводились не только для пульсара, но и для источника GRS 1915+105.

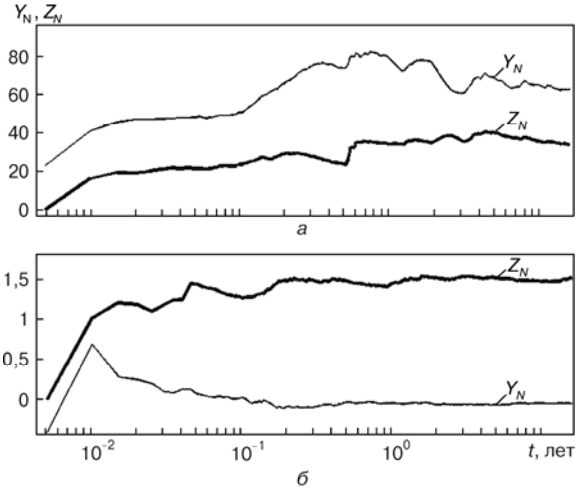


Рис. 12.7. Динамика изменения выборочных средних и выборочных СКО для источника GRS 1915+105 (*а*) и пульсара PSR J1012+5307 (*б*)

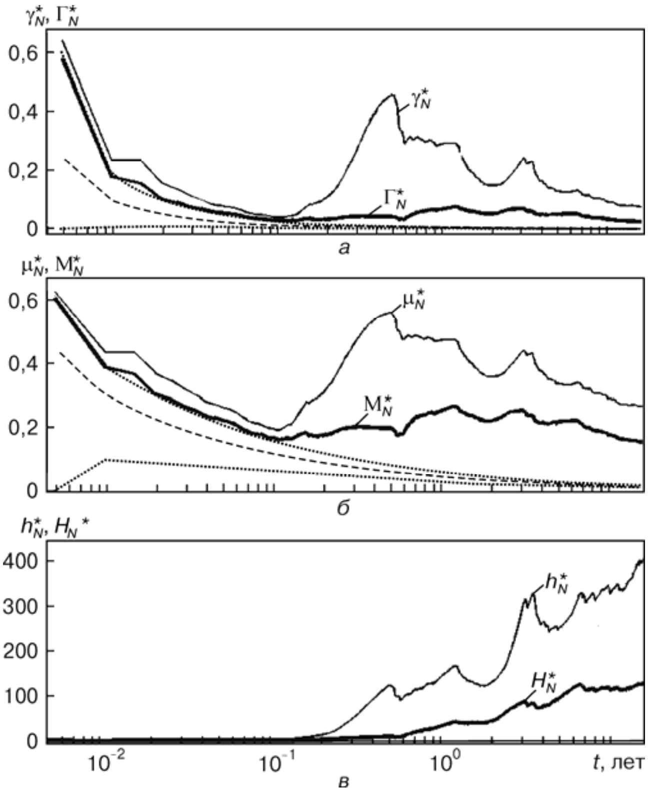


Рис. 12.8. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, Γ_N^* (*а*), μ_N^*, M_N^* (*б*) и h_N^*, H_N^* (*в*) для источника GRS 1915+105

На рис. 12.7 для указанных источников приведены зависимости выборочных средних Y_N и выборочных СКО Z_N, а на рис. 12.8 и 12.9 — соответствующие им оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, Γ_N^*, μ_N^*, M_N^* и h_N^*, H_N^*.

Пунктирными линиями на рис. 12.8 и 12.9 изображены параметры γ_N, μ_N и h_N для идеального устойчивого процесса, а точечными — отклонения на величину СКО от них.

Из приведенных на рис. 12.8 зависимостей следует, что для источника GRS 1915+105 сильные нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему сопровождаются значительными нарушениями устойчивости по отношению к СКО. Степень

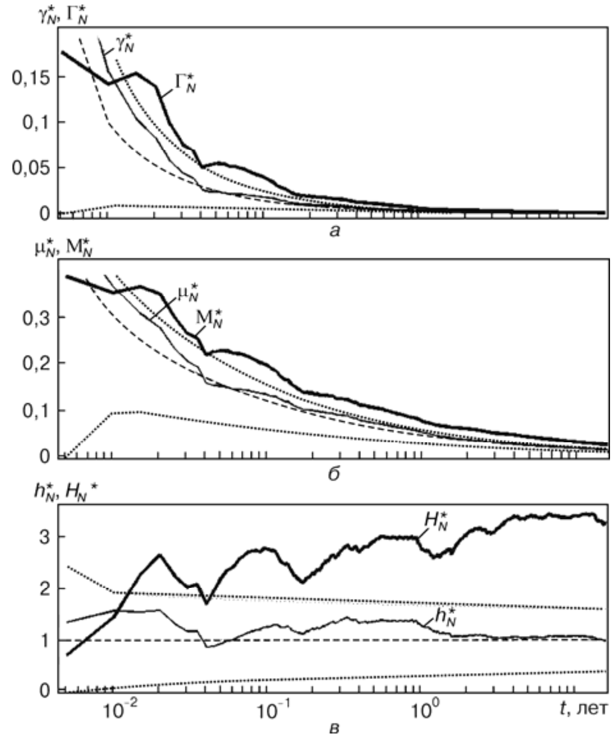


Рис. 12.9. Оценки параметров статистической неустойчивости γ_N^*, Γ_N^* (*а*), μ_N^*, M_N^* (*б*) и h_N^*, H_N^* (*в*) для пульсара PSR J1012+5307

нарушения устойчивости по отношению к среднему выше, чем по отношению к СКО.

Для источника PSRJ 1012+5307 ситуация иная (рис. 12.9): хотя нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему не наблюдаются, однако имеют место нарушения устойчивости по отношению к СКО. На интервале времени, менее нескольких месяцев, они невелики, однако на большем интервале времени — весьма существенны.

Обобщая результаты, отметим, что *колебания астрофизических источников излучения GRS 1915+105, Cygnus X-1 и PSRJ 1012+5307 статистически неустойчивы в широком смысле.*

Интервал статистической устойчивости τ_s колебаний источника Cygnus X-1 составляет примерно неделю, источника GRS 1915+105 — месяц, а пульсара PSR J1012+5307 — несколько месяцев.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ШУМОВ И ПРОЦЕССОВ

Рассмотрены разные типы шумов: цветные, фликкер-шумы, самоподобные (фрактальные). Обобщены результаты исследований статистической устойчивости различных шумов и процессов. Исследованы причины нарушения статистической устойчивости. Установлено, что статистически неустойчивые процессы могут образовываться разными путями: в результате поступления извне в открытую систему вещества, энергии и (или) информации, нелинейных и даже линейных преобразований.

13.1. ЦВЕТНЫЕ ШУМЫ

Во многих случаях реальные шумы хорошо аппроксимируются случайными процессами, спектральная плотность мощности которых описывается степенным законом $1/f^{\beta}$ с различным показателем формы β. *Шумы* с такими СПМ иногда называют *цветными*. В зависимости от параметра β различают *фиолетовый, синий (голубой), белый, розовый, коричневый (красный) и черный шумы* (табл. 13.1). СПМ одной части этих шумов спадает с увеличением частоты (если $\beta > 0$), а другой — возрастает (если $\beta < 0$).

Поскольку процессы с показателем формы $\beta \geq 1$ — статистически неустойчивые, а процессы с показателем формы $\beta < 1$ — статис-

Таблица 13.1

№ п/п	Цвет шума	Показатель формы спектра β
1	Фиолетовый	-2
2	Синий (голубой)	-1
3	Белый	0
4	Розовый	1
5	Коричневый (красный)	2
6	Черный	> 2

тически устойчивые (см. параграф 8.2), то, очевидно, фиолетовый, синий (голубой) и белый шумы — статистически устойчивые, а розовый, коричневый (красный) и черный шумы — статистически неустойчивые.

13.2. ФЛИККЕР-ШУМ

Фликкер-шум (название предложено Шоттки [Schottky, 1926]) был обнаружен Джонсоном в середине двадцатых годов прошлого столетия [Johnson, 1925] при изучении тока термоэлектронной эмиссии. Особенность этого шума в том, что его СПМ возрастает с понижением частоты f по закону, близкому к $1/f$.

Фликкер-шуму посвящено множество работ (см., например, [Жигальский, 2003, Коган, 1985]). Исследованию подвергались различные металлы, полуметаллы, полупроводники, газы, жидкости, электролиты, радиоэлектронные устройства, однородные и неоднородные проводники при высокой и низкой температуре, пленки и контакты, живые и неживые объекты и т. д. В результате проведенных исследований стало понятно, что фликкер-шум — чрезвычайно распространенное явление, характерное для многих электрических, магнитных, электромагнитных, акустических, гидроакустических, гидрофизических, астрофизических и др. процессов. В области низких частот зависимость СПМ фликкер-шума от частоты подчиняется степенному закону $1/f^{\beta}$ (в связи с чем этот шум иногда называют $1/f^{\beta}$-шумом).

Фликкер-шум может быть сосредоточен не только около нулевой частоты, но, например, около собственной частоты колебательного контура [Климонтович, 2002].

Особый интерес к фликкер-шуму вызван тем, что его дисперсия зачастую не зависит от времени наблюдения [Жигальский, 2003, Vessot, 1974], что ведет к ограничению точности измерений. Установлено [Жигальский, 2003, Gagnepain, Uebersfeld, 1977], что для кварцевых резонаторов дисперсия связана с добротностью Q соотношением $124 \ln 2 Q^{-4,3}$ (эмпирическая формула).

Исследования показали, что в некоторых случаях фликкер-шум имеет распределение, близкое к гауссовскому. Иногда (но не всегда) его можно считать стационарным процессом.

До сих пор нет единого понимания того, что является источником фликкер-шума. По всей видимости, $1/f^{\beta}$-шумы обусловлены множеством различных факторов. По мнению ряда исследователей, в твердых телах фликкер-шумы имеют термодинамическую равновесную природу. Но существенную роль, например, в электрических шумах играет наличие и перемещение дефектов в проводниках (идея, высказанная еще Шоттки).

Различают *равновесные* и *неравновесные фликкер-шумы*. СПМ первых, как правило, описывается законом, близким к $1/f$, а вторых — $1/f^{\beta}$, где показатель формы спектра $\beta \geq 2$ [Жигальский, 2003].

Отмечено [Климонтович, 2002], что фликкер-шумы могут обладать фрактальным свойством — свойством статистического самоподобия.

В дальнейшем под фликкер-шумом будем понимать процесс, СПМ которого адекватно описывается степенной функцией с показателем формы $\beta > 0$.

13.3. ФРАКТАЛЬНЫЕ (САМОПОДОБНЫЕ) ПРОЦЕССЫ

Известно несколько определений *фрактального* (*самоподобного*) *процесса* [Ширяев, 1998, Кроновер, 2000, Mishura, 2008, Wornell, 1999].

Под *фрактальным в широком смысле случайным процессом* $X(t)$, рассматриваемым в дальнейшем, подразумевается процесс, корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ которого равна с точностью до множителя a^r корреляционной функции процесса, сжатого в a раз:

$$K_x(t_1, t_2) = \mathrm{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = a^r \mathrm{M}\left[X(at_1)X(at_2)\right] = a^r K_x(at_1, at_2), \quad (13.1)$$

где r – параметр самоподобия.

В случае *стационарного фрактального процесса* выражение (13.1) имеет вид

$$K_x(\tau) = \mathrm{M}\left[X(t+\tau)X(t)\right] = a^r \mathrm{M}\left[X(a(t+\tau))X(at)\right] = a^r K_x(a\tau).$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение самоподобия. Его решением является степенная функция

$$K_x(\tau) = C_0 \left|\tau\right|^{-r}, \; r \geq 0, \quad (13.2)$$

упомянутая в параграфе 7.2.

Фрактальными процессами такого типа являются, в частности,

• приращение классического одномерного броуновского движения (*приращение винеровского процесса*),

• приращение его обобщения, называемого *фрактальным броуновским движением*,

• производная фрактального броуновского движения, называемая *фрактальным гауссовским шумом*.

Фрактальное броуновское движение $B(t)$ — гауссовский процесс, обладающий следующими свойствами [Кроновер, 2000]:

— $B(0) = 0$ и почти все реализации процесса $B(t)$ непрерывны (функция $B(t)$ почти всегда непрерывна);

— приращение $B(t_2) - B(t_1)$, $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_H^2 = \sigma^2 (t_2 - t_1)^{2H}$, где σ — положительное число, H — *параметр Херста*, $0 < H < 1$.

Когда параметр Херста $H = 0,5$, фрактальное броуновское движение вырождается в классическое броуновское движение.

Приращение броуновского движения (включая приращение классического броуновского движения) и фрактальный гауссовский шум стационарны. Приращения классического броуновского движения независимы, а приращения невырожденного фрактального броуновского движения и отсчеты фрактального гауссовского шума зависимы.

Корреляционная функция фрактального гауссовского шума $X(t)$ описывается выражением [Ширяев, 1998, Wornell, 1999]

$$K_x(\tau) \sim \begin{cases} H(2H-1)|\tau|^{2H-2} & \text{при} \quad H \neq 0,5, \\ \delta(\tau) & \text{при} \quad H = 0,5, \end{cases}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Если параметр Херста удовлетворяет неравенству $0,5 < H < 1$, то процесс характеризуется СПМ, описываемой выражением $S_x(f) \sim 1/f^{\beta}$, где $\beta = 2H - 1$, $0 < \beta < 1$.

При $0 < H < 0,5$ $(-1 < \beta < 0)$ процесс не имеет конкретной СПМ, а при $H = 0,5$ $(\beta = 0)$ превращается в белый гауссовский шум.

При $-1 < \beta < 0$ имеет место отрицательная корреляция между отсчетами (*процесс антиперсистентный*), при $\beta = 0$ корреляция отсутствует, а при $0 < \beta < 1$ она положительная (*процесс персистентный*).

В параграфе 7.5 показано, что процессы со степенной СПМ, у которых параметр формы $\beta \geq 1$, статистически неустойчивы по отношению к среднему, а у которых параметр $\beta < 1$ — статистически устойчивы.

Отсюда следует, что *самоподобные процессы* (*антиперсистентные и персистентные*) *статистически устойчивые по отношению к среднему*.

Отметим, что не все самоподобные процессы имеют корреляционную функцию, описываемую степенным законом. В качестве примера можно привести нестационарные процессы с корреляционными функциями $K_x(t_1, t_2) = (mt_1 + nt_2)^r$ и $K_x(t_1, t_2) = C_0 t_1^{r/2} t_2^{r/2}$, удовлетворяющие тем не менее уравнению самоподобия, где m, n — константы.

13.4. ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные результаты параграфов 7.5 и 13.1—13.3, касающиеся статистической устойчивости процессов по отношению к среднему, описываемых степенной СПМ, приведены на рис. 13.1.

На рисунке показано, что

• статистически неустойчивыми процессами являются часть нестационарных процессов, часть фликкер-шумов, а также розовый, коричневый и черный шумы;

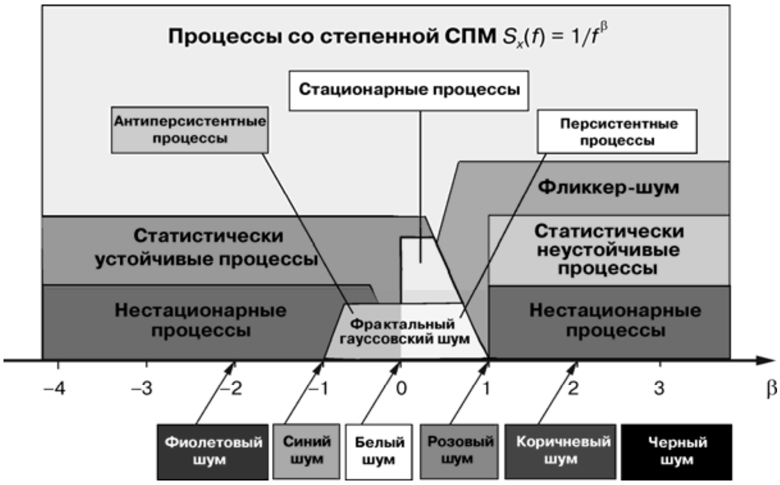


Рис. 13.1. Процессы со степенной СПМ

• статистически устойчивыми являются стационарные процессы, часть нестационарных процессов, фрактальный гауссовский шум, часть фликкер-шумов, а также фиолетовый, синий и белый шумы.

Систематизированные результаты исследований статистической устойчивости различных процессов, рассмотренных в предыдущих главах, представлены в табл. 13.2—13.4.

Табл. 13.2 содержит перечень статистически устойчивых процессов по отношению к среднему, табл. 13.3 — статистически неустойчивых процессов по отношению к среднему, а табл. 13.4 — перечень реальных колебаний с указанием для каждого из них оценки интервала статистической устойчивости. Все эти оценки, за исключением соответствующих графе 9 табл. 13.4, касаются статистической устойчивости по отношению к среднему. Оценка же в графе 9 касается статистической устойчивости по отношению к СКО.

Обратим внимание, что процессы, перечисленные в табл. 13.2 и 13.3, являются не реальными процессами, а стохастическими и детерминированными моделями.

Все исследованные реальные процессы, приведенные в табл. 13.4, являются статистически неустойчивыми процессами.

Наименее устойчивы — колебания напряжения городской электросети и колебания курса валют. Интервал статистической устойчивости этих колебаний лежит в районе часа. *Наиболее устойчивы — колебания количества осадков.* Интервал статистической устойчивости этих колебаний (по отношению к среднему) составляет многие десятки лет.

Таблица 13.2

№ п/п	Статистически устойчивые процессы
1	Фиолетовый, синий и белый шумы
2	Стационарные процессы
3	Фрактальный гауссовский шум
4	Равновесный фликкер-шум (шум со степенной СПМ, показатель формы которого удовлетворяет неравенству $0 < \beta < 1$)
5	Периодические детерминированные колебания (в частности гармонические)
6	Случайные процессы, у которых математическое ожидание описывается периодической функцией
7	Случайные процессы, у которых математическое ожидание имеет скачкообразные периодические всплески

Таблица 13.3

№ п/п	Статистически неустойчивые процессы
1	Розовый, коричневый и черный шумы
2	Неравновесный фликкер-шум (шум со степенной СПМ, показатель формы которого $\beta \geq 1$)
3	Случайный процесс со сверхнизкой частотой изменения математического ожидания
4	Случайный процесс с математическим ожиданием, содержащим ряд сильно отстоящих друг от друга по частоте гармоник
5	Случайный процесс с апериодически изменяющимся математическим ожиданием
6	Множество детерминированных и случайных моделей процессов, в частности, описываемых формулами (1.9) и (1.10)

Таблица 13.4

№ п/п	Реальные колебания	Интервал статистической устойчивости
1	Колебание напряжения городской электросети	Порядка 1 ч
2	Колебания курса валют	Порядка 1 ч
3	Колебания высоты волн и периода их следования	Порядка полусуток
4	Колебания температуры и скорости звука в океане	Десятки часов
5	Колебание интенсивности излучения астрофизического источника Cygnus X-1	Порядка недели
6	Колебания температуры воздуха	Несколько недель
7	Колебание интенсивности излучения астрофизического источника GRS 1915+105	Порядка месяца
8	Узкополосные колебания температуры воды в океане со средним периодом от 2 до 10 ч	Несколько недель
9	Колебание интенсивности излучения пульсара PSR J1012+5307	Несколько месяцев
10	Колебания скорости ветра	Несколько месяцев
11	Колебание магнитного поля Земли	Несколько месяцев
12	Колебания количества осадков	Многие десятки лет

Заметим, что приведенные оценки интервалов статистической устойчивости носят ориентировочный характер. Для разных совокупностей статистических условий они могут существенно различаться.

Главным результатом описанных исследований является то, что *все рассмотренные реальные процессы* (взятые произвольно из разных областей знания и описывающие колебания разной физической природы) *статистически неустойчивы.* Это позволяет *выдвинуть гипотезу о том, что все реальные физические явления статистически неустойчивы.*

13.5. ПРИЧИНЫ НАРУШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Существует множество факторов, вызывающих нарушение статистической устойчивости.

Один из них — поступление *извне вещества, энергии и (или) информации.* Их поток в *открытую систему* порождает и питает статистически неустойчивые неравновесные фликкер-шумы.

Статистически неустойчивые шумы могут возникнуть в результате различных *нелинейных преобразований.* При детектировании, например, амплитудно-модулированного сигнала в его спектре, как известно, присутствуют спектральные составляющие, соответствующие огибающей радиосигнала. Если СПМ огибающей описывается функцией типа $1/f^{\beta}$, где $\beta \geq 1$, то после подавления высокочастотной несущей отфильтрованный процесс оказывается статистически неустойчивым.

Обратим особое внимание на то, что *широкополосный статистически устойчивый шум даже при линейной низкочастотной фильтрации может стать статистически неустойчивым.*

Пример такой фильтрации — интегрирование. При интегрировании процесса $X(t)$ получается процесс $Y(t)$, СПМ $S_y(f)$ которого связана со СПМ $S_x(f)$ исходного процесса известным соотношением:

$$S_y(f) = \frac{S_x(f)}{4\pi^2 f^2}.$$

Наличие такой связи между спектрами $S_y(f)$ и $S_x(f)$ приводит к тому, что *стационарные статистически устойчивые шумы*, соответствующие диапазону от белого включительно до розового, после интегрирования становятся *нестационарными статистически неустойчивыми шумами и располагаются в коричнево-черной области* (см. рис. 13.1).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Главным итогом описанных в предыдущей части монографии экспериментальных исследований является *установление факта ограниченной статистической устойчивости всех без исключения рассмотренных реальных физических процессов.*

Это обстоятельство позволяет предположить, что *физический, феномен статистической устойчивости носит ограниченный характер.* Проведенные исследования стимулировали разработку математических методов описания реальных процессов в условиях ограниченной статистической устойчивости. В результате была разработана физико-математическая теория гиперслучайных явлений [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)], ориентированная на описание физических явлений (событий, величин, процессов и полей) с учетом нарушений статистической устойчивости.

В основе этой теории лежит идея представления реальных событий, величин, процессов и полей гиперслучайными моделями, в которых вместо конкретных вероятностных параметров и характеристик используются множества вероятностных параметров и характеристик, соответствующие разным возможным вариантам условий.

Пояснение исходных базовых понятий этой теории, таких как гиперслучайное событие, гиперслучайная величина и гиперслучайная функция, были даны в параграфе 2.5.

В главах с 14 по 21 в сжатом виде приведены основные положения теории гиперслучайных явлений. Более детально она рассмотрена в специализированных монографиях [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)].

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Введено понятие гиперслучайного события. Для описания гиперслучайного события использованы условные вероятности и границы вероятностей. Приведены свойства этих параметров.

14.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Определение 1. *Гиперслучайное событие*, рассматриваемое как математический объект, задается аналитически тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — σ-алгебра подмножеств событий (борелевское поле) и P_g — вероятностная мера при фиксированном значении $g \in G$.

Гиперслучайное событие можно представить множеством случайных событий, зависящих от условий g. Для каждого g-го входящего в это множество случайного события определена вероятностная мера P_g, но для условий g мера не определена.

Гиперслучайное событие A характеризуется не одной вероятностью, а *множеством вероятностей* $P(A/g)$, $g \in G$. Это множество вероятностей обеспечивает исчерпывающее описание гиперслучайного события.

Менее полно гиперслучайное событие A может быть охарактеризовано *верхней* $P_S(A)$ и *нижней* $P_I(A)$ *границами вероятности* (*границами вероятности*) (рис. 14.1), описываемые выражениями

$$P_S(A) = \sup_{g \in G} P(A/g), \quad P_I(A) = \inf_{g \in G} P(A/g). \tag{14.1}$$

Используя статистический подход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N не стабилизируется (не сходится) и при $N \to \infty$ не имеет предела.

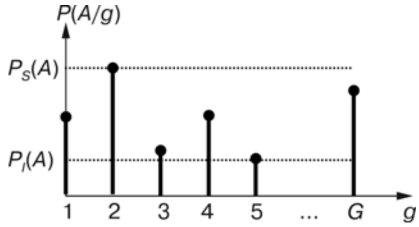


Рис. 14.1. Условные вероятности $P(A/g)$ (соответствующие точкам) и границы вероятности $P_S(A)$, $P_I(A)$ (соответствующие точечным линиям) гиперслучайного события A

Если множество условий состоит из одного элемента ($g = \text{const}$), эти границы совпадают. Тогда гиперслучайное событие вырождается в случайное. При этом величина $P(A) = P_S(A) = P_I(A)$ представляет собой вероятность случайного события A.

14.2. СВОЙСТВА ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

На основе аксиом теории вероятностей [Колмогоров, 1974] можно показать, что

1) $$P_S(A) \geq 0, \quad P_I(A) \geq 0; \tag{14.2}$$

2) для попарно несовместных событий

$$P_S(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P_S(A_n), \quad P_I(\bigcup_n A_n) \geq \sum_n P_I(A_n); \tag{14.3}$$

3) $$P_S(\Omega) = P_I(\Omega) = 1. \tag{14.4}$$

Из выражений (14.1)—(14.4) следует, что $P_S(A)$ и $P_I(A)$ представляют собой *нормированные полумеры*, удовлетворяющие всем аксиомам меры, за исключением *аксиом аддитивности и счетной аддитивности*. При этом

$$0 \leq P_S(A) \leq 1, \quad 0 \leq P_I(A) \leq 1, \quad P_S(\varnothing) = P_I(\varnothing) = 0.$$

Для гиперслучайных событий справедливы следующие формулы:

4) если $A_m \subset A_{m+1}$, $m \geq 1$, то

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \quad P_I(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{14.5}$$

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M \to \infty} P_S(A_M);$$

5) если $A_{m+1} \subset A_m$, $m \geq 1$, то

$$P_S(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \qquad P_I(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{14.6}$$

$$P_I(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M)\,^{1}.$$

Для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2) - P_I(A_1 \cap A_2), \tag{14.7}$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2) - P_S(A_1 \cap A_2), \tag{14.8}$$

аналогичные выражению, описывающему *теорему сложения* для случайных событий:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Отметим, что когда события A_1 и A_2 несовместные, то $P_S(A_1 \cap A_2) = 0$, $P_I(A_1 \cap A_2) = 0$ и из выражений (14.7), (14.8) следует

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2),$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2). \tag{14.9}$$

Когда $A_1 \subset A_2$, то согласно соотношению (14.5)

$$P_S(A_1 \cup A_2) = P_S(A_2), \qquad P_I(A_1 \cup A_2) = P_I(A_2).$$

В общем случае для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cap A_2) \le P_S(A_1) P_S(A_2/A_1), \quad (P_S(A_1) \ne 0),$$

$$P_I(A_1 \cap A_2) \ge P_I(A_1) P_I(A_2/A_1), \quad (P_I(A_1) \ne 0), \tag{14.10}$$

аналогичные выражению

---

[1] В общем случае формулы

$$P_I(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M), \quad P_S(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M)$$

для соответственно $A_m \subset A_{m+1}$ и $A_{m+1} \subset A_m$ ($m \ge 1$) неверны. На это обратил внимание автора В.Н. Тутубалин.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ P(A_2/A_1),$$

описывающему *теорему умножения* для случайных событий при $P(A_1) \neq 0$. В данном случае под $P_S(A_2/A_1)$ и $P_I(A_2/A_1)$ подразумеваются соответственно верхняя и нижняя границы вероятности события A_2 при условии, что произошло событие A_1.

Определение 2. *Гиперслучайные события* A_1 и A_2 называются *независимыми*, если границы вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P_S(A_1 \cap A_2) = P_S(A_1)P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \cap A_2) = P_I(A_1)P_I(A_2). \quad (14.11)$$

Смысл формул (14.11) заключается в том, что при независимых гиперслучайных событиях A_1 и A_2 границы функции распределения пересечения событий определяются лишь границами функции распределения события A_1 и границами функции распределения события A_2. При этом несущественно, произошло или не произошло событие A_1 до выяснения, каковы границы события A_2, и произошло или не произошло событие A_2 до выяснения, каковы границы события A_1. Результат будет один и тот же.

Определение 3. *Гиперслучайные события* A_1 и A_2 называются *независимыми при всех условиях*, если для всех $g \in G$ условные вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P(A_1 \cap A_2 / g) = P(A_1 / g)P(A_2 / g).$$

Независимые гиперслучайные события и независимые при всех условиях гиперслучайные события — разные понятия. Из независимости гиперслучайных событий при всех условиях *не следует* их независимость и, наоборот, из независимости гиперслучайных событий *не следует* их независимость при всех условиях.

14.3. АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ТЕОРЕМЫ ГИПОТЕЗ

Аналогами *формулы полной вероятности* и *теоремы гипотез* (*теоремы Байеса*) теории вероятностей служат следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть событие A может произойти совместно с одним и только одним событием $H_1, \ldots, H_M$, образующим полную группу несовместных событий (гипотез). Тогда

$$P_S(A) \le \sum_{m=1}^{M} P_S(H_m) P_S(A/H_m),$$

$$P_I(A) \ge \sum_{m=1}^{M} P_I(H_m) P_I(A/H_m).$$

Теорема 2. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — множество попарно несовместных событий (гипотез), образующих полную группу. Тогда для каждой пары событий $(H_m,\ A)$ справедливы неравенства

$$P_S(H_m/A) \le \frac{P_S(H_m \cap A)}{P_I(A)} \le \frac{P_S(H_m) P_S(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_I(H_m) P_I(A/H_m)},$$

$$P_I(H_m/A) \ge \frac{P_I(H_m \cap A)}{P_S(A)} \ge \frac{P_I(H_m) P_I(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_S(H_m) P_S(A/H_m)}.$$

СКАЛЯРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие исчерпывающее описание гиперслучайной величины), границы функции распределения и их моменты, а также границы моментов. Приведены свойства этих характеристик и параметров.

15.1. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 1. *Скалярной гиперслучайной величиной X* называется произвольная числовая функция, определенная на пространстве Ω элементарных событий ω, для которой при фиксированных условиях наблюдения $g \in G$ определена вероятностная мера, но для условий наблюдения вероятностная мера не определена.

Как и в случае случайной величины, значения x гиперслучайной величины X могут быть получены с помощью некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

Гиперслучайную величину X можно представить в виде множества случайных величин X / g: $X = \{X / g \in G\}$.

Гиперслучайные величины связаны со случайными величинами так, как векторные величины — со скалярными величинами: вектор может быть представлен множеством скалярных величин; гиперслучайная величина может быть охарактеризована множеством случайных величин. Частным случаем вектора является скаляр, частным случаем гиперслучайной величины — случайная величина.

Для описания гиперслучайной величины X можно использовать различные вероятностные характеристики *условных случайных*

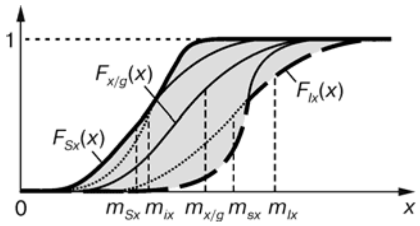


Рис. 15.1. Множество условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ (тонкие линии) и границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ (жирные линии) гиперслучайной величины X

величин X/g $(g \in G)$, например, *условные функции распределения* (рис. 15.1):

$$F(x/g) = P\{X < x/g\},$$

где $P\{X < x/g\}$ — вероятность выполнения неравенства $X < x$ в условиях g, *условные плотности распределения*

$$f(x/g) = \frac{dF(x/g)}{dx}^{1},$$

условные характеристические функции

$$Q(j\omega/g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x/g)\exp(j\omega x)\,dx,$$

образующие функции моментов, функции факториальных моментов и др.

В дальнейшем наряду с приведенными обозначениями условных функций распределения, условных плотностей вероятностей и условных характеристических функций будем использовать другие, эквивалентные им — $F_{x/g}(x)$, $f_{x/g}(x)$, $Q_{j\omega/g}(j\omega)$.

Наиболее полно описывает гиперслучайную величину *функция распределения* $F_x(x)$, представляющая собой множество условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ для всех $g \in G$: $F_x(x) = \{F_{x/g}(x), g \in G\}$.

Функцию распределения $F_x(x)$ можно интерпретировать как *многозначную* функцию, ветви которой — условные функции распределения. Математический аппарат работы с многозначными функциями приведен далее в главе 24.

[1] Здесь и далее предполагается, что все рассматриваемые функции распределения непрерывны или кусочно-непрерывны.

Менее полное описание обеспечивают множества *центральных* и *нецентральных моментов* случайных величин $X/g \quad \forall g \in G$, в частности, множества *условных математических ожиданий*:

$$m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/g)\, dx ,$$

множества *условных дисперсий*:

$$D_{x/g} = \mathrm{D}[X/g] = \mathrm{M}[(X/g - m_{x/g})^2]$$

и пр., где $\mathrm{M}[\cdot]$ и $\mathrm{D}[\cdot]$ — операторы математического ожидания и дисперсии соответственно.

Для описания гиперслучайной величины X могут быть использованы также другие характеристики и параметры.

15.2. ГРАНИЦЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ ГРАНИЦ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Общее представление о гиперслучайной величине дают функции

$$F_S(x) = \sup_{g \in G} P\{X < x/g\} = \sup_{g \in G} F(x/g),$$
$$F_I(x) = \inf_{g \in G} P\{X < x/g\} = \inf_{g \in G} F(x/g) \qquad (15.1)$$

— соответственно верхняя и нижняя границы вероятности выполнения условия $X < x$ (*границы функций распределения* $F(x/g)$).

В дальнейшем наряду с приведенными обозначениями границ функции распределения будем использовать обозначения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, в которых принадлежность границ функции распределения определенной гиперслучайной величине подчеркнута соответствующим индексом (см. рис. 15.1).

Для того чтобы функция $F(x)$ могла быть функцией распределения некоторой случайной величины, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей при всех x, непрерывной слева и имела предельные значения $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ [Гнеденко, Колмогоров, 1949].

Рассмотрим гиперслучайную величину X со случайными величинами X/g, описываемыми функциями распределения $F(x/g)$ $(g \in G)$. Все эти функции распределения неубывающие, непрерывные слева и их предельные значения равны либо нулю, либо единице. Границы функции распределения гиперслучайной величины также удовлетворяют всем этим условиям. Поэтому *границы функции распределения можно рассматривать как функции распределения неких виртуальных случайных величин.*

Кроме того, $F_S(x) \geq F_I(x)$, при минимальном значении гиперслучайной величины (если оно существует) границы совпадают и равны нулю, а при максимальном значении (если оно существует) границы совпадают и равны единице.

Между границами функции распределения расположена *зона неопределенности.*

Обратим внимание, что детерминированную, случайную и интервальную величины можно рассматривать как частные случаи гиперслучайной величины (см. параграф 3.4).

Определение 2. *Гиперслучайная величина* называется *непрерывной*, если на любом конечном интервале границы ее функции распределения непрерывны и существуют их кусочно-непрерывные производные.

Для непрерывной гиперслучайной величины аналогами плотности распределения случайной величины служат *плотности распределения границ*:

$$f_S(x) = \frac{dF_S(x)}{dx}, \quad f_I(x) = \frac{dF_I(x)}{dx}, \tag{15.2}$$

представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения.

Используя обобщенные функции, в частности δ-функцию, можно определить плотности распределения границ не только для непрерывных гиперслучайных величин, но и для тех, у которых границы функции распределения представляют собой кусочно-непрерывные функции.

Плотности распределения границ обладают свойствами плотности вероятностей случайной величины.

Аналогами характеристической функции случайной величины могут служить *характеристические функции границ гиперслучайной величины*, под которыми понимается обратное преобразование Фурье плотностей распределения границ:

$$Q_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\exp(j\omega x)dx,$$

$$Q_I(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\exp(j\omega x)dx. \tag{15.3}$$

Характеристические функции границ обладают свойствами характеристической функции случайной величины: они ограничены ($|Q_S(j\omega)| \le Q_S(0) = 1$, $|Q_I(j\omega)| \le Q_I(0) = 1$) и в случае вещественных гиперслучайных величин обладают свойством комплексной сопряженности ($Q_S(-j\omega) = Q_S^*(j\omega)$, $Q_I(-j\omega) = Q_I^*(j\omega)$) (звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения).

Отметим, что плотности распределения границ и характеристические функции границ определяют зону неопределенности, однако характеризуют ее не столь наглядно, как границы функции распределения.

Информативной характеристикой является *среднее границ функции распределения*:

$$F_0(x) = (F_S(x) + F_I(x))/2 .$$

Для описания гиперслучайных величин могут быть использованы *моменты границ распределения*: математические ожидания границ, дисперсии границ, среднеквадратические отклонения границ и др.

Определение 3. *Математическими ожиданиями границ* $\mathrm{M}_S[\varphi(X)]$, $\mathrm{M}_I[\varphi(X)]$ *функции* $\varphi(X)$ гиперслучайной величины X с плотностями распределения границ $f_S(x)$, $f_I(x)$ называются интегралы

$$\mathrm{M}_S[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_S(x)\,dx,$$

$$\mathrm{M}_I[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_I(x)\,dx. \qquad (15.4)$$

Математические ожидания границ существуют не всегда: только когда существуют (в смысле абсолютной сходимости) интегралы (15.4).

Из выражений (15.3), (15.4) видно, что характеристические функции границ — это математические ожидания границ комплексной гиперслучайной величины $\exp(j\omega X)$. Из выражений (15.4) следует, что *математические ожидания границ* m_{Sx}, m_{Ix} *гиперслучайной величины X*, представляемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X$, описываются выражениями

$$m_{Sx} = \mathrm{M}_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_S(x)\,dx,\; m_{Ix} = \mathrm{M}_I[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_I(x)\,dx \qquad (15.5)$$

(см. рис. 15.1).

Для вещественной гиперслучайной величины X *дисперсии границ* D_{Sx} и D_{Ix} определяются как

$$D_{Sx} = \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Sx})^2\right], \quad D_{Ix} = \mathrm{M}_I\left[(X - m_{Ix})^2\right], \qquad (15.6)$$

а *среднеквадратические отклонения границ* σ_{Sx} и σ_{Ix} — как

$$\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}, \quad \sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}. \qquad (15.7)$$

Математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} гиперслучайной величины X характеризуют средние значения X, рассчитанные для верхней и нижней границ распределения. Дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix} величины X, а также среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx} и σ_{Ix} величины X характеризуют разброс значений X относительно соответствующих математических ожиданий m_{Sx} и m_{Ix}.

Математические ожидания границ связаны между собой неравенством $m_{Sx} \le m_{Ix}$. Равенство, в частности, имеет место тогда, когда гиперслучайная величина X вырождается в случайную величину. Дисперсия верхней границы D_{Sx} может быть больше, меньше или равна дисперсии нижней границы D_{Ix}.

В качестве интегральных характеристик используют также *среднее математических ожиданий границ функции* $\varphi(X)$, определяемое как

$$\mathrm{M}_0[\varphi(X)] = (\mathrm{M}_S[\varphi(X)] + \mathrm{M}_I[\varphi(X)])/2,$$

среднее математических ожиданий границ гиперслучайной величины X, определяемое как $m_{0x} = (m_{Sx} + m_{Ix})/2$, *среднее дисперсий границ* $D_{0x} = \mathrm{M}_0\left[(X - m_{0x})^2\right]$ и *среднее среднеквадратических отклонений границ* $\sigma_{0x} = \sqrt{D_{0x}}$.

Представление о гиперслучайной величине дают и другие характеристики, в частности, *начальные моменты границ* $m_{Sx\nu}$ и $m_{Ix\nu}$ ν-го порядка, определяемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X^{\nu}$, *центральные моменты границ* $\mu_{Sx\nu}$ и

$\mu_{Ix\nu}$ ν-го порядка, определяемые как математические ожидания соответственно границ функций $\varphi(X) = (X - m_{Sx})^{\nu}$ и $\varphi(X) = (X - m_{Ix})^{\nu}$, и др.

15.3. ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для описания гиперслучайных величин применяют также характеристики и параметры, не основанные на границах функции распределения, например, *границы плотности распределения*, определяемые для скалярной вещественной величины X следующим образом:

$$f_s(x) = \sup_{g \in G} f(x/g), \quad f_i(x) = \inf_{g \in G} f(x/g),$$

где $f(x/g)$ — плотность распределения гиперслучайной величины X при условии $g \in G$.

Наряду с приведенными обозначениями границ плотности распределения будем использовать эквивалентные $f_{sx}(x)$, $f_{ix}(x)$, в которых факт принадлежности к соответствующей гиперслучайной величине отражен в индексе.

Для описания используют также *границы моментов.*

Определение 4. *Верхней и нижней границами математического ожидания функции* $\varphi(X)$ *гиперслучайной величины* X называются величины

$$\mathrm{M}_s[\varphi(X)] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g)\, dx,$$

$$\mathrm{M}_i[\varphi(X)] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g)\, dx. \tag{15.8}$$

Определение 5. *Верхней и нижней границами начального момента* ν-го порядка называются величины

$$m_{sx\nu} = \mathrm{M}_s[X^{\nu}] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} f(x/g)\, dx,$$

$$m_{ix\nu} = \mathrm{M}_i[X^{\nu}] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} f(x/g)\, dx. \tag{15.9}$$

Определение 6. *Границами центрального момента* ν-го порядка называются величины

$$\mu_{sx\nu} = \mathrm{M}_s[(X - m_{x/g})^\nu] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g)\,dx,$$

$$\mu_{ix\nu} = \mathrm{M}_i[(X - m_{x/g})^\nu] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g)\,dx, \qquad (15.10)$$

где $m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g]$ — математическое ожидание распределения в условиях g.

Частным случаем границ моментов являются *границы математического ожидания гиперслучайной величины* X:

$$m_{sx} = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/g)\,dx, \quad m_{ix} = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/g)\,dx \qquad (15.11)$$

(см. рис. 15.1).

Границы математического ожидания, как следует из выражений (15.9), являются границами начального момента первого порядка. Границами центрального момента второго порядка являются *границы дисперсии* $D_{sx} = \mu_{sx2}$, $D_{ix} = \mu_{ix2}$. Корни из этих величин $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$, $\sigma_{ix} = \sqrt{D_{ix}}$ представляют собой *границы среднеквадратического отклонения.*

15.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ГРАНИЦАМИ МОМЕНТОВ И МОМЕНТАМИ ГРАНИЦ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В общем случае операторы $\mathrm{M}_s[\cdot]$, $\mathrm{M}_i[\cdot]$ не совпадают с операторами $\mathrm{M}_S[\cdot]$, $\mathrm{M}_I[\cdot]$, а границы моментов гиперслучайной величины $m_{sx\nu}$, $m_{ix\nu}$, $\mu_{sx\nu}$, $\mu_{ix\nu}$ не совпадают с моментами границ функции распределения $m_{Sx\nu}$, $m_{Ix\nu}$, $\mu_{Sx\nu}$, $\mu_{Ix\nu}$.

Заметим, что как границы плотности распределений, так и границы моментов несут информацию не о границах функции распределения, а о диапазоне изменения соответствующих характеристик при изменении условий g в пределах множества условий G. Границы плотности распределения и плотности распределения границ — разные характеристики, а границы моментов и моменты границ — разные параметры, по-разному представляющие гиперслучайную величину.

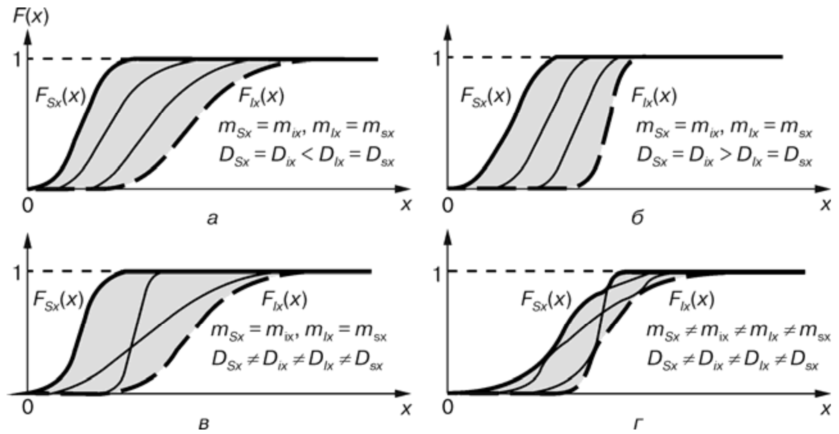


Рис. 15.2. Различные типы функции распределения. Тонкими линиями изображены условные функции распределения $F(x/g)$, а жирными — границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$

Для пояснения причин возможных отличий границ характеристик от соответствующих характеристик границ на рис. 15.2 приведены несколько примеров функции распределения гиперслучайной величины X.

Из рисунка видно, что условные функции распределения могут не пересекаться (рис. 15.2, *а*, *б*), а могут пересекаться между собой (рис. 15.2, *в*, *г*). В случаях «*а*» и «*б*» границы двух первых моментов совпадают с соответствующими моментами границ, в случае «*в*» наблюдается частичное, а в случае «*г*» — полное несовпадение соответствующих характеристик.

Если существуют минимальные и максимальные значения математических ожиданий гиперслучайной величины, то математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} связаны с границами математических ожиданий m_{ix} и m_{sx} неравенством

$$m_{Sx} \le m_{ix} \le m_{sx} \le m_{Ix} .$$

Доказательство базируется на следующих соображениях.

Пусть $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$ — границы функции распределения гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$, m_{Sx} и m_{Ix} — математические ожидания этих границ, $F_{ix}(x)$ и $F_{sx}(x)$ — функции распределения случайных величин (из числа образующих гиперслучайную величину $X = \{X / g \in G\}$) с математическими ожиданиями соответственно m_{ix} и m_{sx}.

На некоторых участках функции $F_{Sx}(x)$ и $F_{ix}(x)$ могут совпадать, на некоторых — не совпадать. На интервалах, где они не совпадают, кривая $F_{Sx}(x)$ располагается левее кривой $F_{ix}(x)$. Поэтому

$$\int_0^1 xd\, F_{Sx}(x) \le \int_0^1 xd\, F_{ix}(x),$$

т. е. $m_{ix} \ge m_{Sx}$.

Аналогично доказывается неравенство $m_{sx} \le m_{Ix}$.

15.5. ОПЕРАЦИИ НАД ГИПЕРСЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Определение 7. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2, описываемые соответственно функциями распределения $F_{x_1}(x) = \{F_{x_1/g}(x),$ $g \in G\}$ и $F_{x_2}(x) = \{F_{x_2/g}(x), \quad g \in G\}$, считаются *равными при всех условиях*, если при одинаковых условиях $g \in G$ совпадают их условные функции распределения: $F_{x_1/g}(x) = F_{x_2/g}(x) \ \ \forall g \in G$.

Определение 8. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2, описываемые соответственно функциями распределения $F_{x_1}(x)$ и $F_{x_2}(x)$, полагают *равными*, если их соответствующие границы распределения совпадают: $F_{Sx_1}(x) = F_{Sx_2}(x)$, $F_{Ix_1}(x) = F_{Ix_2}(x)$.

В этом отношении гиперслучайные величины подобны интервальным величинам (см. приложение 2).

Для гиперслучайных величин *определены арифметические операции сложения, вычитания умножения и деления.* Результатом арифметической операции является *гиперслучайная величина.*

Параметры и характеристики гиперслучайных величин, полученных в результате различных преобразований гиперслучайных величин (в том числе арифметических операций), сложным образом выражаются через параметры и характеристики исходных гиперслучайных величин.

Зависимости между этими параметрами и характеристиками рассмотрены в главе 20.

ВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Методы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Приведены свойства характеристик и параметров векторных гиперслучайных величин.

16.1. ВЕКТОРНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЕЕ УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОМЕНТЫ

Определение 1. Под *векторной гиперслучайной величиной* подразумевается вектор, каждая компонента которого представляет собой скалярную гиперслучайную величину.

M-мерную векторную гиперслучайную величину $\vec{X}$ можно рассматривать как множество векторных случайных величин $\left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ или как вектор, состоящий из M скалярных гиперслучайных величин X_m $(m = \overline{1, M})$.

Для описания векторной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, ..., X_M)$ используют различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* $\vec{X} / g$ $(g \in G)$, например, *условные функции распределения*:

$$F(\vec{x} / g) = F(x_1, \ldots, x_M / g) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\},$$

где $P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\}$ — вероятность выполнения неравенств $X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M$ в условиях g, *условные плотности распределений:*

$$f(\vec{x} / g) = \frac{\partial^M F(\vec{x} / g)}{\partial x_1 \ldots \partial x_M},$$

условные характеристические функции:

$$Q(j\vec{\omega}/g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}/g)\exp(j\vec{\omega}\,\vec{x})\,d\vec{x}\,,$$

условные образующие фунции моментов, условные образующие функции факториальных моментов и др.

Множество любых из этих условных характеристик для всех $g \in G$ дает наиболее полное описание векторной гиперслучайной величины.

Менее полное описание обеспечивают центральные и нецентральные моменты случайных величин $\vec{X}/g \quad \forall g \in G$.

Основными числовыми характеристиками векторной L-мерной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, \dots, X_L)$ с условными плотностями распределения $f(x_1, \dots, x_L / g)$ являются *условные математические ожидания* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ для всех $g \in G$, определяемые как

$$\mathrm{M}\left[\vec{\varphi}\,(\vec{X})/g\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}\,(x_1, \dots, x_L) f(x_1, \dots, x_L / g) dx_1 \dots dx_L$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем этих характеристик является *вектор условных математических ожиданий* $\vec{m}_{\vec{x}/g} = \mathrm{M}\left[\vec{X}/g\right]$ *случайных векторов* $\vec{X}/g$.

Для L-мерного *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса служит *вектор условных дисперсий* $\vec{D}_{\vec{x}/g}$, представляющий собой математическое ожидание функций

$$\vec{\varphi}(\vec{X}/g) = ((X_l / g - m_{x_l/g})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

и *вектор условных среднеквадратических отклонений* $\vec{\sigma}_{\vec{x}/g}$, компоненты которых определяются как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{\vec{x}/g}$, где $m_{x_l/g}$ — l-е компоненты векторов $\vec{m}_{\vec{x}/g}$.

Полезными характеристиками L-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ являются *условные начальные моменты* $m_{\vec{x}/g\nu_1 \dots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$, определяемые следующим образом:

$$m_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}/g\right]$$

(ν_l — целое положительное число, $l=\overline{1,L}$), а также *условные центральные моменты* $\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_L$, определяемые как

$$\mu_{\vec{x}/g\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}\left[(X_1-m_{x_1/g})^{\nu_1}\ldots(X_L-m_{x_L/g})^{\nu_L}/g\right].$$

Смешанные условные центральные моменты второго порядка $\mu_{x_1x_2/g}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 называются *условными ковариационными моментами*, смешанные условные начальные моменты второго порядка $m_{x_1x_2/g}$ — *условными корреляционными моментами*, а смешанные центральные моменты второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения $\sigma_{x_1/g}$ и $\sigma_{x_2/g}$, — *условными коэффициентами корреляции*:

$$r_{x_1x_2/g} = \frac{\mu_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}.$$

Условные ковариационные моменты $\mu_{x_1x_2/g}$, условные корреляционные моменты $m_{x_1x_2/g}$ и условные математические ожидания $m_{x_1/g}$, $m_{x_2/g}$ гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\mu_{x_1x_2/g} = m_{x_1x_2/g} - m_{x_1/g}m_{x_2/g}.$$

Определение 2. *Векторные гиперслучайные величины* $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ называются *независимыми при всех условиях* $g\in G$, если факторизуются все условные плотности распределения: $f(\vec{x},\vec{y}/g) = f(\vec{x}/g)f(\vec{y}/g)\ \ \forall g\in G$.

Для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ при всех условиях $g\in G$ факторизуются не только все условные плотности распределения, но и все условные функции распределения, и все условные характеристические функции:

$$F(\vec{x},\vec{y}/g) = F(\vec{x}/g)F(\vec{y}/g),$$

$$Q(j\vec{\omega}_x, j\vec{\omega}_y/g) = Q(j\vec{\omega}_x/g)\,Q(j\vec{\omega}_y/g).$$

Следует обратить внимание на то, что независимость гиперслучайных величин при всех условиях *не означает, что между этими величинами отсутствует связь.* Просто на уровне рассматриваемых характеристик она не проявляется.

Уместно отметить, что понятие независимости случайных величин следует трактовать так же: связь между рассматриваемыми величинами может существовать, хотя на уровне вероятностной меры она не проявляется.

16.2. ГРАНИЦЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ ГРАНИЦ ВЕКТОРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 3. *Границы функции распределения векторной гиперслучайной величины* $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_M)$ определяются как

$$F_S(\vec{x}) = \sup_{g \in G} P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\},$$

$$F_I(\vec{x}) = \inf_{g \in G} P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\}, \tag{16.1}$$

плотности распределения границ — как

$$f_S(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_S(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \quad f_I(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_I(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \tag{16.2}$$

а *характеристические функции границ* — как

$$Q_S(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) d\vec{x},$$

$$Q_I(j\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) d\vec{x}. \tag{16.3}$$

Здесь уместно будет сделать некоторое отступление.

Известно, что для того чтобы функция $F(\vec{x})$ могла быть функцией распределения некоторой *M*-мерной случайной величины $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_M)$, где $M \ge 2$, необходимо, чтобы она была неубывающей по каждому аргументу, непрерывной слева по каждому аргументу и удовлетворяла соотношениям $F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1$, $\lim_{x_m \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_M) = 0 \quad (1 \le m \le M)$. Однако этих свойств не достаточно. Для того чтобы $F(\vec{x})$ была функцией распределения, необходимо и достаточно, чтобы кроме перечисленных трех свойств, аналогичных одномерному случаю, выполнялось еще одно, четвертое, требование: при любых $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_M)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ ($a_1 \le b_1, \ldots, a_M \le b_M$) выражение

$$P\{\vec{a} \le \vec{x} < \vec{b}\} = F(\vec{b}) - \sum_{m=1}^{M} p_m + \sum_{m<n} p_{mn} \mp \ldots + (-1)^M F(\vec{a})$$

должно быть неотрицательным, где $p_{mn\ldots k}$ — значение функции $F(c_1, c_2, \ldots, c_M)$ при $c_m = a_m$, $c_n = a_n$, ..., $c_k = a_k$ и при остальных c_s, равных b_s [Гнеденко, 1988].

Смысл четвертого требования очевиден: вероятность нахождения случайной величины $\vec{X}$ в многомерном параллелепипеде $\vec{a} \le \vec{X} < \vec{b}$ не может быть отрицательной величиной.

Более глубокий смысл этого требования раскрывается при рассмотрении двумерной случайной величины. В этом случае вероятность нахождения случайной величины в прямоугольнике с вершинами (a_1, a_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1, b_2) описывается выражением

$$P\{\vec{a} \le \vec{x} < \vec{b}\} = \Delta F_{b_2} - \Delta F_{a_2},$$

где $\Delta F_{b_2} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)$, $\Delta F_{a_2} = F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)$ — приращения функции $F(\vec{x})$ в сечениях $x_2 = b_2$ и $x_2 = a_2$ соответственно.

Величина, описывающая эту вероятность, неотрицательна, если приращения функции $F(\vec{x})$ в сечении $x_2 = b_2$ не меньше, чем ее приращение в сечении $x_2 = a_2$ ($\Delta F_{b_2} \ge \Delta F_{a_2}$). Понятно, что аналогичное требование можно сформулировать по отношению сечений вдоль оси x_1.

Обобщая, для двумерного случая можно сформулировать четвертое требование следующим образом: по мере увеличения любой координаты приращение функции $F(\vec{x})$ в сечении не должно уменьшаться.

Заметим, что для $M \ge 3$ четвертое требование, в принципе, также может быть сформулировано на основании понятий приращений. Однако углубляться далее в этот вопрос нам не имеет смысла, поскольку распределения мерности более двух на практике используются крайне редко.

Перечисленные четыре требования касаются не только функции распределения случайной величины, но и границ функции распределения векторной гиперслучайной величины.

Заметим, что не каждая функция $F_S(\vec{x})$ или $F_I(\vec{x})$, полученная путем расчета границ, удовлетворяет всем необходимым и достаточным требованиям, чтобы быть функцией неопределенности какой-то случайной величины. Если четвертое условие не выполняется, то границы всегда можно подправить так, чтобы это условие выполнялось.

В дальнейшем будем исходить из того, что все четыре условия выполняются для обеих границ.

В этом случае пары характеристик (16.1)—(16.3) обладают свойствами, присущими соответственно функции распределения, плотности распределения и характеристической функции векторной случайной величины, а также свойствами, характерными для соответствующих пар характеристик скалярной гиперслучайной величины. В частности $F_S(\vec{x}) \ge F_I(\vec{x})$, причем границы гиперслучайной величины приближаются друг к другу при устремлении компонент вектора $\vec{x}$ к минус бесконечности и плюс бесконечности.

Рассмотрим L-мерную гиперслучайную величину $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$, состоящую из M-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ и (L—M)-мерной гиперслучайной величины $\vec{Y}$. Введем понятия *границ условной функции распределения* $F_S(\vec{y}/\vec{x})$, $F_I(\vec{y}/\vec{x})$, *условных плотностей распределения границ* $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ и *условных характеристических функций границ* $Q_S(j\vec{\omega}_y/\vec{x})$, $Q_I(j\vec{\omega}_y/\vec{x})$ *гиперслучайной величины* $\vec{Y}$ при условии, что гиперслучайная величина $\vec{X}$ приняла значение $\vec{x}$.

Совместные плотности распределения границ $f_S(\vec{x}, \vec{y})$, $f_I(\vec{x}, \vec{y})$ системы гиперслучайных величин $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$ связаны с условными плотностями распределения границ $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ и плотностями распределения границ $f_S(\vec{x})$, $f_I(\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{X}$ неравенствами

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) \le f_S(\vec{x}) f_S(\vec{y}/\vec{x}), \quad f_I(\vec{x}, \vec{y}) \ge f_I(\vec{x}) f_I(\vec{y}/\vec{x}), \tag{16.4}$$

следующими из выражений (14.10).

Определение 4. *Гиперслучайные величины* $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ называют *независимыми*, если плотности распределения границ $f_S(\vec{x},\vec{y})$ и $f_I(\vec{x},\vec{y})$ допускают факторизацию:

$$f_S(\vec{x},\vec{y}) = f_S(\vec{x})f_S(\vec{y}), \quad f_I(\vec{x},\vec{y}) = f_I(\vec{x})f_I(\vec{y}). \qquad (16.5)$$

Нетрудно убедиться, что для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ факторизуются не только плотности распределения границ, но также границы функции распределения и характеристические функции границ:

$$F_S(\vec{x},\vec{y}) = F_S(\vec{x})F_S(\vec{y}), \quad F_I(\vec{x},\vec{y}) = F_I(\vec{x})F_I(\vec{y}),$$

$$Q_S(j\vec{\omega}_x, j\vec{\omega}_y) = Q_S(j\vec{\omega}_x)Q_S(j\vec{\omega}_y),$$

$$Q_I(j\vec{\omega}_x, j\vec{\omega}_y) = Q_I(j\vec{\omega}_x)Q_I(j\vec{\omega}_y).$$

Заметим, что независимость гиперслучайных величин и их независимость при всех условиях — разные понятия.

Плотности распределения границ M-мерной гиперслучайной величины $(X_1,\dots,X_M)$ определяются следующими неравенствами:

$$f_S(x_1, \ \dots, x_M) \le f_S(x_M/x_1, \ \dots, x_{M-1})\dots f_S(x_2/x_1)f_S(x_1), \qquad (16.6)$$

$$f_I(x_1, \ \dots, x_M) \ge f_I(x_M/x_1, \ \dots, x_{M-1})\dots f_I(x_2/x_1)f_I(x_1). \qquad (16.7)$$

Здесь $f_S(x_m/x_1,\dots,x_{m-1})$, $f_I(x_m/x_1,\dots,x_{m-1})$ $(m=\overline{2,M})$ — одномерные условные плотности распределения границ; $f_S(x_1)$, $f_I(x_1)$ — одномерные безусловные плотности распределения границ. Доказательство этих неравенств может быть проведено методом математической индукции с использованием неравенств (16.4).

Отметим, что в случае независимых компонент гиперслучайной величины (*независимых в совокупности*)

$$f_S(x_1,\dots,x_M) = f_S(x_1)\dots f_S(x_M),$$

$$f_I(x_1,\dots,x_M) = f_I(x_1)\dots f_I(x_M).$$

Для M-мерного *гиперслучайного вектора среднее границ функции распределения* и *среднее плотностей распределения границ* определяются соответственно следующим образом:

$$F_0(\vec{x}) = (F_S(\vec{x}) + F_I(\vec{x}))/2,$$

$$f_0(\vec{x}) = (f_S(\vec{x}) + f_I(\vec{x}))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями, аналогичными скалярному случаю:

$$f_0(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_0(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}.$$

В качестве основных числовых характеристик векторных гиперслучайных величин используют *математические ожидания границ* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ *гиперслучайной* L-мерной *величины* $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_L)$ с плотностями распределения границ $f_S(x_1, \ldots, x_L)$ и $f_I(x_1, \ldots, x_L)$, определяемые как

$$\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1, \ldots, x_L) f_S(x_1, \ldots, x_L)\, dx_1 \ldots dx_L, \quad (16.8)$$

$$\mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1, \ldots, x_L) f_I(x_1, \ldots, x_L)\, dx_1 \ldots dx_L \quad (16.9)$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем характеристик (16.8), (16.9) являются *математические ожидания границ* $\vec{m}_{S\vec{x}}$ и $\vec{m}_{I\vec{x}}$ *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$, представляющие собой математические ожидания границ функции $\vec{\varphi}(\vec{X}) = \vec{X}$:

$$\vec{m}_{S\vec{x}} = \mathrm{M}_S\left[\vec{X}\right], \qquad \vec{m}_{I\vec{x}} = \mathrm{M}_I\left[\vec{X}\right]. \quad (16.10)$$

Для L-мерного *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса служат *дисперсии границ* $\vec{D}_{S\vec{x}}$, $\vec{D}_{I\vec{x}}$, представляющие собой математические ожидания границ соответственно функций

$$\vec{\varphi}_S(\vec{X}) = ((X_l - m_{Sx_l})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

$$\vec{\varphi}_I(\vec{X}) = ((X_l - m_{Ix_l})^2, \quad l = \overline{1, L})$$

и *среднеквадратические отклонения* $\vec{\sigma}_{S\vec{x}}$, $\vec{\sigma}_{I\vec{x}}$ *границ*, компоненты которых определены как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{S\vec{x}}$, $\vec{D}_{I\vec{x}}$, где m_{Sx_l} и m_{Ix_l} — l-е компоненты векторов $\vec{m}_{S\vec{x}}$ и $\vec{m}_{I\vec{x}}$ соответственно.

Полезными характеристиками являются *начальные моменты границ* $m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ и $m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ L-мерной гиперслучайной вещественной величины $\vec{X}$, определяемые следующим образом:

$$m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right],$$

$$m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right] \quad (16.11)$$

(ν_l — целое положительное число, $l = \overline{1, L}$), а также *центральные моменты границ* $\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ и $\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[(X_1 - m_{Sx_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Sx_L})^{\nu_L}\right], \quad (16.12)$$

$$\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[(X_1 - m_{Ix_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Ix_L})^{\nu_L}\right]. \quad (16.13)$$

Смешанные центральные моменты границ второго порядка $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 называются *ковариационными моментами границ*, смешанные начальные моменты границ второго порядка $m_{Sx_1x_2}$ и $m_{Ix_1x_2}$ — *корреляционными моментами границ*, а смешанные центральные моменты границ второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения σ_{Sx_1}, σ_{Sx_2} и σ_{Ix_1}, σ_{Ix_2} границ, — *коэффициентами корреляции границ*:

$$r_{Sx_1x_2} = \frac{\mu_{Sx_1x_2}}{\sigma_{Sx_1}\sigma_{Sx_2}}, \qquad r_{Ix_1x_2} = \frac{\mu_{Ix_1x_2}}{\sigma_{Ix_1}\sigma_{Ix_2}}. \quad (16.14)$$

Ковариационные моменты границ $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$, корреляционные моменты границ $m_{Sx_1x_2}$ и $m_{Ix_1x_2}$ и математические ожидания границ m_{Sx_1}, m_{Sx_2}, m_{Ix_1} и m_{Ix_2} гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\mu_{Sx_1x_2} = m_{Sx_1x_2} - m_{Sx_1}m_{Sx_2}, \quad \mu_{Ix_1x_2} = m_{Ix_1x_2} - m_{Ix_1}m_{Ix_2}, \quad (16.15)$$

аналогичными известному соотношению для случайных величин.

Определение 5. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2 называются *некоррелированными*, если их ковариационные моменты границ равны нулю: $\mu_{Sx_1x_2} = \mu_{Ix_1x_2} = 0$. При этом $r_{Sx_1x_2} = r_{Ix_1x_2} = 0$ и согласно выражению (16.15) корреляционные моменты границ связаны следующими зависимостями с математическими ожиданиями границ:

$$m_{Sx_1x_2} = m_{Sx_1} m_{Sx_2}\,,\; m_{Ix_1x_2} = m_{Ix_1} m_{Ix_2}\,.$$

Определение 6. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2 называются *ортогональными*, если корреляционные моменты границ равны нулю: $m_{Sx_1x_2} = m_{Ix_1x_2} = 0$. При этом ковариационные моменты границ $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$, как видно из выражения (16.15), связаны с математическими ожиданиями границ следующим образом:

$$\mu_{Sx_1x_2} = -m_{Sx_1} m_{Sx_2}\,,\; \mu_{Ix_1x_2} = -m_{Ix_1} m_{Ix_2}\,.$$

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы, то при гауссовских законах распределения границ оси *эллипсов рассеяния* ориентированы вдоль осей координат. Если существует линейная зависимость между этими величинами, то $r_{Sx_1x_2} = r_{Ix_1x_2} = 1$ и эллипсы рассеяния вырождаются в отрезки прямых

$$x_2 = \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} x_1 + \left(m_{Sx_2} - \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} m_{Sx_1} \right),\; x_2 = \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} x_1 + \left(m_{Ix_2} - \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} m_{Ix_1} \right).$$

Нетрудно убедиться, что из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

В векторном случае для средних границ функции распределения можно ввести ряд полезных характеристик: *вектор среднего математических ожиданий границ функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$:

$$\mathrm{M}_0\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = (\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] + \mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right])/2,$$

вектор среднего математических ожиданий границ гиперслучайного вектора $\vec{X}$: $\vec{m}_{0\vec{x}} = (\vec{m}_{S\vec{x}} + \vec{m}_{I\vec{x}})/2$, *вектор среднего дисперсий границ* $\vec{D}_{0\vec{x}} = (\mathrm{M}_0\left[(X_l - m_{0x_l})^2\right],\; l = \overline{1, L})$, *вектор среднего среднеквадратических отклонений границ* $\vec{\sigma}_{0\vec{x}}$, компоненты которого равны корню из компонент дисперсии $\vec{D}_{0\vec{x}}$, *среднее начальных моментов границ:*

$$m_{0\vec{x}\nu_1...\nu_L} = (m_{S\vec{x}\nu_1...\nu_L} + m_{I\vec{x}\nu_1...\nu_L})/2,$$

среднее центральных моментов границ:

$$\mu_{0\vec{x}\nu_1...\nu_L} = (\mu_{S\vec{x}\nu_1...\nu_L} + \mu_{I\vec{x}\nu_1...\nu_L})/2$$

и др.

Для гиперслучайных скалярных величин X_1 и X_2 очевидным образом вводятся *среднее ковариационных моментов границ* $\mu_{0x_1x_2} = (\mu_{Sx_1x_2} + \mu_{Ix_1x_2})/2$ и *среднее корреляционных моментов границ* $m_{0x_1x_2} = (m_{Sx_1x_2} + m_{Ix_1x_2})/2$. Если гиперслучайные величины некоррелированы, то среднее ковариационных моментов границ $\mu_{0x_1x_2}$ равно нулю, если же они ортогональны, то среднее корреляционных моментов $m_{0x_1x_2}$ равно нулю.

Кроме указанных характеристик, используются и другие параметры, аналогичные применяемым при описании скалярных гиперслучайных величин.

16.3. ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ ВЕКТОРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 7. Для L-мерной *гиперслучайной величины* $\vec{X}$ *границы математического ожидания* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ определяются следующим образом:

$$\mathrm{M}_s[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1,...,x_L) f(x_1,...,x_L/g) dx_1...dx_L \, \vec{e}_m,$$

$$\mathrm{M}_i[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1,...,x_L) f(x_1,...,x_L/g) dx_1...dx_L \, \vec{e}_m,$$

где $\varphi_m(x_1,...,x_L)$ — m-я компонента вектора $\vec{\varphi}(x_1,...,x_L/g)$, $\vec{e}_m$ — m-й орт этого вектора.

К таким параметрам относятся, в частности, *границы* L-*мерного математического ожидания* $\vec{m}_{s\vec{x}}$, $\vec{m}_{i\vec{x}}$ *векторной гиперслучайной величины* $\vec{X}$: $\vec{m}_{s\vec{x}} = \mathrm{M}_s[\vec{X}]$, $\vec{m}_{i\vec{x}} = \mathrm{M}_i[\vec{X}]$ и *границы* L-*мерной дисперсии*:

$$\vec{D}_{s\vec{x}} = \mathrm{M}_s[(X_l - m_{x_l/g})^2, \ l = \overline{1,L}], \ \vec{D}_{i\vec{x}} = \mathrm{M}_i[(X_l - m_{x_l/g})^2, \ l = \overline{1,L}],$$

где $m_{x_l/g}$ — l-я компонента вектора условного математического ожидания $\vec{m}_{\vec{x}/g} = \mathrm{M}[\vec{X}/g]$.

С помощью границ дисперсии $\vec{D}_{s\vec{x}}$, $\vec{D}_{i\vec{x}}$ определяются *границы L-мерного среднеквадратического отклонения* $\vec{\sigma}_{s\vec{x}}, \vec{\sigma}_{i\vec{x}}$ как векторы, компоненты которых представляют собой корни из компонент соответствующих границ дисперсии.

Параметрами векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$ являются *границы начальных моментов* $m_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$, $m_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$m_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_s[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}], \quad m_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_i[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}],$$

и *границы центральных моментов* $\mu_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$, $\mu_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{s\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_s[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_i[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}].$$

В двумерном случае $(L = 2)$ *границы смешанного начального момента второго порядка* $m_{sx_1x_2}$ и $m_{ix_1x_2}$ называются *границами корреляционного момента* и обозначаются $K_{sx_1x_2}$ и $K_{ix_1x_2}$, а *границы смешанного центрального момента второго порядка* $\mu_{sx_1x_2}$ и $\mu_{ix_1x_2}$ — *границами ковариационного момента* и обозначаются $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$.

Границы коэффициента корреляции определяются как

$$r_{sx_1x_2} = \sup_{g\in G}\frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}, \quad r_{ix_1x_2} = \inf_{g\in G}\frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}.$$

Границы моментов находятся в результате отбора экстремальных значений из множества значений, соответствующих разным условиям $g \in G$. При этом границам разных моментов соответствуют в общем случае разные условия g. Поэтому в общем случае границы ковариационного момента

$$R_{sx_1x_2} \neq K_{sx_1x_2} - m_{sx_1}m_{sx_2}, \quad R_{ix_1x_2} \neq K_{ix_1x_2} - m_{ix_1}m_{ix_2}.$$

Определение 8. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2 называются *некоррелированными при всех условиях*, если границы их ковариационных моментов $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Определение 9. *Гиперслучайные величины* X_1 и X_2 называются *ортогональными при всех условиях*, если границы их корреляционных моментов $K_{sx_1x_2}$ и $K_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы при всех условиях и условные законы распределения — гауссовские, то оси эллипсов рассеяния ориентированы вдоль осей координат.

Из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 при всех условиях следует их некоррелированность при всех условиях. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях отличаются от понятий некоррелированности и ортогональности, связанных с равенством нулю соответственно ковариационных и корреляционных моментов границ функции распределения.

Границы моментов не используют информацию о границах функции распределения. Поэтому их расчет требует, как правило, меньших вычислительных затрат, чем расчет моментов границ.

Для интегральной характеристики гиперслучайных величин используются также средние границ параметров.

Глава 17

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Введено понятие скалярной гиперслучайной функции. Рассмотрены различные способы ее представления. Для описания использованы условные функции распределения (дающие наиболее полную характеристику гиперслучайной функции), а также границы функции распределения, плотности распределения границ, моменты границ и границы моментов.

17.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *Гиперслучайной функцией* $X(t)$ называется многозначная числовая функция независимого аргумента t, значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$ (где T — область определения аргумента) представляет собой гиперслучайную величину, называемую *сечением*. Множество значений всех сечений гиперслучайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

Определение 2. i-й *реализацией гиперслучайной функции* $X(t)$ (*выборочной функцией*) называется детерминированная функция $x_i(t; g_t)$ (обозначаемая также как $x_i(t) / g_t$), которая для фиксированного опыта $i \in I$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ и конкретным условиям $g_t \in G_t$ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайная функция может быть представлена *множеством случайных функций* $X(t) / g_t$ (обозначаемых также как $X(t; g_t)$): $X(t) = \{X(t) / g_t \in G_t\}$.

Наряду с такими *гиперслучайными функциями общего вида* рассматриваются *гиперслучайные функции частного вида*, для которых условия $g_t \in G_t$ не зависят от t: ($g_t = g$, $G_t = G$).

Реализация $x_i(t; g)$ такой гиперслучайной функции (обозначаемая также как $x_i(t) / g$) представляет собой детерминированную функцию, которая для фиксированного опыта $i \in I$ и фик-

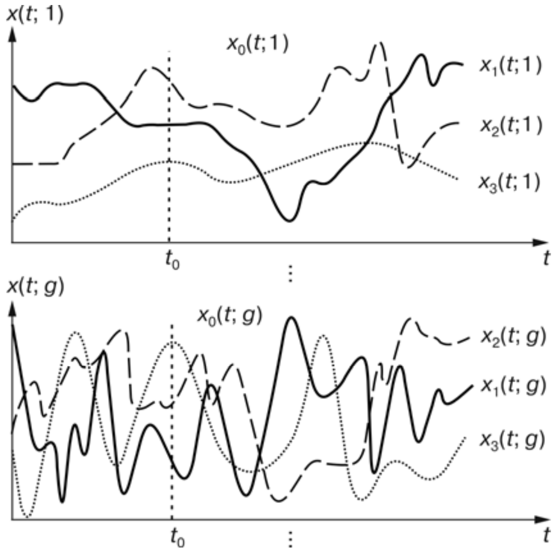


Рис. 17.1. Реализации гиперслучайной функции $X(t)$ частного вида

сированного условия $g \in G$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ одно из значений $x \in S$. Реализации гиперслучайной функции частного вида, когда множество G — счетное, приведены на рис. 17.1.

Такая гиперслучайная функция имеет черты как гиперслучайной величины, так и детерминированной функции: при фиксации значения аргумента t преобразуется в гиперслучайную величину, а при фиксации опыта i и условий g — в детерминированную функцию.

Множество реализаций I гиперслучайной функции может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Размерность N области T определения аргумента t может быть разной. Если $N = 1$, то гиперслучайную функцию $X(t)$ называют *гиперслучайным процессом* и представляют множеством случайных процессов $X(t)/g_t$. Если $N > 1$, то аргумент t — векторная величина. В этом случае функция $X(t)$ называется *гиперслучайным полем*. Такую гиперслучайную функцию можно представить множеством случайных полей $X(t)/g_t$.

Если пространство состояний одномерно, то гиперслучайная функция — *скалярная*, если размерность пространства состояний больше единицы, то гиперслучайная функция — векторная. В первом случае гиперслучайная функция представляется множеством скалярных случайных функций, во втором — множеством векторных случайных функций.

Если пространство состояний вещественное, то гиперслучайная функция описывается множеством вещественных случайных функций, если оно комплексное, то гиперслучайная функция описывается множеством комплексных случайных функций.

17.2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Скалярную гиперслучайную функцию $X(t)$ можно представить совокупностью ее *сечений*.

Для описания используются *условные функции распределения*:

$$F(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}_{\vec{t}}) = P\{X(t_1) < x_1, \ldots, X(t_L) < x_L\ /\ g_{t_1}, \ldots, g_{t_L}\}$$

(обозначаемые также как $F(\vec{x};\vec{t};\vec{g}_{\vec{t}})$), где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_L)$ — L-мерный вектор значений гиперслучайной функции $X(t)$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_L$, образующие L-мерный вектор времени $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_L)$; $\vec{g}_{\vec{t}} = (g_{t_1}, \ldots, g_{t_L})$ — вектор условий ($\vec{g}_{\vec{t}} \in \vec{G}$), соответствующий вектору времени $\vec{t}$; $P\{A\ /\ \vec{g}_{\vec{t}}\}$ — вероятность выполнения события A в условиях $\vec{g}_{\vec{t}}$, а также *условные плотности распределения:*

$$f(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}_{\vec{t}}) = \frac{\partial^L F(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}_{\vec{t}})}{\partial x_1 \ldots \partial x_L}$$

(обозначаемые также как $f(\vec{x};\vec{t};\vec{g}_{\vec{t}})$), *условные характеристические функции:*

$$Q(j\vec{\omega};\vec{t}\ /\ \vec{g}_{\vec{t}}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}_{\vec{t}}) \exp(j\vec{\omega}\,\vec{x})d\,\vec{x}$$

и др.

Кроме того, применяются *центральные* и *нецентральные моменты случайных функций* $X(t)/\ g_t$ $(g_t \in G_t)$, в частности, *условные математические ожидания* $m_{x/g_t}(t) = \mathrm{M}\,[X(t)/\ g_t]$, *условные дисперсии:*

$$D_{x/g_t}(t) = \mathrm{D}\,[X(t)/\ g_t] = \mathrm{M}\,[(X(t)/\ g_t - m_{x/g_t}(t))^2]\,,$$

условные корреляционные моменты:

$$K_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1)/g_{t_1})(X(t_2)/g_{t_2})],$$

условные ковариационные моменты:

$$R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1)/g - m_{x/g_{t_1}}(t_1))(X(t_2)/g_{t_2} - m_{x/g_{t_2}}(t_2))]$$

и пр.

Для описания гиперслучайной функции $X(t)$ используют также аналоги перечисленных характеристик и параметров границ.

К числу вероятностных характеристик относятся *границы функции распределения* $F_S(\vec{x};\vec{t})$, $F_I(\vec{x};\vec{t})$, *плотности распределения границ* $f_S(\vec{x};\vec{t})$, $f_I(\vec{x};\vec{t})$ и *характеристические функции границ* $Q_S(j\vec{\omega};\vec{t})$, $Q_I(j\vec{\omega};\vec{t})$, определяемые соответственно следующим образом:

$$F_S(\vec{x};\vec{t}) = \sup_{\vec{g}_{\vec{t}} \in \vec{G}} P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_M) < x_M \;/\; \vec{g}_{\vec{t}}\},$$

$$F_I(\vec{x};\vec{t}) = \inf_{\vec{g}_{\vec{t}} \in \vec{G}} P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_M) < x_M \;/\; \vec{g}_{\vec{t}}\}, \qquad (17.1)$$

$$f_S(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_S(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \quad f_I(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_I(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \qquad (17.2)$$

$$Q_S(j\vec{\omega};\vec{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x};\vec{t}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) d\vec{x},$$

$$Q_I(j\vec{\omega};\vec{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x};\vec{t}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) d\vec{x}. \qquad (17.3)$$

Ширина зоны неопределенности определяется функцией

$$\Delta F(\vec{x};\vec{t}) = F_S(\vec{x};\vec{t}) - F_I(\vec{x};\vec{t}).$$

Для случайных функций эта функция равна нулю. При полной *неопределенности* $\Delta F(\vec{x};\vec{t}) = 1$.

Определение 3. *Сечения* t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ называются *независимыми,* если двумерные плотности распределения границ факторизуются:

$$f_S(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_S(x_1; t_1) f_S(x_2; t_2),$$

$$f_I(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_I(x_1; t_1) f_I(x_2; t_2). \qquad (17.4)$$

Определение 4. *Сечения* $t_1, ..., t_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ называются *независимыми в совокупности,* если независимы в совокупности значения векторной гиперслучайной величины, соответствующие этим сечениям, т. е. возможно следующее представление плотностей распределения границ:

$$f_S(x_1, ..., x_L; t_1, ..., t_L) = \prod_{l=1}^{L} f_S(x_l; t_l),$$

$$f_I(x_1, ..., x_L; t_1, ..., t_L) = \prod_{l=1}^{L} f_I(x_l; t_l). \qquad (17.5)$$

Как и в случае случайных функций, из независимости в совокупности сечений гиперслучайной функции следует *попарная их независимость. Обратное же утверждение неверно.*

17.3. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ГРАНИЦ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Математические ожидания границ функции $\varphi(X(t_1), ..., X(t_L))$ *значений гиперслучайной функции* $X(t)$ в L точках $X_1 = X(t_1), ...$ $..., X_L = X(t_L)$ описываются выражениями

$$\mathrm{M}_S[\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_L) f_S(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) dx_1 \ldots dx_L,$$

$$\mathrm{M}_I[\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_L) f_I(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) dx_1 \ldots dx_L. \qquad (17.6)$$

Для характеристики гиперслучайной функции $X(t)$ используют *моментные функции границ.*

Определение 5. *Начальными* L-мерными *моментными функциями границ порядка* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ называются математические ожидания границ функции $\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L)) = X^{\nu_1}(t_1) \ldots X^{\nu_L}(t_L)$:

$$m_{S\nu_1 \ldots \nu_L}(t_1, \ldots, t_L) = \mathrm{M}_S[X^{\nu_1}(t_1) \ldots X^{\nu_L}(t_L)] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1} \ldots x_L^{\nu_L} f_S(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\,dx_1 \ldots dx_L,$$

$$m_{I\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_I[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1} \ldots x_L^{\nu_L} f_I(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\,dx_1 \ldots dx_L, \qquad (17.7)$$

где ν_l — целое положительное число $(l = \overline{1, L})$.

Частным случаем этих функций являются *математические ожидания границ гиперслучайной функции* $X(t)$, определяемые как

$$m_{Sx}(t) = \mathrm{M}_S[X(t)],\ m_{Ix}(t) = \mathrm{M}_I[X(t)].$$

Определение 6. *Центральными* L-мерными *моментными функциями границ порядка* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ называются следующие функции:

$$\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))^{\nu_1} \ldots (X(t_L) - m_{Sx}(t_L))^{\nu_L}],$$

$$\mu_{I\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))^{\nu_1} \ldots (X(t_L) - m_{Ix}(t_L))^{\nu_L}]. \qquad (17.8)$$

Частным случаем этих функций являются *дисперсии границ* $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$, определяемые как

$$D_{Sx}(t) = \mathrm{D}_S[X(t)] = \mathrm{M}_S[(X(t) - m_{Sx}(t))^2],$$

$$D_{Ix}(t) = \mathrm{D}_I[X(t)] = \mathrm{M}_I[(X(t) - m_{Ix}(t))^2]. \qquad (17.9)$$

Математические ожидания границ $m_{Sx}(t)$, $m_{Ix}(t)$ характеризуют средние значения гиперслучайной функции $X(t)$, рассчитанные для верхней и нижней границ функции распределения, а дисперсии границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$ и *среднеквадратические отклонения границ*, определяемые как

$$\sigma_{Sx}(t) = \sqrt{D_{Sx}(t)}\,,\ \sigma_{Ix}(t) = \sqrt{D_{Ix}(t)}\,,$$

характеризуют степень разброса этой гиперслучайной функции относительно соответствующих математических ожиданий $m_{Sx}(t)$ и $m_{Ix}(t)$.

Нетрудно убедиться, что $m_{Sx}(t) \le m_{Ix}(t)$, а соотношение между $D_{Sx}(t)$ и $D_{Ix}(t)$ может быть любым.

Определение 7. *Ковариационными функциями границ гиперслучайной функции* называются функции

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))(X(t_2) - m_{Sx}(t_2))],$$

$$R_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))(X(t_2) - m_{Ix}(t_2))], \qquad (17.10)$$

а *корреляционными функциями границ* — функции

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)],$$

$$K_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)]. \qquad (17.11)$$

Заметим, что выражения (17.10) и (17.11) являются частными случаями выражений (17.8), (17.7).

Ковариационные и корреляционные функции границ связаны между собой следующими соотношениями:

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Sx}(t_1,t_2) - m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2),$$

$$R_{Ix}(t_1,t_2) = K_{Ix}(t_1,t_2) - m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2). \qquad (17.12)$$

Ковариационные и корреляционные функции границ, а также *нормированные ковариационные функции границ*

$$r_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1,t_2)}{\sigma_{Sx}(t_1)\sigma_{Sx}(t_2)}, \quad r_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ix}(t_1,t_2)}{\sigma_{Ix}(t_1)\sigma_{Ix}(t_2)} \qquad (17.13)$$

характеризуют зависимость сечений гиперслучайной функции.

Определение 8. *Сечения* t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ называются *некоррелированными*, если для этих сечений *ковариационные функции границ* $R_{Sx}(t_1,t_2) = R_{Ix}(t_1,t_2) = 0$.

При этом, согласно выражениям (17.12)

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2), \; K_{Ix}(t_1,t_2) = m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2).$$

Определение 9. *Сечения* t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ называются *ортогональными*, если для них корреляционные функции границ $K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Ix}(t_1,t_2) = 0$.

При этом, согласно выражениям (17.12)

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = -m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2), \; R_{Ix}(t_1,t_2) = -m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2).$$

Понятия независимости, некоррелированности и ортогональности сечений гиперслучайной функции аналогичны таким же понятиям случайной функции.

Если сечения гиперслучайной функции коррелированы, то они зависимы. Обратное утверждение неверно. Если сечения независимы, то они некоррелированы. Если сечения ортогональны, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми, как коррелированными, так и некоррелированными. Если математические ожидания верхней границы одного из сечений и нижней границы другого сечения равны нулю, то из ортогональности сечений следует их некоррелированность, а из некоррелированности — их ортогональность.

17.4. ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Для описания гиперслучайных функций используются также другие характеристики, аналогичные рассмотренным для гиперслучайных величин.

Основой этих характеристик являются *границы математического ожидания функции* $\varphi(\vec{X};\vec{t}\,) = \varphi(X_1,...,X_L;t_1,...,t_L)$ *гиперслучайной функции* $X(t)$:

$$\mathrm{M}_s[\varphi(\vec{X};\vec{t}\,] = \sup_{\vec{g}_{\vec{t}}\in\vec{G}} \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\vec{x};\vec{t}\,)f(\vec{x};\vec{t}\,/\,\vec{g}_{\vec{t}})d\vec{x},$$

$$\mathrm{M}_i[\varphi(\vec{X};\vec{t}\,)] = \inf_{\vec{g}_{\vec{t}}\in\vec{G}} \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\vec{x};\vec{t}\,)f(\vec{x};\vec{t}\,/\,\vec{g}_{\vec{t}})d\vec{x}.$$

Частными случаями являются *границы математического ожидания:*

$$m_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[X(t)],\ m_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[X(t)],$$

границы дисперсии:

$$D_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[(X(t) - m_{x/g_t}(t))^2],$$

$$D_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[(X(t) - m_{x/g_t}(t))^2],$$

где $m_{x/g_t}(t) = \mathrm{M}[X(t)/g_t]$ — значение математического ожидания в условиях $g_t \in G_t$, а также *границы начальных моментов:*

$$m_{s\nu_1...\nu_L}(t_1,...,t_L) = \mathrm{M}_s[X^{\nu_1}(t_1)...X^{\nu_L}(t_L)],$$

$$m_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) = \mathrm{M}_i[X^{\nu_1}(t_1) \dots X^{\nu_L}(t_L)]$$

порядка $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$ и *границы центральных моментов*:

$$\mu_{s\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) = \mathrm{M}_s[(X(t_1) - m_{x/g_{t_1}}(t_1))^{\nu_1} \dots (X(t_L) - m_{x/g_{t_L}}(t_L))^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) = \mathrm{M}_i[(X(t_1) - m_{x/g_{t_1}}(t_1))^{\nu_1} \dots (X(t_L) - m_{x/g_{t_L}}(t_L))^{\nu_L}]$$

порядка $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$.

Определение 10. Границы смешанного начального момента второго порядка $m_{s11}(t_1, t_2)$, $m_{i11}(t_1, t_2)$ называются *границами корреляционной функции* и обозначаются $K_{sx}(t_1, t_2)$, $K_{ix}(t_1, t_2)$, границы смешанного центрального момента второго порядка — *границами ковариационной функции* и обозначаются $R_{sx}(t_1, t_2)$, $R_{ix}(t_1, t_2)$.

Из-за того, что границы корреляционной функции, границы ковариационной функции и границы математического ожидания могут соответствовать различным условиям $\vec{g}$, в общем случае

$$R_{sx}(t_1, t_2) \neq K_{sx}(t_1, t_2) - m_{sx}(t_1) m_{sx}(t_2),$$

$$R_{ix}(t_1, t_2) \neq K_{ix}(t_1, t_2) - m_{ix}(t_1) m_{ix}(t_2).$$

Определение 11. *Отсчеты гиперслучайной функции* $X(t)$ в моменты t_1, t_2 называются *некоррелированными при всех условиях,* если $R_{sx}(t_1, t_2) = R_{ix}(t_1, t_2) = 0$, и *ортогональными при всех условиях,* если $K_{sx}(t_1, t_2) = K_{ix}(t_1, t_2) = 0$.

Заметим, что понятия некоррелированности и ортогональности отсчетов гиперслучайной функции отличаются от приведенных здесь понятий.

Из некоррелированности и ортогональности отсчетов не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность при всех условиях. В общем случае и из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Последнее связано с тем, что границы функции распределения $F_S(\vec{x}; \vec{t})$, $F_I(\vec{x}; \vec{t})$ не всегда принадлежат множеству условных функций распределения $F(\vec{x}; \vec{t} / \vec{g})$, $\vec{g} \in \vec{G}$.

Если же границы функции распределения все же принадлежат этому множеству, то из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Обратное утверждение неверно.

Следует обратить внимание, что множество границ всех моментов неоднозначно определяет границы распределения.

Заметим, что рассмотренные способы описания скалярной гиперслучайной функции обобщаются на случай векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_H(t))$, компоненты которой представляют собой скалярные гиперслучайные функции. Способы описания векторных гиперслучайных функций приведены в монографии [Горбань, 2011 (1)].

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Изложены основы математического анализа случайных функций: определены понятия сходимости последовательности случайных величин и функций, производной и интеграла случайной функции. Введены понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

18.1. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также непрерывных, дифференцируемых и интегрируемых гиперслучайных функций. Прежде, чем переходить к этим понятиям, напомним основные определения аналогичных понятий для случайных явлений (см., например, [Гнеденко, 1988, Анго, 1967, Горбань, 2003]).

Математики используют четыре типа сходимости для последовательностей случайных величин и случайных функций.

Пусть имеется последовательность случайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и случайная величина X. Для всех $X_1, ..., X_N$ и X определены функции распределения $F_1(x), \ldots, F_N(x)$ и $F(x)$. Тогда последовательность X:

1) сходится к X *по распределению* (в смысле Бернулли), если в каждой точке x, где $F(x)$ непрерывна, $F_N(x) \to F(x)$ при $N \to \infty$;

2) сходится к X *по вероятности*, если $P\{|X_N - X| > \varepsilon\} \to 0$ при любом $\varepsilon > 0$ и $N \to \infty$;

3) сходится к X *в среднеквадратическом*, если $\mathrm{M}[|X_N - X|^2] \to 0$ при $N \to \infty$. При такой сходимости пишут $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N = X$;

4) сходится к X *с вероятностью единица* (*почти наверно*), если $P\{X_N \to X\} = 1$ при $N \to \infty$. При такой сходимости пишут $\lim\limits_{N\to\infty} X_N = X$.

Наиболее слабая сходимость — по распределению. Более сильная сходимость — по вероятности. Еще более сильная сходимость — в среднеквадратическом и с вероятностью единица. При этом следует иметь в виду, что некоторые последовательности сходятся в среднеквадратическом, но не сходятся с вероятностью единица; другие же — сходятся с вероятностью единица, но не сходятся в среднеквадратическом.

18.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Понятие сходимости последовательности случайных величин X распространяется на последовательности случайных функций

$$\{X_1(t), ..., X_N(t)\} \ (t \in T).$$

Последовательность случайных функций $\{X_1(t), ..., X_N(t)\}$ ($t \in T$) *сходится к* $X(t)$ *в среднеквадратическом*, если для всех $t \in T$ $\mathrm{M}[|X_N(t) - X(t)|^2] \to 0$ при $N \to \infty$. При этом пишут $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, X_N(t) = X(t)$.

Последовательность случайных функций $\{X_1(t), ..., X_N(t)\}$ ($t \in T$) *сходится к* $X(t)$ *с вероятностью единица* (*почти наверное*), если для всех $t \in T$ $P\{X_N(t) \to X(t)\} = 1$ при $N \to \infty$. При этом пишут $\lim\limits_{N\to\infty} X_N(t) = X(t)$.

Сходимость последовательности случайных функций по распределению и по вероятности определяется аналогично сходимости последовательности случайных величин.

Случайную функцию $X(t)$ ($t \in T$) называют *случайной функцией* (*процессом*) *второго порядка*, если для всех $t \in T$ математическое ожидание ее квадрата ограничено: $\mathrm{M}[X^2(t)] < \infty$.

Для случайных функций второго порядка существуют понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

18.3. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Случайная функция второго порядка называется непрерывной в среднеквадратическом в точке t, если

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t+\Delta t) = X(t),$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \mathrm{M}[|X(t+\Delta t) - X(t)|^{2}] = 0$.

Теорема 1. Случайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна в среднеквадратическом в точке t тогда и только тогда, когда ее математическое ожидание $m_x(t)$ непрерывно в точке t и ковариационная функция $R_x(t_1, t_2)$ непрерывна в точке $t = t_1 = t_2$.

Случайная функция $X(t)$ второго порядка называется *дифференцируемой в среднеквадратическом* в точке t, если существует функция

$$X'(t) = \underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

При этом случайная функция $X'(t)$ называется *производной* случайной функции $X(t)$.

Теорема 2. Случайная функция $X(t)$ второго порядка в точке t дифференцируема в среднеквадратическом тогда и только тогда, когда ее математическое ожидание $m_x(t)$ дифференцируемо в точке t и в точке $t_1 = t_2$ существует смешанная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_x(t_1, t_2)$ от ковариационной функции $R_x(t_1, t_2)$.

Случайная функция $X(t)$ второго порядка называется *интегрируемой* на интервале $T(\tau)$, если при произвольном разбиении интервала $T(\tau)$ на N интервалов $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ независимо от выбора точек t_n существует функция

$$Y(\tau) = \lim_{\max \Delta t_n \to 0} \sum_n X(t_n)\,\Delta t_n = \int\limits_{T(\tau)} X(t)\,dt.$$

При этом случайная функция $Y(\tau)$ называется *интегралом* случайной функции $X(t)$.

Доказано, что случайная функция $X(t)$ второго порядка с математическим ожиданием $m_x(t)$ и ковариационной функции $R_x(t_1,t_2)$ интегрируема, если существуют интегралы $\int\limits_{T(\tau)} m_x(t)\,dt$, $\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_x(t_1,t_2)dt_1dt_2$. При этом

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)} X(t)\,dt\right] = \int\limits_{T(\tau)} m_x(t)\,dt\,,$$

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} X(t_1)X(t_2)\,dt_1dt_2\right] =$$

$$= \int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_x(t_1,t_2)dt_1dt_2 + \left[\int\limits_{T(\tau)} m_x(t)dt\right]^2.$$

18.4. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В предыдущих главах при рассмотрении гиперслучайных моделей не накладывались ограничения на множество условий G. Далее нам потребуется конкретизировать эту математическую модель таким образом, чтобы можно было бы определить понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций. Будем рассматривать G как *метрическое топологическое пространство с определенной метрикой.*

Вводимые понятия основаны на сходимости случайных величин и функций.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1,...,X_N\}$ и гиперслучайная величина X. Для всех $X_1,...,X_N$ и X определены условные функции распределения $F_{x_1/g_1}(x)$,... ..., $F_{x_N/g_N}(x)$ и $F_{x/g}(x)$ для всех условий $g_1,\dots,g_N \in G$, $g \in G$.

Тогда последовательность X *в обобщенном смысле*

1) *сходится* (в смысле Бернулли) *к* X *по функции распределения* ($\tilde{F}_{x_N}(x) \to \tilde{F}_x(x)$), если в каждой точке x, где $F_{x/g}(x)$ непрерывна, для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$F_{x_N/g_N}(x) \to F_{x/g}(x)\,, \tag{18.1}$$

т. е. если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин $X_1 / g_1, ..., X_N / g_N$ сходится по функции распределения к случайной величине X / g;

2) *сходится к* X *в среднеквадратическом* $(\mathrm{M}[|X_N - X|^2] \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условные математические ожидания

$$\mathrm{M}[|X_N / g_N - X / g|^2] \to 0, \tag{18.2}$$

т. е. если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин $X_1 / g_1, ..., X_N / g_N$ сходится к случайной величине X / g в среднеквадратическом. При такой сходимости будем писать $\underset{\substack{N \to \infty \\ g_N \to g}}{\mathrm{l.i.m.}} X_N / g_N = X / g$ или

$$\underset{N \to \infty}{\mathrm{L.I.M.}} X_N = X. \tag{18.3}$$

Отметим, что в данном случае математическое ожидание рассчитывается по двумерному распределению случайных величин X_N / g_N и X / g;

3) *сходится к* X *почти наверное* (*с вероятностью единица* — $P(X_N \to X) = 1$), если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условная вероятность

$$P(X_N / g_N \to X / g) = 1, \tag{18.4}$$

т. е. если $\forall g \in G$ случайная последовательность $X_1 / g_1, ..., X_N / g_N$ сходится *с вероятностью единица* к случайной величине X / g. При такой сходимости будем писать

$$\underset{N \to \infty}{\mathrm{LIM}} X_N = X; \tag{18.5}$$

4) *сходится к* X *по вероятности* $(P(|X_N - X| > \varepsilon) \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$P(|X_N / g_N - X / g| > \varepsilon) \to 0, \tag{18.6}$$

т. е. если $\forall g \in G$ случайная последовательность $X_1 / g_1, ...$ $..., X_N / g_N$ сходится по вероятности к случайной величине X / g.

Заметим, что в частном случае, когда X представляет собой множество чисел, описываемых функциями распределения в виде

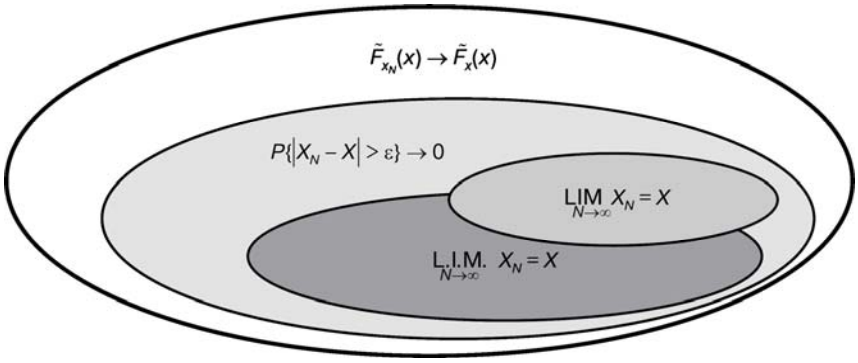


Рис. 18.1. Соотношения между разными типами сходимости

функций единичного скачка, можно трактовать рассматриваемые варианты сходимости как варианты *сходимости последовательности гиперслучайных величин к этому множеству чисел*, а в другом частном случае, когда это множество представляет собой интервал, — как варианты сходимости последовательности гиперслучайных величин к этому интервалу.

Наиболее слабая сходимость последовательности гиперслучайных величин — сходимость по распределению. Более сильная сходимость — по вероятности. Еще более сильная сходимость — в среднеквадратическом и с вероятностью единица. Следует иметь в виду, что некоторые последовательности сходятся в среднеквадратическом, но не сходятся с вероятностью единица; другие же — сходятся с вероятностью единица, но не сходятся в среднеквадратическом. Эти положения прямо следуют из аналогичных положений для последовательности случайных величин. Соотношения между разными типами сходимости условно изображены на рис. 18.1.

18.5. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Сходимости последовательности гиперслучайных функций определяются аналогично, в частности, используемые в дальнейшем сходимость в среднеквадратическом и сходимость почти наверное.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных функций

$$\mathrm{X}(t) = \{X_1(t), ..., X_N(t)\}$$

и гиперслучайная функция $X(t)$ $(t \in T)$, для которых определены условные функции распределения:

$$F_{x_1/g_1}(x;t),\ldots,F_{x_N/g_N}(x;t),\ F_{x/g}(x;t).$$

Тогда последовательность $\mathrm{X}(t)$ *в обобщенном смысле*

1) *сходится к* $X(t)$ *в среднеквадратическом*, если для всех $t \in T$ и $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$\mathrm{M}[|X_N(t)/g_N - X(t)/g|^2] \to 0, \tag{18.7}$$

т. е. $\underset{N\to\infty}{\mathrm{L.I.M.}}\, X_N(t) = X(t)$;

2) *сходится к* $X(t)$ *почти наверное* (*с вероятностью единица*), если для всех $t \in T$ и $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$P(X_N(t)/g_N \to X(t)/g) = 1, \tag{18.8}$$

т. е. $\underset{N\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, X_N(t) = X(t)$.

Заметим, что в приведенных определениях сходимости последовательностей гиперслучайных величин и функций фигурирует условие $g_N \to g$. Это означает, что статистические условия последовательности и объекта, к которому эта последовательность стремится, могут различаться.

Если $g_1 = \ldots = g_N = g$, то для всех рассмотренных типов сходимости условие $g_N \to g$ отсутствует. При этом в выражениях (18.1), (18.2), (18.4), (18.6)—(18.8) условие g_N заменяется на условие g.

На основе сходимости последовательности гиперслучайных функций можно ввести понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

18.6. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Гиперслучайную функцию $X(t)$ $(t \in T)$ называют *гиперслучайной функцией второго порядка*, если математическое ожидание нижней границы квадрата этой функции ограничено для всех $t \in T$: $\mathrm{M}_I[X^2(t)] < \infty$.

Гиперслучайную функцию второго порядка $X(t) = \{X(t) / g_t \in G\}$ называют *непрерывной в среднеквадратическом* в точке t, если

$$\underset{\Delta t \to 0}{\text{L.I.M.}}\, X(t + \Delta t) = X(t),$$

т. е. если для всех условий $g_t, g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \text{M}[|X(t + \Delta t) / g_{t+\Delta t} - X(t) / g_t|^{\,2}] = 0.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка называют *дифференцируемой в среднеквадратическом* в точке t, если существует функция $X'(t)$ (*производная*), описываемая следующим выражением:

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{L.I.M.}} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

т. е. если для всех условий $g_t, g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \text{M}\left[\left|\frac{X(t + \Delta t) / g_{t+\Delta t} - X(t) / g_t}{\Delta t} - X'(t) / g_t\right|^2\right] = 0.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка называют *интегрируемой на интервале* $T(\tau)$, если при произвольном разбиении интервала $T(\tau)$ на N интервалов $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ независимо от выбора точек t_n существует функция $Y(\tau)$ (*определенный интеграл от гиперслучайной функции* $X(t)$), определяемая выражением

$$Y(\tau) = \underset{\substack{\max \Delta t_n \to 0 \\ g_{t_n} \to g_t}}{\text{L.I.M.}} \sum_n X(t_n)\, \Delta t_n = \int_{T(\tau)} X(t)\, dt,$$

т. е. если для всех $g_{t_n}, g_t \in G$ $(n = \overline{1, N})$

$$\lim_{\substack{\max \Delta t_n \to 0 \\ g_{t_n} \to g_t}} \text{M}\left[\left|\sum_n (X(t_n) / g_{t_n})\, \Delta t_n - \int_{T(\tau)} (X(t) / g_t) dt\right|^2\right] = 0.$$

Иначе, гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна, дифференцируема или интегрируема, если непрерывны условия и соответственно непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы составляющие случайные функции $X(t) / g_t$ для всех $g_t \in G$.

Заметим, что на основании известных теорем для случайных функций (см. параграф 18.3) справедливы следующие утверждения:

1) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна в среднеквадратическом в точке t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ непрерывны в точке t, а ковариационные функции $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ этих случайных функций непрерывны в точке $t=t_1=t_2$;

2) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка дифференцируема в точке t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ дифференцируемы в точке t и в точке $t_1=t_2$ существуют смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ от ковариационных функций $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$;

3) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка с математическими ожиданиями $m_{x/g_t}(t)$ и ковариационными функциями $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ интегрируема, если существуют интегралы $\int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)dt$, $\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)dt_1dt_2$. При этом

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)} X(t)/g_t\,dt\right] = \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)\,dt\,,$$

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} (X(t_1)/g_{t_1})(X(t_2)/g_{t_2})\,dt_1dt_2\right] =$$

$$= \int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)\,dt_1dt_2 + \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_1}}(t)\,dt \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_2}}(t)\,dt\,.$$

Понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости построены в данном случае на основе сходимости гиперслучайной последовательности в среднеквадратическом. Аналогично можно определить эти же понятия на основе сходимости по вероятности и с вероятностью единица. Определение этих понятий на основе сходимости по функции распределения вряд ли имеет смысл из-за неопределенного характера сходимости в смысле Бернулли [Анго, 1967].

СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Известные для случайных функций понятия стационарности и эргодичности обобщены на гиперслучайные функции. Рассмотрены спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций. Приведены свойства стационарных и эргодических гиперслучайных функций.

19.1. СТАЦИОНАРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Известные для случайных функций понятия стационарности и эргодичности допускают обобщение на гиперслучайные функции.

Применительно к гиперслучайным функциям различают стационарность в узком и широком смыслах для всех условий, а также просто стационарность в узком и широком смыслах.

Определение 1. *Гиперслучайная функция* $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$, где $X(t)/g$ — случайная функция в условиях g, называется *стационарной в узком смысле при всех условиях* $g \in G$, если при всех g ее случайные составляющие $X(t)/g$ — функции, стационарные в узком смысле (их L-мерные функции распределения при любом L инвариантны к сдвигу вдоль оси t).

Одномерные условные вероятностные характеристики стационарной при всех условиях гиперслучайной функции не зависят от времени.

Определение 2. *Гиперслучайная функция* $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ называется *стационарной в широком смысле при всех условиях* $g \in G$, если все случайные функции $X(t)/g$ стационарны в широком смысле (при любом g условное математическое ожидание $m_{x/g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t/g)dx$ не зависит от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$), а условная корреляционная функция

$$K_{x/g}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)dx_1dx_2$$

зависит лишь от разности значений аргумента t и условия g:

$$K_{x/g}(t_1,t_2)=K_{x/g}(\tau)).$$

Отметим, что при этом условная ковариационная функция

$$R_{x/g}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_{x/g})(x_2-m_{x/g})\times$$
$$\times f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)dx_1dx_2$$

также зависит только от τ и g.

Границы математического ожидания

$$m_{sx}(t)=\sup_{g\in G}m_{x/g}(t),\quad m_{ix}(t)=\inf_{g\in G}m_{x/g}(t)$$

стационарной в широком смысле при всех условиях g гиперслучайной функции не зависят от времени t, т. е. $m_{sx}(t)=m_{sx}$, $m_{ix}(t)=m_{ix}$, а границы корреляционной функции

$$K_{sx}(\tau)=\sup_{g\in G}K_{x/g}(\tau),\quad K_{ix}(\tau)=\inf_{g\in G}K_{x/g}(\tau)$$

и границы ковариационной функции

$$R_{sx}(\tau)=\sup_{g\in G}R_{x/g}(\tau),\quad R_{ix}(\tau)=\inf_{g\in G}R_{x/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Определение 3. *Гиперслучайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ называются *совместно стационарно связанными при всех условиях* g, если условные математические ожидания этих функций $m_{x/g}(t)$, $m_{y/g}(t)$ не зависят от аргумента t ($m_{x/g}(t)=m_{x/g}$, $m_{y/g}(t)=$ $=m_{y/g}$), а условная взаимно-корреляционная функция

$$K_{xy/g}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y;t_1,t_2/g)dxdy$$

инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$K_{xy/g}(t_1,t_2)=K_{xy/g}(\tau).$$

При этом условная взаимно-ковариационная функция

$$R_{xy/g}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x/g})(y-m_{y/g})\times$$
$$\times f(x,y;t_1,t_2/g)dxdy$$

также инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$R_{xy/g}(t_1,t_2)=R_{xy/g}(\tau).$$

Нетрудно убедиться, что границы взаимно-корреляционной функции

$$K_{sxy}(\tau)=\sup_{g\in G}K_{xy/g}(\tau),\quad K_{ixy}(\tau)=\inf_{g\in G}K_{xy/g}(\tau)$$

и границы взаимно-ковариационной функции

$$R_{sxy}(\tau)=\sup_{g\in G}R_{xy/g}(\tau),\quad R_{ixy}(\tau)=\inf_{g\in G}R_{xy/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Определение 4. *Гиперслучайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в узком смысле* (*строго*), если границы ее L-мерных распределений при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2-t_1,\ldots,t_L-t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Гиперслучайные функции, не удовлетворяющие этому условию, называются *нестационарными в узком смысле.*

Свойства стационарной гиперслучайной функции подобны свойствам стационарной случайной функции: границы многомерной функции распределения, многомерные плотности распределения границ, многомерные характеристические функции границ не зависят от смещения по t. Кроме того, перечисленные одномерные характеристики не зависят от аргумента t, а двумерные характеристики зависят от разности $\tau=t_2-t_1$ значений аргумента t, т. е.

$$f_{Sx}(x;t)=f_{Sx}(x),\quad f_{Ix}(x;t)=f_{Ix}(x),$$
$$f_{Sx}(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_{Sx}(x_1,x_2;\tau),$$
$$f_{Ix}(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_{Ix}(x_1,x_2;\tau).$$

Моментные функции границ стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ обладают следующими свойствами: математические ожидания границ и дисперсии границ постоянны ($m_{Sx}(t)=m_{Sx}$,

$m_{Ix}(t) = m_{Ix}$, $D_{Sx}(t) = D_{Sx}$, $D_{Ix}(t) = D_{Ix}$), а корреляционные функции границ

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)], \; K_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)],$$

ковариационные функции границ

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx})(X(t_2) - m_{Sx})],$$

$$R_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix})(X(t_2) - m_{Ix})]$$

и нормированные ковариационные функции границ

$$r_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}, \; r_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ix}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Ix}(t_1)D_{Ix}(t_2)}}$$

не зависят от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси t:

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Sx}(\tau), \; K_{Ix}(t_1,t_2) = K_{Ix}(\tau),$$

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = R_{Sx}(\tau), \; R_{Ix}(t_1,t_2) = R_{Ix}(\tau),$$

$$r_{Sx}(\tau) = R_{Sx}(\tau) / D_{Sx}, \; r_{Ix}(\tau) = R_{Ix}(\tau) / D_{Ix}.$$

Определение 5. *Гиперслучайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если математические ожидания ее границ постоянны ($m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix}$), а корреляционные функции границ зависят только от разности значений аргумента t:

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)] = K_{Sx}(\tau),$$

$$K_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)] = K_{Ix}(\tau).$$

Гиперслучайные функции, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение 6. Две *гиперслучайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ называются *совместно стационарно связанными в широком смысле*, если математические ожидания их границ постоянны, а их взаимные корреляционные функции границ инвариантны к смещению вдоль оси t:

$$K_{Sxy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Sxy}(\tau),$$

$$K_{Ixy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Ixy}(\tau).$$

Отметим, что стационарность гиперслучайных функций в широком смысле не гарантирует их совместную стационарную связанность в широком смысле.

Ковариационные функции границ и нормированные ковариационные функции границ вещественных стационарных гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ обладают следующими свойствами:

- $|R_{Sx}(\tau)| \le D_{Sx}$, $|r_{Sx}(\tau)| \le 1$, $|R_{Ix}(\tau)| \le D_{Ix}$, $|r_{Ix}(\tau)| \le 1$;
- максимумы ковариационных функций границ и нормированных ковариационных функций границ гиперслучайной функции имеют место при $\tau = 0$;
- функции $R_{Sx}(\tau)$, $R_{Ix}(\tau)$, $r_{Sx}(\tau)$, $r_{Ix}(\tau)$ — четные;
- $R_{Sxy}(\tau) = R_{Syx}(-\tau)$, $R_{Ixy}(\tau) = R_{Iyx}(-\tau)$,

  $r_{Sxy}(\tau) = r_{Syx}(-\tau)$, $r_{Ixy}(\tau) = r_{Iyx}(-\tau)$,

где $R_{Sxy}(\tau)$, $R_{Ixy}(\tau)$ — взаимные ковариационные функции границ, $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$ — нормированные взаимные ковариационные функции границ: $r_{Sxy}(\tau) = R_{Sxy}(\tau)/D_{Sxy}$, $r_{Ixy}(\tau) = R_{Ixy}(\tau)/D_{Ixy}$, $D_{Sxy} = R_{Sxy}(0)$, $D_{Ixy} = R_{Ixy}(0)$.

Следует обратить внимание, что понятия стационарной в широком смысле гиперслучайной функции и функции, стационарной в широком смысле при всех условиях, — разные понятия. Общими для них являются бесконечная длительность реализаций и инвариантность к сдвигу определенных (при этом разных) характеристик.

19.2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Спектральное представление гиперслучайных функций в ряде случаев существенно облегчает их анализ. В первую очередь это касается функций, обладающих свойством стационарности.

Определение 7. *Спектральными плотностями мощности верхней и нижней границ* (*энергетическими спектрами границ*) стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ называются функции $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$, связанные с корреляционными функциями границ $K_{Sx}(f)$, $K_{Ix}(f)$ следующими соотношениями:

$$S_{Sxx}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{Sx}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

$$S_{Ixx}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{Ix}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

$$K_{Sx}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{Sxx}(f)\exp(j2\pi f\tau)df,$$

$$K_{Ix}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{Ixx}(f)\exp(j2\pi f\tau)df.$$

Спектральные плотности мощности границ обладают свойствами, характерными для спектральной плотности мощности случайного процесса:

• энергетические спектры (вне зависимости от того, является ли функция $X(t)$ вещественной или комплексной) действительны и неотрицательны, т. е. $S_{Sxx}(f)\geq 0$, $S_{Ixx}(f)\geq 0$;

• спектральные плотности мощности границ действительной гиперслучайной функции $X(t)$ четные, т. е.

$$S_{Sxx}(f)=S_{Sxx}(-f)\,,\ S_{Ixx}(f)=S_{Ixx}(-f)$$

(это следует из того, что корреляционные функции границ стационарных гиперслучайных функций четные).

Определение 8. *Гиперслучайным белым шумом* называется стационарная гиперслучайная функция $N(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями границ, у которой спектральные плотности мощности границ представляют собой постоянные величины, т. е. $S_{Snn}=N_S/2$, $S_{Inn}=N_I/2$, где N_S, N_I — константы.

Корреляционные функции границ гиперслучайного белого шума описываются с помощью δ-функции следующим образом: $K_{Sn}(\tau)=N_S\delta(\tau)/2$, $K_{In}(\tau)=N_I\delta(\tau)/2$.

Отметим, что этими же выражениями описываются и ковариационные функции границ гиперслучайного белого шума.

Следует обратить внимание на то, что при определении гиперслучайного белого шума, так же, как и при определении случайного белого шума, не используется понятия гауссовости и независимости сечений. Это означает, что гиперслучайный белый шум может быть негауссовским и с зависимыми (в том смысле, как это понимается в теории гиперслучайных явлений) сечениями.

Метод спектрального описания гиперслучайных функций допускает обобщение на случай стационарно связанных гиперслучайных функций.

Определение 9. *Взаимными спектральными плотностями мощности границ* двух стационарно связанных гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называются детерминированные функции $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$, определяемые как преобразование Фурье взаимных корреляционных функций границ $K_{Sxy}(\tau)$ и $K_{Ixy}(\tau)$:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{Sxy}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{Ixy}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau.$$

Взаимные корреляционные функции границ связаны с взаимными спектральными плотностями мощности границ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{Sxy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Sxy}(f)\exp(j2\pi f\tau)df,$$

$$K_{Ixy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Ixy}(f)\exp(j2\pi f\tau)df.$$

В отличие от спектральных плотностей мощности границ одной гиперслучайной функции, взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями. Кроме того, они не являются четными, однако обладают свойствами эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = \overset{*}{S}_{Syx}(f), \quad \dot{S}_{Ixy}(f) = \overset{*}{S}_{Iyx}(f).$$

Взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$, $\dot{S}_{Ixy}(f)$ функций $X(t)$ и $Y(t)$ связаны со спектральными плотностями мощности границ $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$ и $S_{Syy}(f)$, $S_{Iyy}(f)$ этих функций следующими неравенствами:

$$\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2 \le S_{Sxx}(f) S_{Syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2 \le S_{Ixx}(f) S_{Iyy}(f).$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ используются функции частотной когерентности границ.

Определение 10. *Функциями частотной когерентности границ* $\gamma^2_{Sxy}(f)$, $\gamma^2_{Ixy}(f)$ называются функции, определяемые подобно функции частотной когерентности двух случайных функций:

$$\gamma^2_{Sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2}{S_{Sxx}(f) S_{Syy}(f)},$$

$$\gamma^2_{Ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2}{S_{Ixx}(f) S_{Iyy}(f)}.$$

Функции частотной когерентности границ лежат в интервале [0,1]. Если функции $X(t)$ и $Y(t)$ *некоррелированы*, то для всех $f \ne 0$ $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 0$, если же они *линейно связаны*, то $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 1$.

Функции частотной когерентности границ подобны нормированным ковариационным функциям границ $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$, однако в отличие от последних они характеризуют не только линейные, но и *нелинейные связи* между гиперслучайными функциями.

Определение 11. *Мгновенным спектром гиперслучайной функции* $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ *в условиях* g называется комплексная случайная функция $\dot{S}_{x/g}(f)$, связанная с наблюдаемым при условии g процессом $X(t)/g$ преобразованием Фурье:

$$\dot{S}_{x/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (X(t)/g) \exp(-j2\pi ft) dt .$$

Мгновенный спектр стационарной при всех условиях g гиперслучайной функции обладает свойствами, подобными свойствам мгновенного спектра стационарной случайной функции. В частности, условное математическое ожидание $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)$ мгновенного спектра гиперслучайной функции $X(t)$ связано с условным математическим ожиданием $m_{x/g}$ функции $X(t)$ выражением $m_{\dot{S}_{x/g}}(f) = m_{x/g}\delta(f)$.

Определение 12. *Условный спектр мощности* $S_{xx/g}(f)$ функции $X(t)$ определяется как преобразование Фурье условной корреляционной функции $K_{x/g}(\tau)$:

$$S_{xx/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{x/g}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

где $K_{x/g}(\tau)$ связана с $S_{xx/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{x/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx/g}(f)\exp(j2\pi f\tau)df .$$

Условную корреляционную функцию мгновенного спектра $K_{\dot{S}_x/g}(f_1, f_2)$ стационарной при всех условиях гиперслучайной функции $X(t)$ можно представить следующим образом:

$$K_{\dot{S}_x/g}(f_1, f_2) = S_{xx/g}(f_1)\delta(f_2 - f_1) . \qquad (19.1)$$

Из выражения (19.1) следует, что

- мгновенный спектр стационарной гиперслучайной функции не является стационарной функцией;
- отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, ортогональны;
- при нулевых границах математического ожидания отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, не только ортогональны, но и некоррелированы.

Отметим, что условный спектр мощности $S_{xx/g}(f)$ связан с *условным мгновенным спектром* $\dot{S}_{x_T/g}(f)$, вычисляемым на интервале T, следующим соотношением:

$$S_{xx/g}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f)\overset{*}{S}_{x_T/g}(f)] .$$

Определение 13. *Границами энергетического спектра* называются следующие функции:

$$S_{sxx}(f) = \sup_{g \in G} S_{xx/g}(f)\,, \quad S_{ixx}(f) = \inf_{g \in G} S_{xx/g}(f)\,.$$

Нетрудно убедиться, что границы энергетического спектра стационарной при всех условиях гиперслучайной функции связаны с ее мгновенным спектром при условии g соотношениями

$$S_{sxx}(f) = \lim_{T\to\infty} \sup_{g \in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)]\,,$$

$$S_{ixx}(f) = \lim_{T\to\infty} \inf_{g \in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)]\,.$$

Определение 14. *Гиперслучайным белым шумом при всех условиях* называется стационарная при всех условиях гиперслучайная функция $N(t)$, у которой условное математическое ожидание равно нулю, а условный спектр мощности не зависит от частоты, т. е. $S_{nn/g} = N_g/2$, где N_g — константа, в общем случае зависящая от условия g.

Условная корреляционная функция такого шума представляет собой δ-функцию: $K_{n/g}(\tau) = N_g \delta(\tau)/2$. Этим же выражением описывается и его ковариационная функция.

Заметим, что при определении понятия гиперслучайного белого шума при всех условиях не наложены ограничения на условные законы распределения. В частном случае они могут быть гауссовского типа.

Определение 15. *Условным взаимным спектром мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ стационарных при всех условиях гиперслучайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ называется преобразование Фурье условной взаимно-корреляционной функции $K_{xy/g}(\tau)$:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy/g}(\tau) \exp(-j 2\pi f \tau) d\tau,$$

где $K_{xy/g}(\tau)$ связана с $\dot{S}_{xy/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{xy/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{xy/g}(f) \exp(j 2\pi f \tau) df\,.$$

Определение 16. *Границами взаимного энергетического спектра* называются следующие функции:

$$\dot{S}_{sxy}(f) = \mathrm{M}_s[\dot{S}_{xy}(f)]\,,\ \dot{S}_{ixy}(f) = \mathrm{M}_i[\dot{S}_{xy}(f)]\,.$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ и границы взаимного энергетического спектра $\dot{S}_{sxy}(f)$ и $\dot{S}_{ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями, не являются четными и обладают свойством эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = \overset{*}{S}_{yx/g}(f)\,,\ \dot{S}_{sxy}(f) = \overset{*}{S}_{syx}(f)\,,\ \dot{S}_{ixy}(f) = \overset{*}{S}_{iyx}(f)\,.$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ используют границы функции частотной когерентности.

Определение 17. *Границами функции частотной когерентности* $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$ называются функции

$$\gamma^2_{sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}\,,\ \gamma^2_{ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}\,.$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ связан с условными спектрами мощности $S_{xx/g}(f)$ и $S_{yy/g}(f)$ следующим неравенством:

$$\left|\dot{S}_{xy/g}(f)\right|^2 \le S_{xx/g}(f)S_{yy/g}(f)\,,$$

однако границы взаимной спектральной плотности мощности $\dot{S}_{sxy}(f)$, $\dot{S}_{ixy}(f)$ не имеют подобной связи с границами спектральных плотностей мощности $S_{sxx}(f)$, $S_{ixx}(f)$ и $S_{syy}(f)$, $S_{iyy}(f)$, т. е. *не всегда* справедливы неравенства

$$\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2 \le S_{sxx}(f)S_{syy}(f)\,,$$

$$\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2 \le S_{ixx}(f)S_{iyy}(f)\,.$$

Поэтому границы функции частотной когерентности $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$ могут принимать значения, превышающие единицу.

19.3. ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Некоторые стационарные (однородные) гиперслучайные функции обладают специфическим свойством эргодичности. Прежде, чем переходить к рассмотрению эргодических гиперслучайных функций, напомним различные варианты определения понятия эргодической случайной функции, используемые в теории вероятностей, и основные свойства таких функций [Гнеденко, 1988, Горбань, 2003, Левин, 1989].

Для некоторых стационарных случайных функций расчет характеристик может быть проведен не путем усреднения по ансамблю реализаций, а усреднением данных лишь одной реализации. Такие случайные функции называются эргодическими. Известно несколько определений понятия эргодической случайной функции.

Определение 18. *Случайная функция* называется *эргодической в узком смысле*, если любая ее характеристика, полученная усреднением по множеству возможных реализаций, с вероятностью сколько угодно близкой к единице равна среднему по времени, полученному из одной-единственной реализации случайной функции путем усреднения за бесконечный интервал времени.

Теорема 1. Необходимым условием эргодичности случайной функции в узком смысле является ее стационарность в узком смысле.

Заметим, что не каждая стационарная функция является эргодической.

Определение 19. *Стационарная в узком смысле случайная функция* $X(t)$ называется *эргодической в узком смысле*, если для каждой функции $\varphi(x(t_1),...,x(t_N))$, сформированной на основе любой реализации $x(t)$ этой случайной функции, усредненное по аргументу t ее значение

$$\bar{\mathrm{M}}[\varphi(x(t_1),...,x(t_N)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(x(t_1+t),...,x(t_N+t))dt$$

равно математическому ожиданию $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1),\ ...,X(t_N))]$.

Определение 20. *Стационарная в широком смысле случайная функция* (*процесс*) $X(t)$ называется *эргодической по отношению к математическому ожиданию*, если

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)dt=m_x$$ [1].

Теорема 2 (эргодическая). Случайная функция $X(t)$ является эргодической по отношению к математическому ожиданию тогда и только тогда, когда математическое ожидание m_x случайной функции постоянно, а ее ковариационная функция $R_x(t_1,t_2)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}R_x(t_1,t_2)dt_1dt_2=0. \qquad (19.2)$$

Достаточным условием справедливости равенства (19.2) является условие

$$\lim_{|t_2-t_1|\to\infty}\left|R_x(t_1,t_2)\right|=0,$$

т. е. что ковариационная функция $R_x(t_1,t_2)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении модуля разности аргументов $|t_2-t_1|$. Проверка выполнения этого условия обычно вызывает меньшие трудности, чем проверка условия (19.2).

Для стационарных случайных функций условие (19.2) может быть записано следующим образом:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_x(\tau)d\tau=0.$$

Достаточным условием справедливости этого равенства является условие $\lim_{|\tau|\to\infty}\left|R_x(\tau)\right|=0$.

Определение 21. *Стационарная в широком смысле случайная функция* $X(t)$ называется *эргодической по отношению к ковариационной функции* $R_x(\tau)$, если

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\overset{\circ}{X}(t+\tau)\overset{\circ}{X}(t)dt$$ [2],

где $\overset{\circ}{X}(t)$ — центрированная случайная функция $X(t)$.

[1] Иногда используют сходимость в среднеквадратическом.
[2] Иногда используют сходимость в среднеквадратическом.

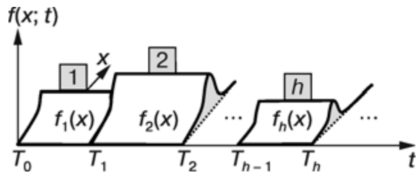


Рис. 19.1. Одномерная плотность распределения фрагментарно-эргодической случайной функции $X(t)$ с фрагментами, описываемыми одномерными плотностями распределения $f_h(x)$, $T_h - T_{h-1} = T$, $h = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции по отношению к ковариационной функции $R_x(\tau)$ является равенство

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) [R_x^2(\tau) + R_x(\tau + \tau_0) R_x(\tau - \tau_0)]\, d\tau = 0$$

при любом фиксированном τ_0.

Определение 22. *Стационарная в широком смысле* случайная функция $X(t)$ называется *эргодической в широком смысле*, если ее математическое ожидание m_x совпадает со средним значением

$$\bar{m}_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

любой ее реализации $x(t)$, а ковариационная функция $R_x(\tau)$ — с ее временной ковариационной функцией

$$\bar{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t+\tau) - \bar{m}_x\right)\left(x(t) - \bar{m}_x\right) dt\,.$$

На этом основании математическое ожидание и ковариационная функция могут быть рассчитаны по следующим формулам: $m_x = \bar{m}_x$, $R_x(\tau) = \bar{R}_x(\tau)$.

Некоторые в целом нестационарные случайные функции проявляют свойства стационарности и эргодичности на интервалах конечной длительности.

Определение 23. *Фрагментарно-эргодической* называется *случайная функция* $X(t)$, состоящая из практически стационарных эргодических фрагментов определенной длительности T (рис. 19.1) [Горбань, 2011 (1)].

Под практически стационарным эргодическим фрагментом случайной функции подразумевается такой ее фрагмент, характеристики которого (математическое ожидание, корреляционная функция и др.) могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации этого фрагмента [Горбань, 2011 (1)].

При решении практических задач важным вопросом является определение длительности T практически стационарных эргодических фрагментов, иначе говоря, *интервала стационарности и эргодичности случайной функции.*

19.4. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 24. *Стационарная гиперслучайная функция* (*процесс*) $X(t)=\{X(t)/g \in G\}=\{X_g(t),\ g\in G\}$ называется *эргодической при всех условиях* g, если для всех g составляющие ее случайные функции $X_g(t)$ являются эргодическими.

Под эргодическими случайными функциями можно понимать функции, соответствующие одному из определений, приведенных в параграфе 19.3.

При использовании, в частности, определения 19 под гиперслучайной эргодической функцией подразумевается процесс $X(t)=\{X(t)/g\in G\}$, для которого при всех условиях g среднее значение $\bar{\mathrm{M}}[\varphi(x(t_1)/g,\ldots,x(t_N)/g)]$ функции $\varphi(x(t_1)/g,\ldots$ $\ldots,\ x(t_N)/g)$, рассчитанное по произвольно выбранной реализации $x(t)/g$ случайной функции $X(t)/g$ путем усреднения по t на интервале $(-\infty,\infty)$, с вероятностью, равной единице, равно среднему, рассчитанному для функции $\varphi(X(t_1)/g,\ldots,X(t_N)/g)$ путем усреднения множества реализаций функции $X(t)/g$.

Это означает, что среднее по t на интервале длительностью T

$$\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1),\ldots,x(t_N))]=\left\{\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1)/g,\ldots,x(t_N)/g)],\ \ g\in G\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(x(t_1+t)/g,\ldots,x(t_N+t)/g)d\,t,\quad g\in G\right\}$$

множества функций $\varphi(x(t_1+t)/g,\ldots,x(t_N+t)/g)$, $g\in G$ сходится при $T\to\infty$ почти наверное к математическому ожиданию $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_N))]$ — множеству математических ожиданий $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1)/g,\ldots,X(t_N))/g]$ случайных величин $\varphi(X(t_1)/g,\ldots$ $\ldots,\ X(t_N)/g)$, вычисленных для различных условий g путем усреднения по ансамблю реализаций:

$$\lim_{T\to\infty} \bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1),\ldots,x(t_N))] = \mathrm{M}[\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_N))] .$$

Если элементы множества G одинаковые, то гиперслучайная эргодическая функция вырождается в случайную эргодическую функцию.

Определение 25. *Границами среднего* на интервале длительностью T *множества реализаций* $x(t) = \{x(t) / g \in G\} = \{x_g(t), g \in G\}$ *эргодической гиперслучайной функции* $X(t)$ называются величины

$$\bar{m}_{sx_T} = \sup_{g\in G} \bar{m}_{x_T/g}, \quad \bar{m}_{ix_T} = \inf_{g\in G} \bar{m}_{x_T/g},$$

границами корреляционной функции множества реализаций — функции

$$\bar{K}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g\in G} \bar{K}_{x_T/g}(\tau), \ \bar{K}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g\in G} \bar{K}_{x_T/g}(\tau),$$

а *границами ковариационной функции множества реализаций* — функции

$$\bar{R}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g\in G} \bar{R}_{x_T/g}(\tau), \ \bar{R}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g\in G} \bar{R}_{x_T/g}(\tau),$$

где $\bar{m}_{x_T/g} = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_g(t)\,dt$ — *среднее значение функции* $x_g(t)$, $\bar{K}_{x_T/g}(\tau) = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_g(t+\tau)\,x_g(t)\,dt$ — автокорреляционная, а $\bar{R}_{x_T/g}(\tau) = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g}][x_g(t) - \bar{m}_{x_T/g}]dt$ — автоковариационная функция функции $x_g(t)$ на интервале длительностью T.

При $T\to\infty$ границы среднего множества реализаций $\bar{m}_{sx}$, $\bar{m}_{ix}$ почти наверное сходятся к границам математического ожидания: $\bar{m}_{sx} = m_{sx}$, $\bar{m}_{ix} = m_{ix}$, границы корреляционной функции множества реализаций $\bar{K}_{sx}(\tau)$, $\bar{K}_{ix}(\tau)$ — к границам корреляционной функции $K_{sx}(\tau)$, $K_{ix}(\tau)$, границы ковариационной функции множества реализаций $\bar{R}_{sx}(\tau)$, $\bar{R}_{ix}(\tau)$ — к границам ковариационной функции $R_{sx}(\tau)$, $R_{ix}(\tau)$, а верхняя и нижняя границы дисперсии множества реализаций $\bar{D}_{sx} = \bar{R}_{sx}(0)$, $\bar{D}_{ix} = \bar{R}_{ix}(0)$ — к границам дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Приведенные результаты допускают обобщения на многомерный случай.

Определение 26. *Границами взаимной корреляционной функции множества реализаций* $x(t) = \{x_g(t), \quad g \in G\}$, $y(t) = \{y_g(t), g \in G\}$ *эргодических гиперслучайных функций*

$$X(t) = \{X(t) / g \in G\} = \{X_g(t), \quad g \in G\},$$

$$Y(t) = \{Y(t) / g \in G\} = \{Y_g(t), \quad g \in G\}$$

на интервале T называются функции

$$\bar{K}_{sxy_T}(\tau) = \sup_{g \in G} \bar{K}_{xy_T / g}(\tau), \quad \bar{K}_{ixy_T}(\tau) = \inf_{g \in G} \bar{K}_{xy_T / g}(\tau),$$

а *границами взаимной ковариационной функции множества реализаций* — функции

$$\bar{R}_{sxy_T}(\tau) = \sup_{g \in G} \bar{R}_{xy_T / g}(\tau), \quad \bar{R}_{ixy_T}(\tau) = \inf_{g \in G} \bar{R}_{xy_T / g}(\tau),$$

где

$$\bar{K}_{xy_T / g}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_g(t + \tau)\, y_g(t)\, dt$$

— взаимная корреляционная функция, а

$$\bar{R}_{xy_T / g}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_g(t + \tau) - \bar{m}_{x_T / g})(y_g(t) - \bar{m}_{y_T / g})\, dt$$

— взаимная ковариационная функция функций $x_g(t)$ и $y_g(t)$.

При $T \to \infty$ границы взаимной корреляционной функции множества реализаций $\bar{K}_{sxy}(\tau)$, $\bar{K}_{ixy}(\tau)$ почти наверное сходятся к границам взаимной корреляционной функции $K_{sxy}(\tau)$, $K_{ixy}(\tau)$, а границы взаимной ковариационной функции множества реализаций $\bar{R}_{sxy}(\tau)$, $\bar{R}_{ixy}(\tau)$ — к границам взаимной ковариационной функции $R_{sxy}(\tau)$, $R_{ixy}(\tau)$.

Аналогичным образом могут быть определены и другие усредненные характеристики.

Заметим, что так же, как и в теории случайных функций, для определения эргодической гиперслучайной функции можно использовать другой тип сходимости, например, вместо сходимости почти наверное применять сходимость в среднеквадратическом.

Вся информация о характеристиках случайной эргодической функции содержится в любой ее реализации. Это дает возможность вычислять моменты и другие характеристики по одной реализации.

К сожалению, для расчета характеристик гиперслучайной эргодической функции одной реализации недостаточно. Необходимо множество реализаций — по одной для каждых условий. Это существенно усложняет расчеты.

Обойтись одной реализацией можно в том случае, когда гиперслучайная функция проявляет свойства стационарности и эргодичности на интервалах конечной длительности. О таких гиперслучайных функциях идет речь в следующем параграфе.

19.5. ФРАГМЕНТАРНО-ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРИ ВСЕХ УСЛОВИЯХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим стационарную эргодическую при всех условиях гиперслучайную функцию $U(t)=\{U(t)/h, \quad h=1,2,\ldots,H\}$ со стационарными эргодическими случайными составляющими $U(t)/h$.

Пусть на интервалах длительностью T составляющие $U(t)/h$ — практически эргодические, т. е. их характеристики могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации длительностью T.

Определение 27. *Фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функцией* называется гиперслучайная функция $X(t)=\{X(t)/g, \quad g=1,2,\ldots,G\}$, составляющие которой $X(t)/g$ — фрагментарно-эргодические случайные функции, сформированные из фрагментов практически эргодических случайных составляющих $U(t)/h$ длительностью T (рис. 19.2).

Каждая реализация фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функции несет информацию о всех ее случайных составляющих. Поэтому для расчета характеристик такой функции достаточно одной (любой) реализации.

Следует обратить внимание на то, что для фрагментарно-эргодической случайной функции (см. рис. 19.1, 19.2) порядок сле-

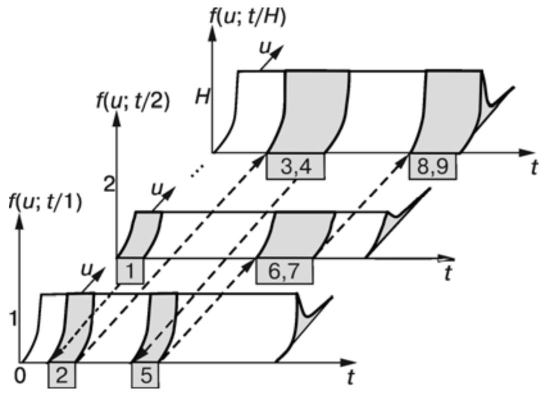


Рис. 19.2. Схема формирования плотности распределения фрагментарно-эргодической случайной функции $X(t)/g$ из плотности распределения стационарной эргодической при всех условиях гиперслучайной функции $U(t) =$
$= \{U(t)/h,\ h = 1, 2,\ \ldots, H\}$

дования распределений $f_h(x)$ детерминирован; для фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функции, когда условия g фиксированы, этот порядок тоже детерминирован, однако, когда условия не фиксированы, порядок не определен.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Проанализированы различные способы представления гиперслучайных величин и процессов на предмет целесообразности их применения при различных типах преобразований. Приведены соотношения, связывающие характеристики и параметры преобразованных и исходных гиперслучайных величин и процессов. Даны рекомендации по использованию различных способов описания гиперслучайных величин при линейных и нелинейных преобразованиях, а также гиперслучайных процессов при безынерционных и инерционных преобразованиях.

20.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Гиперслучайные величины и процессы подвергаются различным преобразованиям. Естественно, возникает вопрос, как описать величину или процесс после преобразования, если известны параметры и характеристики до преобразования. Начнем рассмотрение вопроса с преобразования скалярной гиперслучайной величины.

20.1.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов

Поскольку скалярная гиперслучайная величина представляет собой множество скалярных условных случайных величин, для ее описания можно использовать известные способы описания последних. Изменения, происходящие при преобразовании, могут быть охарактеризованы с помощью характеристик и параметров условных случайных величин. К таким характеристикам и параметрам относятся, в частности, условные функции распределения, условные плотности распределения, а также центральные и нецентральные моменты этих распределений.

Если условная случайная величина X/g с плотностью распределения $f_{x/g}(x)$ подвергается однозначному преобразованию $y = \varphi(x)$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $x = \eta(y)$, то [Левин, 1974, Тихонов, Харисов, 1991, Горбань, 2003] условная плотность распределения преобразованной случайной величины Y/g

$$f_{y/g}(y) = f_{x/g}(\eta(y))\left|\frac{d\eta(y)}{dy}\right|. \qquad (20.1)$$

Начальный $m_{y/g\nu}$ и центральный $\mu_{y/g\nu}$ моменты ν-го порядка преобразованной величины Y/g описываются формулами

$$m_{y/g\nu} = \mathrm{M}[Y^{\nu}/g] = \mathrm{M}[\varphi^{\nu}(X)/g],$$

$$\mu_{y/g\nu} = \mathrm{M}[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}],$$

где $m_{y/g}$ и $m_{\varphi(x)/g}$ — математические ожидания соответственно условных случайных величин Y/g и $\varphi(X)/g$:

$$m_{y/g} = \mathrm{M}[Y/g] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{y/g}(y)dy,$$

$$m_{\varphi(x)/g} = \mathrm{M}[\varphi(X)/g] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{x/g}(x)dx.$$

Зависимость преобразованной гиперслучайной величины от исходной гиперслучайной величины проявляется также на уровне других характеристик и параметров.

20.1.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов

Теорема 1. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X/g \in G\}$ с границами функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ и плотностями распределения границ $f_{Sx}(x)$, $f_{Ix}(x)$ подвергается однозначному преобразованию $y = \varphi(x)$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $x = \eta(y)$. Тогда границы функции распределения $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ и плотности распределения границ $f_{Sy}(y)$, $f_{Iy}(y)$ преобразованной гиперслучайной величины Y описываются выражениями

$$F_{Sy}(y) = F_{Sx}(\eta(y)), \quad F_{Iy}(y) = F_{Ix}(\eta(y)), \tag{20.2}$$

$$f_{Sy}(y) = f_{Sx}(\eta(y))\frac{d\eta(y)}{dy}, \quad f_{Iy}(y) = f_{Ix}(\eta(y))\frac{d\eta(y)}{dy}, \tag{20.3}$$

если $\eta(y)$ — возрастающая функция, и

$$F_{Sy}(y) = 1 - F_{Ix}(\eta(y)), \; F_{Iy}(y) = 1 - F_{Sx}(\eta(y)), \tag{20.4}$$

$$f_{Sy}(y) = -f_{Ix}(\eta(y))\frac{d\eta(y)}{dy}, \; f_{Iy}(y) = -f_{Sx}(\eta(y))\frac{d\eta(y)}{dy}, \tag{20.5}$$

если $\eta(y)$ — убывающая функция.

Доказательство формул (20.2)—(20.5) основано на том факте, что гиперслучайные величины X и Y представляют собой семейства соответственно случайных величин X/g и Y/g $\forall g \in G$, а условная плотность распределения $f_{y/g}(y)$ преобразованной случайной величины Y/g связана с условной плотностью распределения $f_{x/g}(x)$ исходной случайной величины X/g соотношением (20.1).

Границы функции распределения $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ могут быть представлены в виде

$$F_{Sy}(y) = \sup_{g\in G}\int_{-\infty}^{y} f_{y/g}(y_1)dy_1, \quad F_{Iy}(y) = \inf_{g\in G}\int_{-\infty}^{y} f_{y/g}(y_1)dy_1 .$$

Из этих выражений с учетом соотношения (20.1) и очевидного равенства

$$\sup_{g\in G}(a\psi(g)+b) = \begin{cases} a\sup\limits_{g\in G}\psi(g)+b, & \text{если} \quad a>0,\\ a\inf\limits_{g\in G}\psi(g)+b, & \text{если} \quad a<0,\\ b, \quad \text{если} \quad a=0, & \end{cases}$$

где a, b — константы, $\psi(g)$ — функция $g \in G$, получаются формулы (20.2), (20.4). Дифференцирование выражений (20.2), (20.4) приводит к формулам (20.3), (20.5).

Следствие. Из формул (20.2), (20.4) следует, что при выполнении условий теоремы границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения исходной гиперслучайной величины X трансформируются в границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения преобразованной гиперслучайной величины Y, причем, если функция $\eta(y)$ — монотонно возрастающая, то границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ преобразуются соответственно в верхнюю и нижнюю границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$, а если функция $\eta(y)$ — монотонно убывающая, то — соответственно в нижнюю и верхнюю границы $F_{Iy}(y)$, $F_{Sy}(y)$.

Обратим внимание, что не всегда границы функции распределения гиперслучайной величины X преобразуются в соответствующие границы функции распределения гиперслучайной величины Y. Поэтому начальные $m_{Sy\nu}$, $m_{Iy\nu}$ и центральные $\mu_{Sy\nu}$, $\mu_{Iy\nu}$ моменты ν-го порядка границ гиперслучайной величины Y

$$m_{Sy\nu} = \mathrm{M}_{Sy}[Y^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f_{Sy}(y)dy, \quad m_{Iy\nu} = \mathrm{M}_{Iy}[Y^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f_{Iy}(y)dy,$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mathrm{M}_{Sy}[(Y - m_{Sy})^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{Sy})^{\nu} f_{Sy}(y)dy,$$

$$\mu_{Iy\nu} = \mathrm{M}_{Iy}[(Y - m_{Iy})^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{Iy})^{\nu} f_{Iy}(y)dy$$

могут отличаться от соответствующих моментов $m_{S\varphi(x)\nu}$, $m_{I\varphi(x)\nu}$, $\mu_{S\varphi(x)\nu}$, $\mu_{I\varphi(x)\nu}$ границ функции $\varphi^{\nu}(X)$, рассчитываемых по формулам

$$m_{S\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Sx}[\varphi^{\nu}(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{Sx}(x)dx,$$

$$m_{I\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Ix}[\varphi^{\nu}(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{Ix}(x)dx,$$

$$\mu_{S\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Sx}\left[\left(\varphi(x) - m_{S\varphi(x)}\right)^{\nu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x) - m_{S\varphi(x)}\right)^{\nu} f_{Sx}(x)dx,$$

$$\mu_{I\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Ix}\left[\left(\varphi(x) - m_{I\varphi(x)}\right)^{\nu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x) - m_{I\varphi(x)}\right)^{\nu} f_{Ix}(x)dx,$$

где $\mathrm{M}_{Sy}[\cdot]$, $\mathrm{M}_{Iy}[\cdot]$ — операторы математического ожидания границ распределения гиперслучайной величины Y; $m_{Sy} = \mathrm{M}_{Sy}[Y]$,

$m_{Iy} = \mathrm{M}_{Iy}[Y]$ — математические ожидания границ гиперслучайной величины Y; $\mathrm{M}_{Sx}[\cdot]$, $\mathrm{M}_{Ix}[\cdot]$ — операторы математического ожидания границ распределения гиперслучайной величины X; $m_{S\varphi(x)} = \mathrm{M}_{Sx}[\varphi(X)]$, $m_{I\varphi(x)} = \mathrm{M}_{Ix}[\varphi(X)]$ — математические ожидания границ гиперслучайной величины $\varphi(X)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда начальные $m_{Sy\nu}$, $m_{Iy\nu}$ и центральные $\mu_{Sy\nu}$, $\mu_{Iy\nu}$ моменты ν-го порядка границ гиперслучайной величины Y связаны с соответствующими моментами $m_{S\varphi(x)\nu}$, $m_{I\varphi(x)\nu}$, $\mu_{S\varphi(x)\nu}$, $\mu_{I\varphi(x)\nu}$ ν-го порядка границ гиперслучайной величины $\varphi(X)$ следующими выражениями:

$$m_{Sy\nu} = m_{S\varphi(x)\nu},\; m_{Iy\nu} = m_{I\varphi(x)\nu},$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mu_{S\varphi(x)\nu},\; \mu_{Iy\nu} = \mu_{I\varphi(x)\nu}, \tag{20.6}$$

если $\eta(y)$ — возрастающая функция, и

$$m_{Sy\nu} = m_{I\varphi(x)\nu},\; m_{Iy\nu} = m_{S\varphi(x)\nu},$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mu_{I\varphi(x)\nu},\; \mu_{Iy\nu} = \mu_{S\varphi(x)\nu}, \tag{20.7}$$

если $\eta(y)$ — убывающая функция.

Доказательство теоремы основано на следствии теоремы 1.

Следствие. Из выражений (20.6), (20.7) следует, что в случае преобразования $y = -x$ математические ожидания границ m_{Sy}, m_{Iy} гиперслучайной величины Y связаны с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} гиперслучайной величины X соотношениями $m_{Sy} = -m_{Ix}$, $m_{Iy} = -m_{Sx}$, а дисперсии границ D_{Sy}, D_{Iy} гиперслучайной величины Y — с дисперсиями границ D_{Sx}, D_{Ix} гиперслучайной величины X соотношениями $D_{Sy} = D_{Ix}$, $D_{Iy} = D_{Sx}$.

Иначе говоря, при изменении знака гиперслучайной величины математические ожидания верхней и нижней границ преобразованной величины равны математическим ожиданиям соответственно нижней и верхней границ исходной величины, взятым с противоположным знаком. Дисперсии же верхней и нижней границ преобразованной величины равны дисперсиям соответственно нижней и верхней границ исходной величины.

20.1.3. Описание преобразования с помощью границ моментов

Теорема 3. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ с условными плотностями распределения $f_{x/g}(x)$ подвергается преобразованию $y = \varphi(x)$. Тогда верхняя и нижняя границы начального момента ν-го порядка $m_{sy\nu}$, $m_{iy\nu}$ гиперслучайной величины Y равны соответственно верхней и нижней границам $m_{s\varphi(x)\nu}$, $m_{i\varphi(x)\nu}$ математического ожидания функции $\varphi^{\nu}(X)$: $m_{sy\nu} = m_{s\varphi(x)\nu}$, $m_{iy\nu} = m_{i\varphi(x)\nu}$, а верхняя и нижняя границы центрального момента ν-го порядка $\mu_{sy\nu}$, $\mu_{iy\nu}$ гиперслучайной величины Y — соответствующим границам $\mu_{s\varphi(x)\nu}$, $\mu_{i\varphi(x)\nu}$ центрального момента ν-го порядка функции $\varphi(X)$: $\mu_{sy\nu} = \mu_{s\varphi(x)\nu}$, $\mu_{iy\nu} = \mu_{i\varphi(x)\nu}$, где

$$m_{sy\nu} = \mathrm{M}_s[Y^{\nu}] = \sup_{g\in G} \mathrm{M}[(Y/g)^{\nu}],$$

$$m_{iy\nu} = \mathrm{M}_i[Y^{\nu}] = \inf_{g\in G} \mathrm{M}[(Y/g)^{\nu}],$$

$$m_{s\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_s[\varphi^{\nu}(x)] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{x/g}(x)dx,$$

$$m_{i\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_i[\varphi^{\nu}(x)] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{x/g}(x)dx,$$

$$\mu_{sy\nu} = \mathrm{M}_s[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \sup_{g\in G} \mathrm{M}[(Y/g - m_{y/g})^{\nu}],$$

$$\mu_{iy\nu} = \mathrm{M}_i[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \inf_{g\in G} \mathrm{M}[(Y/g - m_{y/g})^{\nu}],$$

$$\mu_{s\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_s[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}] = \sup_{g\in G} \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}],$$

$$\mu_{i\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_i[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}] = \inf_{g\in G} \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}], \quad (20.8)$$

$\mathrm{M}_s[\cdot]$, $\mathrm{M}_i[\cdot]$ — операторы границ математического ожидания.

Теорема доказывается на основе определений (20.8) границ моментов.

Следствие 1. Из теоремы следует, что границы математического ожидания m_{sy}, m_{iy} преобразованной гиперслучайной величины Y равны соответственно границам математического ожидания $m_{s\varphi(x)}$, $m_{i\varphi(x)}$ функции $\varphi(X)$: $m_{sy} = m_{s\varphi(x)} = \mathrm{M}_s[\varphi(X)]$, $m_{iy} = m_{i\varphi(x)} = \mathrm{M}_i[\varphi(X)]$, а границы дисперсии D_{sy}, D_{iy} — соответственно границам дисперсии $D_{s\varphi(x)}$, $D_{i\varphi(x)}$ функции $\varphi(X)$:

$$D_{sy} = D_{s\varphi(x)} = \mathrm{M}_s[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^2],$$

$$D_{iy} = D_{i\varphi(x)} = \mathrm{M}_i[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^2].$$

Следствие 2. В случае преобразования $y = -x$ границы математического ожидания m_{sy}, m_{sy} гиперслучайной величины Y связаны с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix} гиперслучайной величины X соотношениями $m_{sy} = -m_{ix}$, $m_{iy} = -m_{sx}$, а границы дисперсии D_{sy}, D_{iy} величины Y связаны с границами дисперсии D_{sx}, D_{ix} величины X соотношениями $D_{sy} = D_{sx}$, $D_{iy} = D_{ix}$.

Таким образом, при изменении знака гиперслучайной величины верхняя и нижняя границы математического ожидания преобразованной величины равны соответственно нижней и верхней границам математического ожидания исходной величины, взятым с противоположным знаком, а верхняя и нижняя границы дисперсии преобразованной величины — соответственно верхней и нижней границам дисперсии исходной величины.

Пример 1. Рассмотрим пример, иллюстрирующий теоремы. Пусть гиперслучайная величина X подвергается линейному преобразованию $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Тогда согласно выражениям (20.2)—(20.5) верхняя и нижняя границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения и плотности распределения границ $f_{Sy}(y)$, $f_{Iy}(y)$ преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с верхней и нижней границами $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения и плотностями распределения границ $f_{Sx}(x)$, $f_{Ix}(x)$ исходной гиперслучайной величины X следующими соотношениями:

$$F_{Sy}(y) = F_{Sx}((y-b)/a), \quad F_{Iy}(y) = F_{Ix}((y-b)/a),$$

$$f_{Sy}(y) = \frac{1}{a} f_{Sx}\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_{Iy}(y) = \frac{1}{a} f_{Ix}\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

если $a > 0$, и

$$F_{Sy}(y) = 1 - F_{Ix}((y-b)/a), \quad F_{Iy}(y) = 1 - F_{Sx}((y-b)/a),$$

$$f_{Sy}(y) = -\frac{1}{a} f_{Ix}\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_{Iy}(y) = -\frac{1}{a} f_{Sx}\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

если $a < 0$.

Таким образом, при преобразовании $y = ax + b$ верхняя и нижняя границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения исходной гиперслучайной величины X при положительном значении коэффициента a определяют соответственно верхнюю и нижнюю границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения преобразованной гиперслучайной величины Y, а при отрицательном значении этого коэффициента — соответственно нижнюю и верхнюю границы $F_{Iy}(y)$, $F_{Sy}(y)$ этой величины.

При этом согласно формулам (20.6), (20.7) математические ожидания границ m_{Sy}, m_{Iy} и дисперсии границ D_{Sy}, D_{Iy} преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} и дисперсией границ D_{Sx}, D_{Ix} исходной гиперслучайной величины X соотношениями $m_{Sy} = am_{Sx} + b$, $m_{Iy} = am_{Ix} + b$, $D_{Sy} = a^2 D_{Sx}$, $D_{Iy} = a^2 D_{Ix}$, если $a > 0$, и $m_{Sy} = am_{Ix} + b$, $m_{Iy} = am_{Sx} + b$, $D_{Sy} = a^2 D_{Ix}$, $D_{Iy} = a^2 D_{Sx}$, если $a < 0$.

С учетом следствия 1 из теоремы 3 границы математического ожидания m_{sy}, m_{iy} преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix} исходной гиперслучайной величины X соотношениями $m_{sy} = am_{sx} + b$, $m_{iy} = am_{ix} + b$, если $a > 0$, и $m_{sy} = am_{ix} + b$, $m_{iy} = am_{sx} + b$, если $a < 0$. Границы же дисперсии D_{sy}, D_{iy} гиперслучайной величины Y вне зависимости от знака коэффициента a связаны с границами дисперсии D_{sx}, D_{ix} гиперслучайной величины X соотношениями $D_{sy} = a^2 D_{sx}$, $D_{iy} = a^2 D_{ix}$.

20.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

20.2.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов

Векторная гиперслучайная величина представляет собой множество векторных условных случайных величин. Поэтому преобразование векторной гиперслучайной величины можно рассматривать как независимое преобразование векторных случайных ее составляющих.

Если условная H-мерная векторная случайная величина $\vec{X}/g$ с плотностью распределения $f_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ подвергается однозначному преобразованию $\vec{y}=\vec{\varphi}(\vec{x})$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $\vec{x}=\vec{\eta}(\vec{y})$, то [Левин, 1974, Тихонов, Харисов, 1991, Горбань, 2003] плотность распределения преобразованной случайной величины $\vec{Y}/g$ может быть представлена следующим образом:

$$f_{\vec{y}/g}(\vec{y})=f_{\vec{x}/g}(\eta_1(\vec{y}),\ldots,\eta_H(\vec{y}))\left|J_H(\vec{y})\right|,$$

где $J_H(\vec{y})$ — якобиан преобразования переменных:

$$J_H(\vec{y})=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\eta_1(\vec{y})}{\partial y_1}\cdots\dfrac{\partial\eta_1(\vec{y})}{\partial y_H}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial\eta_H(\vec{y})}{\partial y_1}\cdots\dfrac{\partial\eta_H(\vec{y})}{\partial y_H}\end{vmatrix}.$$

Заметим, что зависимость между функциями распределения $F_{\vec{y}/g}(\vec{y})$, $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ преобразованной и исходной случайными величинами $\vec{Y}/g$ и $\vec{X}/g$ носит существенно более сложный характер, чем между плотностями распределения, поскольку интеграл, стоящий в правой части выражения

$$F_{\vec{y}/g}(\vec{y})=\int_{-\infty}^{y_1}\ldots\int_{-\infty}^{y_H}f_{\vec{y}/g}(\vec{y})d\vec{y}=\int\ldots\int_{V(\vec{y})}f_{\vec{x}/g}(\vec{x})d\vec{x}$$

(где $V(\vec{y}_0)$ — область интегрирования в системе координат $x_1,\ldots,x_H$, соответствующая неравенствам $y_1<y_{01},\ldots,y_H<y_{0H}$ в

системе координат $y_1,\ldots,y_H$), в общем случае не является функцией распределения случайной величины $\vec{X}/g$.

Сложный характер зависимости имеет место даже при линейном преобразовании с поворотом осей координат. Лишь в простейшем случае покоординатного преобразования, описываемого монотонно возрастающими функциями $x_h = \eta_h(y_h)$, $h=\overline{1,H}$, получается простая зависимость $F_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = F_{\vec{x}/g}(\eta_1(y_1),\ldots$ $\ldots,\eta_H(y_H))$.

В двумерном случае, когда гиперслучайная величина $\vec{X}=(X_1,X_2)$ подвергается преобразованию, описываемому функциями $y_1=\varphi_1(x_1,x_2)$, $y_2=x_2$, имеющими непрерывно дифференцируемые однозначные обратные функции $x_1=\eta_1(y_1,y_2)$, $x_2=y_2$, условные плотности распределения компоненты Y_1 гиперслучайного вектора $\vec{Y}$ имеют вид

$$f_{y_1/g}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(\eta_1(y_1,y_2),y_2)\left|\frac{\partial\eta_1(y_1,y_2)}{\partial y_1}\right| dy_2 .$$

Эта известная формула позволяет рассчитать условные плотности распределения гиперслучайной величины Y, получаемой в результате арифметических операций над гиперслучайными величинами X_1, X_2. В частности, при *сложении* величин условная плотность распределения

$$f_{y/g}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(y-x_2,x_2)dx_2 ,$$

при *вычитании* —

$$f_{y/g}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(y+x_2,x_2)dx_2 ,$$

при *умножении* —

$$f_{y/g}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}\left(\frac{y}{x_2},x_2\right)\frac{dx_2}{|x_2|}$$

и при *делении* —

$$f_{y/g}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}\left(yx_2,x_2\right)|x_2|dx_2 .$$

При преобразовании $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$ начальный $m_{\vec{y}/g\nu_1,\ldots,\nu_H}$ и центральный $\mu_{\vec{y}/g\nu_1,\ldots,\nu_H}$ моменты $\nu_1,\ldots,\nu_H$-го порядка преобразованной величины $\vec{Y}/g$ имеют следующий вид:

$$m_{\vec{y}/g\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}[Y_1^{\nu_1}\ldots Y_H^{\nu_H}/g]=\mathrm{M}[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\ldots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})/g],$$

$$\mu_{\vec{y}/g\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\ldots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}[(\varphi_1(\vec{X})/g - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\ldots(\varphi_H(\vec{X})/g - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}], \qquad (20.9)$$

где $m_{y_h/g}$ и $m_{\varphi_h(\vec{x})/g}$ — математические ожидания h-й компоненты соответственно условных случайных величин $\vec{Y}/g$ и $\vec{\varphi}(\vec{X})/g$:

$$m_{y_h/g} = \mathrm{M}[Y_h/g] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{y_h/g}(y)dy\,,$$

$$m_{\varphi_h(\vec{x})/g} = \mathrm{M}[\varphi_h(\vec{X})/g] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_h(\vec{x})f_{\vec{x}/g}(\vec{x})d\vec{x}\,.$$

20.2.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов

Как следует из п. 20.1.2, в скалярном случае характеристики и параметры границ распределения преобразованной величины достаточно просто выражаются через такие же характеристики и параметры границ исходной величины. Это значительно облегчает анализ. К сожалению, получить в векторном случае подобные простые зависимости не удается. Обусловлено это тем, что границы функции распределения преобразованной гиперслучайной величины $\vec{Y}$ сложным образом зависят от границ функции распределения исходной величины $\vec{X}$.

Расчет границ $F_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $F_{I\vec{y}}(\vec{y})$ по данным величины $\vec{X}$ требует знания условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ $\forall g \in G$ и предполагает выполнение следующих шагов:

- расчет по условным функциям распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ исходной величины $\vec{X}$ условных плотностей распределения

$$f_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = \frac{\partial^H F_{\vec{x}/g}(\vec{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_H},$$

- нахождение условных плотностей распределения $f_{\vec{y}/g}(\vec{y})$ преобразованной величины $\vec{Y}$ с учетом якобиана преобразования переменных,
- определение условных функций распределения

$$F_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = \int\limits_{-\infty}^{y_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{y_H} f_{\vec{y}/g}(\vec{y})\, d\vec{y},$$

- расчет верхней и нижней границ функции распределения $F_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $F_{I\vec{y}}(\vec{y})$.

Плотность распределения границ преобразованной величины можно найти путем дифференцирования границ функции распределения:

$$f_{S\vec{y}}(\vec{y}) = \frac{\partial^H F_{S\vec{y}}(\vec{y})}{\partial x_1 \dots \partial x_H}, \quad f_{I\vec{y}}(\vec{y}) = \frac{\partial^H F_{I\vec{y}}(\vec{y})}{\partial x_1 \dots \partial x_H}.$$

Начальные $m_{S\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$, $m_{I\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$ и центральные $\mu_{S\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$, $\mu_{I\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$ моменты границ преобразованной векторной гиперслучайной величины вычисляют с помощью плотностей распределения границ $f_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $f_{I\vec{y}}(\vec{y})$:

$$m_{S\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}_S[Y_1^{\nu_1} \dots Y_H^{\nu_H}], \quad m_{I\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}_I[Y_1^{\nu_1} \dots Y_H^{\nu_H}],$$

$$\mu_{S\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}_S[(Y_1 - m_{Sy_1})^{\nu_1} \dots (Y_H - m_{Sy_H})^{\nu_H}],$$

$$\mu_{I\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}_I[(Y_1 - m_{Iy_1})^{\nu_1} \dots (Y_H - m_{Iy_H})^{\nu_H}].$$

20.2.3. Описание преобразования с помощью границ моментов

Расчет границ моментов не столь сложен. Моменты границ преобразованной величины описываются следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть H-мерная гиперслучайная величина $\vec{X}$ подвергается преобразованию $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$. Тогда границы начальных $m_{s\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$, $m_{i\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$ и центральных $\mu_{s\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$, $\mu_{i\vec{y}\nu_1,\dots,\nu_H}$ моментов

$\nu_1,\ldots,\nu_H$-го порядка преобразованной величины $\vec{Y}$ описываются формулами

$$m_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_s[Y_1^{\nu_1}\ldots Y_H^{\nu_H}] = \mathrm{M}_s[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\ldots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})] = m_{s\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$m_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_i[Y_1^{\nu_1}\ldots Y_H^{\nu_H}] = \mathrm{M}_i[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\ldots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})] = m_{i\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$\mu_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_s[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\ldots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}_s[(\varphi_1(\vec{X}) - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\ldots(\varphi_H(\vec{X}) - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}] = \mu_{s\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$\mu_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_i[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\ldots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}_i[(\varphi_1(\vec{X}) - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\ldots(\varphi_H(\vec{X}) - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}] = \mu_{i\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H}. \quad (20.10)$$

Соотношения (20.10) следуют из формул (20.9).

Следствие. Из соотношений (20.10) видно, что границы математического ожидания m_{sy_h}, m_{iy_h} h-й компоненты гиперслучайной величины $\vec{Y}$ описываются выражениями

$$m_{sy_h} = \mathrm{M}_s\left[Y_h\right] = \mathrm{M}_s\left[\varphi_h(\vec{X})\right] = m_{s\varphi_h(\vec{x})},$$

$$m_{iy_h} = \mathrm{M}_i\left[Y_h\right] = \mathrm{M}_i\left[\varphi_h(\vec{X})\right] = m_{i\varphi_h(\vec{x})}, \quad (20.11)$$

а границы дисперсии D_{sy_h}, D_{iy_h} h-й компоненты — выражениями

$$D_{sy_h} = \mathrm{M}_s[(Y_h - m_{y_h/g})^2] = \mathrm{M}_s[(\varphi_h(\vec{X}) - m_{\varphi_h(\vec{x})/g})^2] = D_{s\varphi_h(\vec{x})},$$

$$D_{iy_h} = \mathrm{M}_i[(Y_h - m_{y_h/g})^2] = \mathrm{M}_i[(\varphi_h(\vec{X}) - m_{\varphi_h(\vec{x})/g})^2] = D_{i\varphi_h(\vec{x})}. \quad (20.12)$$

20.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

20.3.1. Безынерционное преобразование гиперслучайного процесса

При безынерционном преобразовании гиперслучайного процесса $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ в гиперслучайный процесс $Y(t) = \{Y(t)/g \in G\}$ каждое сечение воздействия $X(t)$ порождает соответствующее сечение отклика $Y(t)$.

Для фиксированных условий $g \in G$ M-мерное условное распределение $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$ ($\vec{x} = (x_1,\ldots,x_M)$, $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_M)$) случайного процесса $X(t)/g$ можно рассматривать как функцию распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ условной векторной случайной величины $\vec{X}/g$, каждая m-я компонента которой равна сечению случайного процесса $X(t)/g$ в момент времени t_m ($m = \overline{1,M}$). Поэтому все характеристики и параметры гиперслучайного процесса $X(t)$ совпадают с характеристиками и параметрами соответствующей векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$.

Аналитическая запись характеристик и параметров гиперслучайного процесса отличается от записи характеристик и параметров гиперслучайной величины лишь формально наличием параметра, указывающего на зависимость этих характеристик и параметров от времени. Указанное совпадение характеристик и параметров позволяет использовать для описания безынерционных преобразований гиперслучайных процессов соотношения, описывающие преобразования векторных гиперслучайных величин.

20.3.2. Преобразование гиперслучайного процесса линейным инерционным оператором

Рассмотрим линейный физически реализуемый стационарный фильтр, характеризуемый импульсной переходной характеристикой $h(\tau)$. Отклик $y(t)$ такого фильтра на воздействие процесса $x(t)$ описывается сверткой

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau .$$

При поступлении на вход фильтра гиперслучайного процесса $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$, представляемого множеством условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$, на выходе гиперслучайный процесс $Y(t) = \{Y(t)/g \in G\}$ описывается множеством условных функций распределения $F_{\vec{y}/g}(\vec{y};\vec{t})$.

Расчет функции $F_{\vec{y}/g}(\vec{y};\vec{t})$ — непростая задача. Однако основные характеристики отклика связаны с характеристиками входного воздействия достаточно просто. В частности, первые два момента случайного процесса $Y(t)/g$ для фиксированных условий g описываются [Левин, 1974, Горбань, 2003] следующими формулами:

$$m_{y/g}(t) = \int_0^t m_{x/g}(t-\tau)\, h(\tau)d\tau\,,$$

$$K_{y/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{x/g}(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\, h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{y/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_{x/g}(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\, h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{xy/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} R_{x/g}(t_1, t_2-\tau)\, h(\tau)d\tau\,, \qquad (20.13)$$

где $m_{y/g}(t)$, $m_{x/g}(t)$ — условные математические ожидания отклика и входного воздействия; $K_{y/g}(t_1,t_2)$, $K_{x/g}(t_1,t_2)$ — условные корреляционные функции отклика и входного воздействия; $R_{y/g}(t_1,t_2)$, $R_{x/g}(t_1,t_2)$ — условные ковариационные функции отклика и входного воздействия; $R_{xy/g}(t_1,t_2)$ — условная взаимная ковариационная функция отклика и входного воздействия.

Знания условных моментов недостаточно для расчета моментов границ преобразованного процесса, но достаточно для расчета границ его моментов:

$$m_{sy}(t) = \sup_{g\in G} m_{y/g}(t)\,,\ \ m_{iy}(t) = \inf_{g\in G} m_{y/g}(t)\,,$$

$$R_{sy}(t_1,t_2) = \sup_{g\in G} R_{y/g}(t_1,t_2),\ \ R_{iy}(t_1,t_2) = \inf_{g\in G} R_{y/g}(t_1,t_2)$$

и др.

В случае стационарного в широком смысле при всех условиях гиперслучайного процесса $X(t)$, когда при любом фиксированном $g \in G$ условное математическое ожидание $m_{x/g}$ не зависит от аргумента t, а условная корреляционная функция $K_{x/g}(\tau)$ зависит лишь от разности τ значений аргумента t и условий g, соотношения (20.13) имеют более простой вид:

$$m_{y/g}(t) = m_{x/g}\int_0^t h(\tau)d\tau\,,$$

$$K_{y/g}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{x/g}(t_2-\tau_2-(t_1-\tau_1)\,)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{y/g}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_{x/g}(t_2-\tau_2-(t_1-\tau_1))\,h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{xy/g}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} R_{x/g}(t_2-\tau-t_1)\,h(\tau)d\tau\,.$$

Из этих выражений видно, что отклик на воздействие стационарного при всех условиях гиперслучайного процесса представляет собой в общем случае нестационарный при всех условиях гиперслучайный процесс. Однако при рассмотрении отклика в моменты времени, отстоящие от начала воздействия входного процесса на величину, превосходящую длительность импульсной переходной характеристики T, приближенно отклик оказывается стационарным при всех условиях, процессы $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарно связанными при всех условиях и формулы приобретают следующий приближенный вид:

$$m_{y/g}=m_{x/g}\int_0^{T} h(\tau)d\tau\,,$$

$$K_{y/g}(\tau)=\int_0^{T}\int_0^{T} K_{x/g}(\tau-(\tau_2-\tau_1))\,h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{y/g}(\tau)=\int_0^{T}\int_0^{T} R_{x/g}(\tau-(\tau_2-\tau_1))\,h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{xy/g}(\tau)=\int_0^{T} R_{x/g}(\tau-t_1)\,h(t_1)dt_1\,. \qquad (20.14)$$

Нетрудно убедиться, что при этом условные спектральные плотности мощности отклика $S_{y/g}(f)$ и входного воздействия $S_{x/g}(f)$ связаны между собой соотношением

$$S_{y/g}(f)=|\,K(f)\,|^2\;S_{x/g}(f)\,, \qquad (20.15)$$

где $K(f)$ — передаточная характеристика фильтра.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть стационарный при всех условиях гиперслучайный процесс $X(t)$ с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, границами спектральной плотности мощности $S_{sx}(f)$, $S_{ix}(f)$, корреляционными функциями этих границ $K_{S_{sx}}(\tau)$, $K_{S_{ix}}(\tau)$ и их ковариационными функциями $R_{S_{sx}}(\tau)$, $R_{S_{ix}}(\tau)$ подвергается фильтрации фильтром, описываемым комплексной передаточной характеристикой $\dot{K}(f)$, соответствующей импульсной переходной характеристике $h(t)$ длительностью T. Тогда отклик фильтра в момент времени $t > T$ представляет собой стационарный гиперслучайный процесс. Границы математического ожидания этого процесса $m_{sy} = K(0)m_{sx}$, $m_{iy} = K(0)m_{ix}$, если $K(0) > 0$, и $m_{sy} = K(0)m_{ix}$, $m_{iy} = K(0)m_{sx}$, если $K(0) < 0$, границы спектральной плотности мощности

$$S_{sy}(f) = \left|K(f)\right|^2 S_{sx}(f),\ S_{iy}(f) = \left|K(f)\right|^2 S_{ix}(f),$$

корреляционные функции границ спектральной плотности мощности

$$K_{S_{sy}}(\tau) = \int_0^T \int_0^T K_{S_{sx}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\ h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$K_{S_{iy}}(\tau) = \int_0^T \int_0^T K_{S_{ix}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\ h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

а ковариационные функции границ спектральной плотности мощности

$$R_{S_{sy}}(\tau) = \int_0^T \int_0^T R_{S_{sx}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\ h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$R_{S_{iy}}(\tau) = \int_0^T \int_0^T R_{S_{ix}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\ h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Доказательство теоремы основано на соотношениях (20.14) и (20.15).

Следствие. Из двух последних соотношений следует, что дисперсии границ спектральной плотности мощности отклика

$$D_{S_{sy}} = \int_0^T \int_0^T R_{S_{sx}}(\tau_2 - \tau_1)\ h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

$$D_{S_{iy}} = \int_0^T \int_0^T R_{S_{ix}}(\tau_2 - \tau_1)\, h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 .$$

Пример 2. Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему. При поступлении на вход фильтра гиперслучайного белого при всех условиях шума, описываемого условными спектральными плотностями мощности $S_{n/g} = N_g / 2$, где N_g — константа, определяемая условиями g, границы математического ожидания отклика $m_{sy} = m_{iy} = m_{sx} = m_{ix} = 0$, границы спектральной плотности мощности процесса на выходе $S_{sy}(f) = |K(f)|^2 N_s / 2$, $S_{iy}(f) = |K(f)|^2 N_i / 2$, а корреляционные и ковариационные функции границ спектральной плотности мощности

$$K_{S_{sy}}(\tau) = R_{S_{sy}}(\tau) = \frac{N_s}{2} \int_0^T h(\tau - \tau_2)\, h(\tau_2) d\tau_2 ,$$

$$K_{S_{iy}}(\tau) = R_{S_{iy}}(\tau) = \frac{N_i}{2} \int_0^T h(\tau - \tau_2)\, h(\tau_2) d\tau_2 ,$$

где N_s и N_i — соответственно верхняя и нижняя границы констант N_g, $g \in G$.

* * *

Анализ приведенных способов представления гиперслучайных величин и процессов (с помощью условных функций распределения (условных плотностей распределения) и их моментов, границ функции распределения и их моментов и границ моментов распределения) показывает:

• все способы представления гиперслучайных величин могут быть эффективно использованы для описания преобразований скалярных гиперслучайных величин;

• для описания преобразований векторных гиперслучайных величин удобно использовать способы представления величин с помощью условных функций распределения и условных моментов, а также с помощью границ моментов;

• возможности использования границ функции распределения и моментов границ для описания преобразований векторных гиперслучайных величин ограничены, что обусловлено значительными вычислительными трудностями расчета характеристик и параметров границ преобразованной векторной гиперслучайной величины по данным исходной векторной гиперслучайной величины;

- для описания безынерционных преобразований гиперслучайных процессов можно использовать соотношения, описывающие преобразования векторных гиперслучайных величин;
- при инерционных преобразованиях основными способами представления гиперслучайных процессов являются условные моменты распределения (в первую очередь условные математические ожидания и условные ковариационные функции), границы этих моментов, а также границы спектральной плотности мощности.

ОСНОВЫ СТАТИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Формализовано понятие гиперслучайной выборки и приведены ее свойства. Описана методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины. Акцентировано внимание на нарушении сходимости реальных оценок и адекватности их описания гиперслучайными моделями.

21.1. ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ВЫБОРКА

Гиперслучайную величину *X* в общем случае можно представить множеством случайных величин X / g, наблюдаемых в условиях $g \in G$: $X = \{X / g \in G\}$. В частном случае, когда X / g представляет собой детерминированную величину, однозначно связанную с условиями $g \in G$, гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ вырождается во множество детерминированных величин.

Определение 1. *Генеральной совокупностью гиперслучайной величины* $X = \{X / g \in G\}$ называется бесконечное множество всех ее *реализаций* (*членов* или *элементов*), наблюдаемых во всех условиях $g \in G$. Это множество может быть как счетным, так и несчетным.

Генеральную совокупность можно описать с помощью многозначной функции распределения $F_x(x)$ гиперслучайной величины *X*, множества условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ ($g \in G$), верхней и нижней границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моментов границ, границ моментов и других характеристик.

Определение 2. Множество членов генеральной совокупности

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_N) = \left\{\vec{x} / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$$

гиперслучайной величины X, полученное при конечном числе N опытов в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$, где $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$ — вектор условий, $\vec{G} = (\underbrace{G, \ldots, G}_{N \text{ раз}})$, называется *выборкой из генеральной совокупности*, а ее элементы $x_1, ..., x_N$ — *выборочными значениями* или *реализациями*.

Каждая компонента x_n / g_n $(n = \overline{1, N})$ вектора $\vec{x} / \vec{g}$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ представляет собой детерминированную величину, а каждая реализация x_n вектора $\vec{X}$ без конкретизации условий — множество детерминированных величин.

В частном случае рассматриваемая выборка может формироваться в неизменных условиях $g \in G$. При этом $\vec{x} = \{\vec{x} / g \in G\}$.

Считают, что выборка $x_1, ..., x_N$ принадлежит гиперслучайной величине $X = \{X / g \in G\}$ с условными функциями распределения $F_{x/g}(x)$ ($g \in G$), если она получена из генеральной совокупности, описываемой при фиксированных условиях g функцией распределения $F_{x/g}(x)$.

Бесконечное множество выборок $\vec{x} = (x_1, ..., x_N) = \{\vec{x} / \vec{g} \in \vec{G}\}$ объемом N, сформированных из одной генеральной совокупности, представляет собой N-мерный гиперслучайный вектор:

$$\vec{X} = (X_1, ..., X_N) = \left\{\vec{X} / \vec{g} \in \vec{G}\right\},$$

называемый *гиперслучайной выборкой* или *выборочной совокупностью*.

При этом считается, что все элементы гиперслучайного вектора описываются одной и той же многозначной функцией распределения $F_x(x)$. Компоненты X_n / g_n $(n = \overline{1, N})$ этого вектора в конкретных условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ представляют собой случайные величины, описываемые законами распределения $F_{x/g_n}(x)$ случайных составляющих генеральной совокупности. Функции распределения $F_{x/g_n}(x)$ зависят от номера элемента выборки опосредованно (через условия g_n).

Такая выборка — *однородная*. Другой тип выборки — *неоднородная*. Неоднородная выборка формируется из разных генеральных совокупностей. Каждый ее элемент описывается своей гиперслучайной величиной. Поэтому закон распределения $F_{x_n/g_n}(x)$ случайной компоненты X_n/g_n неоднородной выборки прямо зависит от номера элемента выборки *n*.

Компоненты X_n гиперслучайной выборки $\vec{X}$ будем полагать взаимно независимыми при всех условиях, если не оговорено противное. При взаимной независимости компонент условная функция распределения $F_{\vec{x}/\vec{g}}(\vec{x})$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ допускает представление в виде

$$F_{\vec{x}/\vec{g}}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_{x_n/g_n}(x_n).$$

Определение 3. *Статистикой* называется *любая* функция $Y = Y(\vec{X})$ выборки $\vec{X}$, *вариационным* (*статистическим*) *рядом* в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ — реализации выборки $\vec{x}/\vec{g}$, упорядоченные по возрастанию или убыванию, а *ранжированным рядом* в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ — реализации выборки $\vec{x}/\vec{g}$, упорядоченные по убыванию.

По генеральной совокупности гиперслучайной величины можно вычислить различные ее характеристики и параметры, например, условные функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, условные математические ожидания $m_{x/g}$, математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, границы математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, условные дисперсии $D_{x/g}$, дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, границы дисперсии D_{sx}, D_{ix} и пр.

По реализациям с использованием определенных статистик можно вычислить *оценки* этих же характеристик, в частности, оценки условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценки границ функции распределения $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, оценки условных математических ожиданий $m^*_{x/g}$, оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки границ математического ожидания

m_{sx}^*, m_{ix}^*, оценки условных дисперсий $D_{x/g}^*$, оценки дисперсий границ D_{Sx}^*, D_{Ix}^*, оценки границ дисперсии D_{sx}^*, D_{ix}^* и др.

Заметим, что описанные выше статистические понятия естественно обобщаются на гиперслучайные события и функции подобно тому, как в классической теории вероятностей статистические понятия случайных величин обобщаются на случайные события и функции.

21.2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЫБОРОК

В статистике случайных явлений рассматриваются не одиночные случайные события и величины, а последовательности событий и величин (рис. 21.1, *а*—*г*). Они могут быть как однородными (имеющими одинаковые законы распределения: рис. 21.1, *а*, *в*), так и неоднородными (имеющими разные законы распределения: рис. 21.1, *б*, *г*).

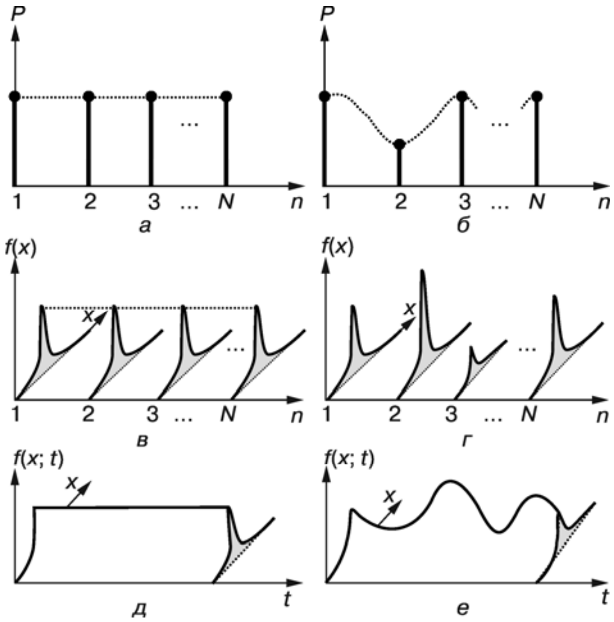


Рис. 21.1. Последовательности случайных событий (однородных (*а*) и неоднородных (*б*)), последовательности случайных величин (однородных (*в*) и неоднородных (*г*)) и случайные процессы (стационарный (*д*) и нестационарный (*е*))

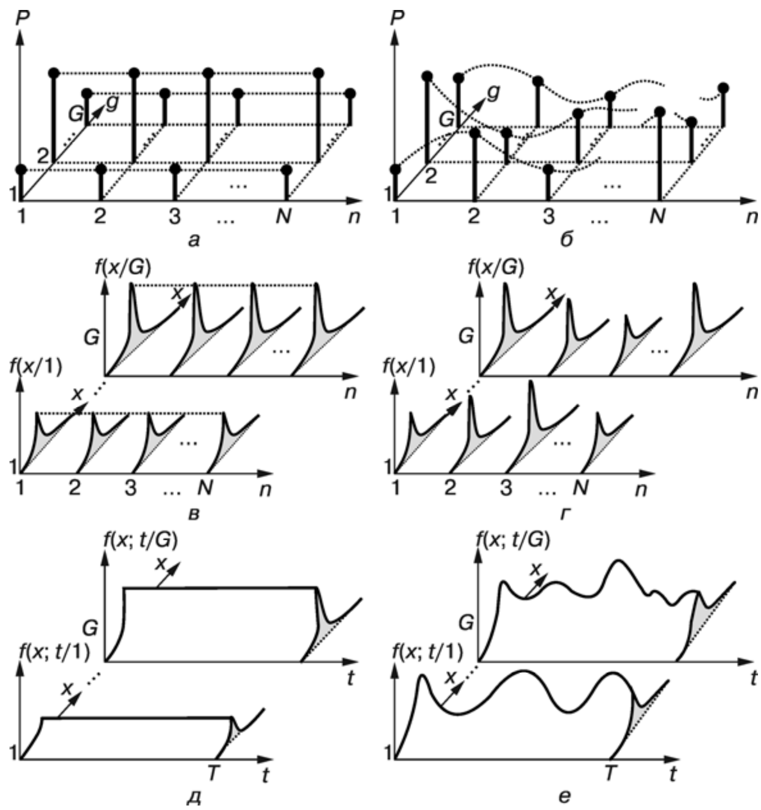


Рис. 21.2. Последовательности гиперслучайных событий (однородных (*а*) и неоднородных (*б*)), последовательности гиперслучайных величин (однородных (*в*) и неоднородных (*г*)) и гиперслучайные процессы (стационарный (*д*) и нестационарный (*е*))

Случайные функции одной переменной (процессы) могут быть стационарными (рис. 21.1, *д*) и нестационарными (рис. 21.1, *е*), а случайные функции нескольких переменных (поля) — однородными и неоднородными.

Последовательность случайных событий или величин можно интерпретировать как случайный процесс $X(t)$, у которого область определения T — дискретное множество точек $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Для последовательности случайных событий пространство состояний дискретно (принимает два значения, соответствующих наступлению или не наступлению события), а для последовательности случайных величин оно может быть как непрерывным, так и дискретным.

В статистике гиперслучайных явлений рассматриваются последовательности гиперслучайных событий и величин (рис. 21.2, *а—г*). Они могут быть как однородными (имеющими одинаковые законы распределения при фиксированных статистических условиях: рис. 21.2, *а*, *в*), так и неоднородными (имеющими разные законы распределения при фиксированных условиях: рис. 21.2, *б*, *г*).

Гиперслучайные процессы могут быть стационарными (описываться одним законом распределения при фиксированных статистических условиях: рис. 21.2, *д*) и нестационарными (описываться изменяющимся во времени законом распределения при фиксированных условиях: рис. 21.2, *е*). Также гиперслучайные поля могут быть однородными и неоднородными.

21.3. ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моменты $m_{x/g}$, m_{Sx}, m_{Ix}, m_{sx}, m_{ix}, $D_{x/g}$, D_{Sx}, D_{Ix}, D_{sx}, D_{ix} и пр. являются детерминированными характеристиками. Соответствующие же оценки $F^*_{x/g}(x)$, $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, $m^*_{x/g}$, m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, m^*_{sx}, m^*_{ix}, $D^*_{x/g}$, D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, D^*_{sx}, D^*_{ix} и пр. являются детерминированными, если получены по конкретной реализации гиперслучайной выборки $\vec{X}$, и гиперслучайными, если рассчитаны по генеральной совокупности гиперслучайной величины *X*.

Процедура формирования указанных оценок может строиться по следующей схеме. Для всего множества *G* условий *g* формируются выборки

$$\vec{x} = \{x_1, ..., x_N \,/\, g \in G\}.$$

По выборкам для каждых условий g в отдельности рассчитываются оценки условных характеристик и параметров: оценка условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценка условного математического ожидания $m^*_{x/g}$, оценка условной дисперсии $D^*_{x/g}$ и др. По оценкам условных функций распределения $F^*_{x/g}(x) \quad \forall g \in G$

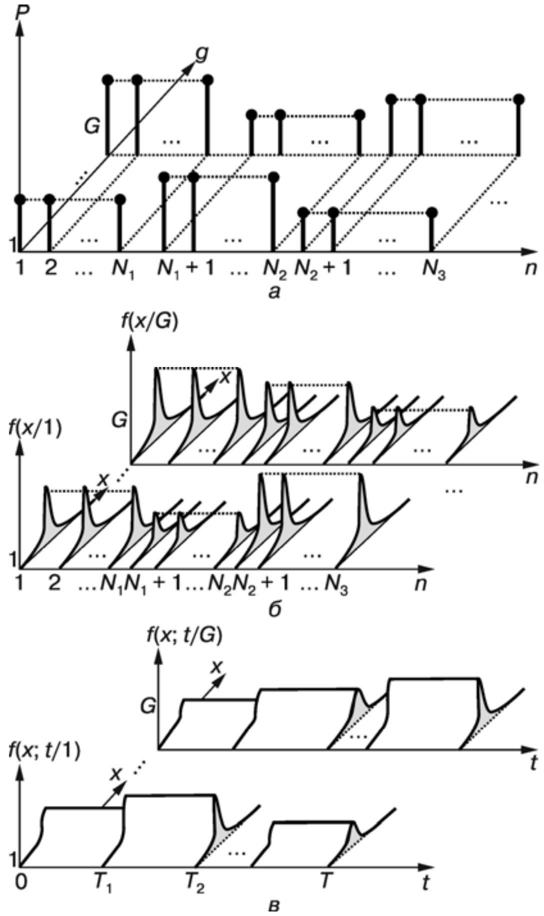


Рис. 21.3. Модели последовательности гиперслучайных событий (*а*), последовательности гиперслучайных величин (*б*) и гиперслучайного процесса (*в*) при медленном изменении условий

вычисляются оценки границ функции распределения:

$$F_{Sx}^{*}(x)=\sup_{g\in G}F_{x/g}^{*}(x),\quad F_{Ix}^{*}(x)=\inf_{g\in G}F_{x/g}^{*}(x)$$

и оценки характеристик, характеризующие эти границы: оценки математических ожиданий границ m_{Sx}^{*}, m_{Ix}^{*}, оценки дисперсий границ D_{Sx}^{*}, D_{Ix}^{*} и пр. По оценкам условных величин определяются оценки границ соответствующих величин, например, по оценкам математических ожиданий $m_{x/g}^{*}$ — оценки границ математического ожидания $m_{sx}^* = \sup_{g \in G} m_{x/g}^*$, $m_{ix}^* = \inf_{g \in G} m_{x/g}^*$, по оценкам условных дисперсий $D_{x/g}^*$ — оценки границ дисперсии $D_{sx}^* = \sup_{g \in G} D_{x/g}^*$, $D_{ix}^* = \inf_{g \in G} D_{x/g}^*$ и т.д.

Определенные трудности можно ожидать при формировании требуемой выборки $\vec{x} = \{x_1, ..., x_N / g \in G\}$ из-за сложности обеспечения, контроля и поддержания условий $g \in G$. Однако вопрос облегчается тем, что для расчета ряда искомых характеристик не требуются знания того, в каких именно условиях получены условные характеристики. Главное, чтобы на уровне условных характеристик были представлены все возможные условия g множества G и в массив данных, используемый для расчета условных характеристик в конкретных условиях, не попадали данные, соответствующие другим условиям.

Обычно последнее требование легко обеспечить, поскольку условия, хотя и изменяются зачастую непрерывно, но достаточно медленно, и поэтому на основе некоторой априорной информации можно указать максимальное число последовательных элементов $N_{\max}$, для которых условия будут практически неизменными (рис. 21.3). Это позволяет собирать данные на достаточно большом интервале наблюдения, не заботясь о том, каковы в конкретный момент времени условия и в какой последовательности они чередуются. Далее полученные данные можно разделять на фрагменты по $N_{\max}$ последовательных элементов и использовать для расчета искомых оценок. Главное при таком подходе — обеспечить охват всех возможных условий наблюдения.

21.4. СХОДИМОСТЬ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК

Важным свойством ряда гиперслучайных оценок является их сходимость к определенным величинам и характеристикам.

Рассмотрим гиперслучайную величину X. Пусть $X_1, ..., X_N$ — выборка гиперслучайной величины X объемом N, Θ^* / g — сформированная по выборке в условиях g случайная оценка (статистика), *обладающая свойством сходимости* по вероятности к числовому параметру θ / g.

Тогда гиперслучайная оценка $\Theta^*=\{\Theta^*/g\in G\}$ сходится по вероятности (в обобщенном смысле) к множеству чисел $\theta=\{\theta/g\in G\}$ (см. параграф 18.4), а границы оценки $\Theta_s^*=\sup\limits_{g\in G}\Theta^*/g$, $\Theta_i^*=\inf\limits_{g\in G}\Theta^*/g$ — к соответствующим границам $\theta_s=\sup\limits_{g\in G}\theta/g$, $\theta_i=\inf\limits_{g\in G}\theta/g$. В частности, когда в качестве рассматриваемых числовых параметров выступают моменты, оценки границ математического ожидания m_{sx}^*, m_{ix}^* сходятся к границам математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, а оценки границ дисперсии D_{sx}^*, D_{ix}^* — к границам дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Сходимость оценки функции распределения случайной величины к функции распределения этой величины определяется основной теоремой математической статистики — теоремой Гливенко (см. параграф 4.1).

Из этой теоремы следует, что при $N\to\infty$ оценки эмпирических условных функций распределения $F_{x/g}^*(x)$ $\forall g\in G$ гиперслучайной величины X сходятся к соответствующим условным функциям распределения $F_{x/g}(x)$. Поэтому оценки границ гиперслучайной функции распределения $F_S^*(x)$, $F_I^*(x)$ сходятся к границам функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$. Если моменты границ $F_S(x)$, $F_I(x)$ существуют, то соответствующие оценки моментов границ сходятся к моментам границ. В частности, оценки математического ожидания границ m_{Sx}^*, m_{Ix}^* сходятся к математическому ожиданию границ m_{Sx}, m_{Ix}, оценки дисперсии границ D_{Sx}^*, D_{Ix}^* — к дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix} и т.д.

Однако в действительности не все так просто.

В параграфе 4.1 обращено внимание на то, что при отсутствии у случайной величины моментов оценки моментов не сходятся в обычном смысле к числам (поскольку моменты не существуют). Уже поэтому оценки моментов границ функции распределения гиперслучайной величины и оценки границ моментов могут не иметь обычных пределов.

Теоретически гиперслучайная оценка может сходиться в обычном смысле к числу, сходиться в обобщенном смысле к интервалу или расходиться (стремиться к бесконечности).

Экспериментальные исследования показывают (см. часть II), что реальные оценки на больших интервалах наблюдения не проявляют тенденции стремления ни к определенным конечным значениям, ни к бесконечно большим значениям. Они флуктуируют в некоторых диапазонах значений, иначе говоря, сходятся в обобщенном смысле к интервалам.

У разных оценок величина этих интервалов разная. У менее устойчивых оценок она больше, а у более устойчивых — меньше. Как правило, оценки границ изменения параметров, обладают большей стабильностью, чем оценки соответствующих параметров[1].

Любые модели, в том числе гиперслучайные, строят на основе ограниченного набора исходных данных о реальном объекте, причем, зачастую, довольно приближенных. Поэтому возможны разные варианты представления объекта в рамках одного и того же модельного ряда.

Статистически неустойчивая оценка может быть описана с помощью гиперслучайной величины, у которой составляющие случайные величины могут быть как статистически устойчивыми по отношению к определенным параметрам и характеристикам, так и статистически неустойчивыми.

Удобным вариантом описания статистически неустойчивой оценки является представление ее гиперслучайной величиной X, у которой все составляющие случайные величины X/g статистически устойчивы по отношению к рассматриваемым параметрам и характеристикам. При этом нарушения статистической устойчивости моделируются исключительно вариациями условий g.

[1] Это обстоятельство послужило побудительным мотивом разработки первых гиперслучайных моделей.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РАСХОДЯЩИХСЯ И МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные положения теории гиперслучайных явлений, изложенные в части III монографии, затрагивают малоизученную область математики, касающуюся нарушения сходимости и многозначности.

Разработанные в ее рамках методы и подходы применительно к задачам статистики могут быть использованы для построения по типу классического математического анализа однозначных непрерывных функций *математического анализа расходящихся и многозначных функций*.

Этот математический анализ может найти применение также при решении разнообразных научных и технических задач, причем не только статистических.

Четвертая часть монографии посвящена основам этой зарождающейся математической теории.

Глава 22

РАСХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Понятие предела сходящейся числовой последовательности обобщено на случай расходящихся последовательностей и расходящихся функций. В отличие от обычного предела, принимающего обязательно единственное значение, обобщенный предел принимает множество значений. Для расходящейся числовой последовательности введено понятие спектра предельных точек. Доказана теорема о последовательности средних.

22.1. ПРОБЛЕМА НАРУШЕНИЯ СХОДИМОСТИ

Нарушение статистической устойчивости физических процессов проявляется в нарушении сходимости выборочных средних. Рассмотрим этот вопрос с математической точки зрения.

Основополагающими понятиями современной математики являются понятия предела и сходимости. Подавляющее большинство математических результатов получено на основе этих понятий. С их помощью вводятся, например, понятия равномерной сходимости, непрерывной функции, производной, интеграла и др.

Существенным требованием в классических определениях предела функции, заданной на множестве действительных чисел, и сходимости числовой последовательности к пределу является *обязательное существование единственного предела. Если единственного предела нет*, то считают, что *функция* или *последовательность предела не имеет* или что она *расходится*.

Далеко *не все последовательности и функции имеют пределы*. К расходящимся, например, относятся статистически неустойчивые процессы, рассмотренные выше, хаотические процессы со странными аттракторами и другие.

Отсутствие сходимости — серьезная проблема, касающаяся многих математических объектов. Однако до сих пор она мало изучена. В основном, обсуждается она в рамках теории пределов и в связи с нарушением сходимости расходящихся рядов и интегралов [Ильин, Садовничий, Сендов, 1985, Корн, Корн, 1973, Фихтенгольц, 1958, Харди, 1951].

Особый интерес представляют расходящиеся числовые последовательности $\{x_n\}$, члены которых x_n при увеличении номера n то возрастают, то убывают, а также расходящиеся функции $x(t)$, значения которых при приближении аргумента t к некоторому значению t_0 колеблются в определенных пределах.

Отсутствие сходимости не означает, что о поведении последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ или функции $x(t)$ при $t \to t_0$ ничего сказать нельзя. Это не так. Заметим, что *предел — лишь один из множества параметров, характеризующих последовательность или функцию при предельном переходе.*

Как следует из двух первых частей монографии, выборочные средние реальных процессов расходятся. Поиск эффективных методов описания реальных процессов привел к теории гиперслучайных явлений, краткое изложение которой приведено в части III.

Развитие и обобщение методов этой теории может быть полезным для решения многих задач, в том числе лежащих вдали от задач статистики.

Целью настоящей главы является систематизация известных и изложение новых результатов, касающихся нарушения сходимости.

22.2. ЧАСТИЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Понятие предела обычно вводится через понятие предела *однозначной функции* и определяется следующим образом.

Определение 1 (Коши). Число a называется *пределом функции* $x(t)$ при $t \to t_0$ ($\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0 < |t - t_0| < \delta$ (δ-окрестности точки t_0) функция $x(t)$ определена и $|x(t) - a| < \varepsilon$.

Аналогично определяются понятия предела для функции $x(t)$ при t, стремящемся к плюс или минус бесконечности ($t \to +\infty$, $t \to -\infty$), а также понятия левостороннего и правостороннего пределов.

Подобным образом вводится понятие сходимости последовательности к пределу.

Определение 2. Число a называется *пределом числовой последовательности*

$$X = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \tag{22.1}$$

($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Доказано, что если предел последовательности или функции существует, то он единственен.

Наличие у бесконечной последовательности X предела a означает, что в ε-окрестности точки a сосредоточено бесконечное количество ее членов (причем не обязательно одинаковых), а вне этой окрестности находится лишь конечное число членов.

Необходимое и достаточное условия сходимости последовательности определяются следующей теоремой.

Теорема 1 (Больцано—Коши). Последовательность (22.1) имеет конечный предел тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что неравенство $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ выполняется, как только $n > N$ и $n' > N$.

Тем самым эта теорема утверждает, что для существования предела необходимо и достаточно, чтобы члены последовательности неограниченно сближались по мере увеличения их номеров.

Справедлива аналогичная теорема и для функции.

Теорема 2 (Больцано—Коши). Функция $x(t)$ при $t \to t_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ выполняется, как только $|t - t_0| < \delta$, $|t' - t_0| < \delta$.

Заметим, что эти теоремы распространяются и на случай бесконечных пределов.

Важную роль в теории пределов играют подпоследовательности.

Определение 3. *Подпоследовательностью* или *частичной последовательностью* называется любая бесконечная последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{22.2}$$

сформированная из исходной последовательности (22.1) путем отбрасывания части ее членов *с сохранением порядка следования оставшихся членов.*

Из определения следует, что последовательность индексов $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ подпоследовательности (22.2) представляет собой последовательность возрастающих натуральных чисел ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$).

Определение 4. *Частичным m-м пределом последовательности* и *частичным m-м пределом функции* называются пределы a_m частичных m-х последовательностей, сформированных соответственно из исходной последовательности и исходной функции.

Частичные последовательности так же, как исходные последовательности, могут не иметь предела.

Известен целый ряд теорем для подпоследовательностей и функций, в частности, следующие [Ильин, Садовничий, Сендов, 1985, Фихтенгольц, 1958].

Теорема 3. Если последовательность (22.1) (или функция $x(t)$) имеет определенный предел a (конечный или бесконечный), то тот же предел a имеет и порожденная этой последовательностью (функцией) частичная последовательность.

Заметим, что в общем случае *обратное утверждение неверно.*

Определение 5. *Сходящейся последовательностью* называют последовательность (22.1), имеющую предел при $n \to \infty$, а *сходящейся функцией* в точке $t = t_0$ — функцию, имеющую предел в этой точке. Последовательности и функции, не удовлетворяющие этому требованию, называют *расходящимися.*

Расходящаяся функция может быть сходящейся в некотором множестве точек и расходящейся в другом множестве точек.

В расходящейся последовательности или функции можно выделить множество частичных последовательностей с разными частичными пределами.

Среди множества частичных пределов существуют наименьший и наибольший пределы.

Определение 6. *Наименьшим и наибольшим пределами последовательности* (*22.1*) (*или функции* $x(t)$) называются соответственно наименьший и наибольший частичные пределы подпоследовательностей ($\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ для последовательности (22.1) или $\lim\limits_{t\to t_0}\inf x(t) = \varliminf\limits_{t\to t_0} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\sup x(t) = \varlimsup\limits_{t\to t_0} x(t)$ для функции).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Любая бесконечная последовательность (функция) имеет наибольший и наименьший пределы. Равенство этих пределов является необходимым и достаточным условиями для существования предела этой последовательности (функции).

Заметим, что в метрическом пространстве *частичные пределы трактуются как предельные точки*, а *наименьший и наибольший пределы — как соответственно нижняя и верхняя предельные точки.* В случае, когда частичный предел последовательности равен бесконечности (со знаком плюс или минус), предельная точка располагается на бесконечности (плюс или минус).

Известно [Фихтенгольц, 1958], что любая бесконечная последовательность имеет хотя бы один частичный предел. Этот предел может быть конечным или бесконечным. Для ограниченной последовательности справедлива следующая лемма Больцано—Вейерштрасса.

Теорема 5 (Больцано—Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности всегда можно выделить такую частичную последовательность, которая сходилась бы к конечному пределу.

22.3. ПРИМЕРЫ РАСХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ

Примером расходящейся последовательности может служить чередующаяся последовательность чисел, одинаковых по модулю, но разного знака, например, последовательность

$$+1, -1, +1, -1, \ldots . \tag{22.3}$$

Эта последовательность имеет два частичных предела, равных $+1$ и -1.

Примерами расходящихся функций могут служить следующие функции:

$$x(t) = \sin \omega_1 t\ ,\ \ t \geq 0\ , \tag{22.4}$$

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{\omega_1(t - t_0)}\right), \quad 0 \leq t < t_0, \tag{22.5}$$

флуктуирующая функция, определенная на интервале $[0, t_0)$, у которой полупериоды возрастания значений описываются выражением (22.5), а полупериоды убывания — линейной функцией:

$$x(t)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_0)}\right), & t\in[t'_k,t''_k),\\ 1+\dfrac{2(t''_{k-2}-t)}{t'_k-t''_{k-2}}, & t\in[t''_{k-2},t'_k),\end{cases}\tag{22.6}$$

где $\omega_1>0$, $t_0>0$, k — четное, t'_k, t''_k — значения аргумента t, при котором на k-м полупериоде (возрастания своих значений) функция принимает соответственно минимальное и максимальное значения:

$$t'_k=t_0+\frac{1}{\left[-\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right]\omega_1},\quad t''_k=t_0+\frac{1}{\left[\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right]\omega_1},\tag{22.7}$$

$$x(t)=\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\frac{1}{\omega_1(t-t_{02})}\right),\ t\ge 0,\ t\ne t_{01},\ t\ne t_{02},\tag{22.8}$$

$$x(t)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_{02})}\right) & \text{при } t\ge 0,\ t<t_{01} \text{ или } t>t_{02},\\ \sin\left(\dfrac{1}{\omega_2(t-t_{01})}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{\omega_2(t-t_{02})}\right) & \text{при } t_{01}<t<t_{02},\end{cases}\tag{22.9}$$

где $\omega_1>0$, $\omega_2>0$, $0<t_{01}<t_{02}$.

Функция (22.4) расходится при $t\to\infty$, функции (22.5) и (22.6) — при $t\to t_0$, а функции (22.8), (22.9) — при $t\to t_{01}$ и $t\to t_{02}$. Графики функций (22.5), (22.6) и (22.8), (22.9) приведены на рис. 22.1 (соответственно *а—г*).

В точках нарушения сходимости функции (22.4)—(22.6) и (22.8), (22.9) имеют несчетное число частичных пределов. У функций (22.4)—(22.6) эти пределы находятся в интервале $[-1, 1]$, а у функций (22.8), (22.9) — в интервале $[-2, 2]$.

Последовательность — функция дискретного аргумента. Поэтому, когда аргумент t принимает счетное число дискретных значений, выражения (22.4)—(22.6) и (22.8), (22.9) описывают бесконечные последовательности. В зависимости от параметров этих последовательностей количество частичных пределов у них

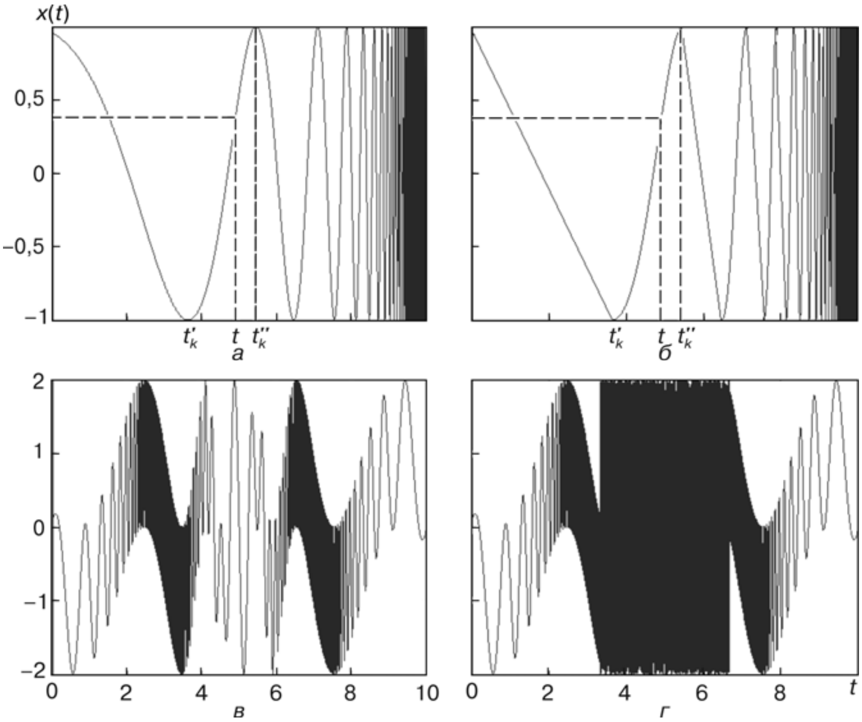


Рис. 22.1. Расходящиеся функции (22.5), (22.6) и (22.8), (22.9) при $\omega_1 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\omega_2 = 2 \cdot 10^{-5}$, $t_0 = 10$, $t_{01} = 3$, $t_{02} = 7$

может быть как бесконечным, так и конечным числом. Например, у последовательностей, описываемых выражениями (22.5) и (22.6) при $t = t_0 + \Delta t / n$, $\omega_1 = 2/(\pi \Delta t)$, $n = 1, 2, \ldots$, оно конечно — равно трем $(-1, 0, 1)$.

22.4. СПЕКТР ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим бесконечную ограниченную числовую последовательность (22.1). Пусть a_I и a_S — соответственно нижняя и верхняя предельные точки последовательности.

Информативными параметрами, характеризующими последовательность, являются количество предельных точек, среднее значение $a_0 = \frac{a_S + a_I}{2}$, длина интервала $\Delta a = a_S - a_I$, в котором находятся предельные точки, и др.

Если последовательность сходится к определенному числу a, то $a_S = a_I = a_0 = a$, а $\Delta a = 0$; если же последовательность расходится, то границы различаются ($a_S \neq a_I$), а $\Delta a \neq 0$. В последнем случае аналогом предела может выступать его спектр.

Определение 7. *Спектром* $\tilde{S}_x$ *предельных точек* (*частичных пределов*) числовой последовательности (22.1) будем называть множество всех ее предельных точек.

Заметим, что некоторые величины и функции (в частности спектр и рассматриваемые далее функции распределения) могут быть как однозначными, так и многозначными. В тех случаях, когда они оказываются многозначными или могут быть многозначными, над буквами, их обозначающими, будем ставить знак тильды (как в случае спектра $\tilde{S}_x$).

В любом случае, рассматривая *сходимость последовательности в обобщенном смысле*, будем подразумевать сходимость ее подпоследовательностей к соответствующим предельным точкам, формулировать этот факт как сходимость к спектру предельных точек и аналитически записывать в виде *обобщенного предела* $\tilde{S}_x = \underset{n \to \infty}{\mathrm{LIM}}\, x_n$.

Сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку. *Расходящаяся последовательность может иметь конечное или бесконечное число таких точек.*

Спектр последовательности может быть *дискретным* (состоять из *изолированных предельных точек*, не имеющих в своей окрестности других предельных точек), *непрерывным* (состоять из *всюду плотного множества предельных точек*) или *смешанным* (*дискретно-непрерывным*). Дискретный спектр может быть конечным или бесконечным. Бесконечный дискретный спектр содержит счетное число предельных точек.

Заметим, что спектр последовательности не изменяется при исключении или добавлении любого конечного числа членов последовательности.

22.5. ТЕОРЕМА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СРЕДНИХ

Теорема 6. Пусть бесконечная ограниченная числовая последовательность (22.1) имеет конечный предел a. Тогда тот же предел a имеет последовательность средних $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, где

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (22.10)$$

Доказательство теоремы состоит в следующем. Учтем, что по условию теоремы для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Рассмотрим величину $|y_n - a|$ для $n > N$. Принимая во внимание равенство (22.10), запишем

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\Big[|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_N - a| + \big(|x_{N+1} - a| + \ldots + |x_n - a|\big)\Big].$$

Каждый модуль в круглых скобках этого выражения меньше ε. Поэтому

$$|y_n - a| < \frac{1}{n}\Big[|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_N - a| - N\varepsilon\Big] + \varepsilon \,.$$

Из этого неравенства следует, что при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ величина $y_n \to a$.

Заметим, что если последовательность средних $y_1, y_2, \ldots$ имеет предел, то не обязательно сходится исходная последовательность (22.1). В качестве примера можно привести расходящуюся последовательность (22.3), последовательность средних которой имеет предел, равный нулю.

Таким образом, *необходимым, но недостаточным, условием сходимости последовательности является сходимость последовательности ее средних.*

ОПИСАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ

Приведен способ описания расходящихся последовательностей и функций с помощью функций распределения. Доказана теорема о спектре частот значений разряда последовательности. Приведены примеры описания расходящихся функций.

23.1. РАСХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

23.1.1. Разряд, частота значений и спектр частот значений

Спектр детерминированной последовательности может быть определен на основе разбиения множества членов последовательности на разряды и вычисления для каждого разряда множества частичных пределов (предельных точек) последовательности, сформированной из членов, попадающих в разряд.

Определение 1. Под *разрядом* (*классовым интервалом*) конечной или бесконечной последовательности понимается любой фиксированный интервал значений членов рассматриваемой последовательности.

Особый интерес представляют разряды с перекрытием, описываемые интервалами

$$(-\infty, x^1), (-\infty, x^2), \ldots, (-\infty, x^{R-1}), (-\infty, +\infty)\,, \qquad (23.1)$$

где x^r — правый конец *r*-го разряда ($r = \overline{1, R-1}$).

В системе координат (n, x) (где $n = 1, 2, \ldots$ — число членов исходной последовательности $X_n = x_1, x_2, \ldots, x_n$) *r*-му разряду соответствует подпоследовательность X_n^r, образованная из членов последовательности X_n, попавших в рассматриваемый разряд (темная неограниченная снизу полоса на рис. 23.1, *а*).

Определение 2. *Частотой значений* p_n^r *r-го разряда последовательности* X_n (рис. 23.1, *б*) будем называть отношение количества

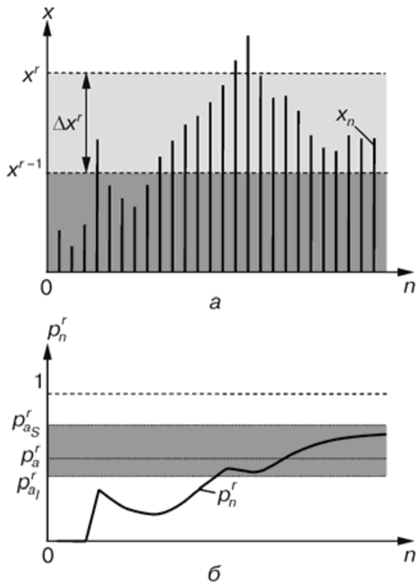


Рис. 23.1. Исходная последовательность X_n (*а*) и соответствующая последовательность частот значений $\left\{p_n^r\right\}$ (*б*)

n^r ее членов, попадающих в r-й разряд, к общему числу членов n последовательности X_n: $p_n^r = \dfrac{n^r}{n}$.

Значения частоты p_n^r лежат в интервале $[0,1]$.

Из множества частот p_n^r для фиксированного разряда r и $n = 1, 2, \ldots$ можно образовать последовательность $\left\{p_n^r\right\}$.

Заметим, что эта последовательность *не обязательно сходится*, т.е. *может иметь множество предельных точек.*

Определение 3. *Спектром* $\tilde{S}_p^r$ *частот значений r-го разряда бесконечной последовательности X* (22.1) будем называть множество всех частичных пределов (предельных точек) последовательности частот $\left\{p_n^r\right\}$ при $n \to \infty$: $\tilde{S}_p^r = \underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, p_n^r$.

Из того, что любая бесконечная последовательность имеет хотя бы один частичный предел, следует, что при $n \to \infty$ спектр последовательности $\left\{p_n^r\right\}$ имеет, как минимум, одну предельную точку.

Обратим внимание, что при $n \to \infty$ в формировании любой предельной точки p_a^r последовательности $\left\{p_n^r\right\}$ существенную роль играет лишь бесконечное число членов, находящихся в ее окрестности.

В разряд может попадать как бесконечное, так и конечное число элементов бесконечной последовательности *X*. Если для разряда *r* это число конечное, то спектр $\tilde{S}_p^r$ содержит один нулевой предел.

23.1.2. Теорема о спектре частот значений разряда последовательности

С увеличением числа членов последовательности n количество n^r членов, попадающих в r-й разряд, не убывает. Вследствие этого оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 1. Если спектр $\tilde{S}_p^r$ частот значений r-го разряда бесконечной последовательности X содержит две предельные точки $p_{a_1}^r$, $p_{a_2}^r$ ($p_{a_1}^r < p_{a_2}^r$), то предельной точкой является также точка p_a^r, лежащая в интервале $p_{a_1}^r < p_a^r < p_{a_2}^r$.

Для доказательства рассмотрим произвольное число p_a^r, удовлетворяющее указанному неравенству. Заметим, что при неограниченном увеличении числа элементов n величина p_n^r бесконечное число раз оказывается то меньше, то больше числа p_a^r, а значения p_n^r изменяются таким образом, что модуль приращения $\Delta p_n^r = p_{n+1}^r - p_n^r$ меньше величины $1/n$.

Сформируем из последовательности $\{p_n^r\}$ новую подпоследовательность $\{p_{n_k}^r\}$ путем сохранения членов, удовлетворяющих следующим условиям:

членом новой подпоследовательности может быть только член p_n^r исходной последовательности $\{p_n^r\}$, удовлетворяющий условию $p_n^r < p_a^r < p_{n+1}^r$,

каждый последующий член $p_{n_{k+1}}^r$ новой подпоследовательности больше предыдущего ее члена $p_{n_k}^r$ ($p_{n_k}^r < p_{n_{k+1}}^r$).

Эти условия гарантируют, что при увеличении номера k модуль отклонения $p_{n_k}^r$ от p_a^r уменьшается.

Поскольку $\left|p_a^r - p_{n_k}^r\right| < \dfrac{1}{n_k}$, то при $k \to \infty$ (тогда $n_k \to \infty$) приращение $\left|p_a^r - p_{n_k}^r\right| \to 0$, т.е. p_a^r является пределом подпоследовательности $\left\{p_{n_k}^r\right\}$.

Таким образом, p_a^r является предельной точкой последовательности X, что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если спектр $\tilde{S}_p^r$ частот значений r-го разряда последовательности X при $n \to \infty$ имеет более одной предельной точки, то он непрерывный и содержит несчетное число предельных точек, находящихся между нижней $p_{a_I}^r$ и верхней $p_{a_S}^r$ предельными точками (затемненная область на рис. 23.1, *б*).

Следствие 2. Если спектр $\tilde{S}_y$ последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ средних значений последовательности X (см. формулу (22.10)) имеет более одной предельной точки, то он непрерывный и содержит несчетное число предельных точек, находящихся между нижней и верхней предельными точками.

23.1.3. Интервальные функции распределения значений последовательности

Определение 4. *R-разрядной интервальной функцией распределения значений конечной последовательности* X_n будем называть функцию

$$F_n^R(x) = \begin{cases} p_n^r, & \text{если} \quad x < x^r \quad (r = \overline{1, R-1}), \\ 1, & \text{если} \quad x \ge x^{R-1}, \end{cases}$$

сформированную из частот значений p_n^r последовательности X_n для перекрывающихся разрядов $(-\infty, x^1)$, $(-\infty, x^2)$, …, $(-\infty, x^{R-1})$, $(-\infty, +\infty)$.

Эту функцию (рис. 23.2, *а*) можно рассматривать как *интервальную статистическую функцию распределения* теории вероятностей. Как и последняя, она неубывающая и ее значения лежат в интервале $[0,1]$.

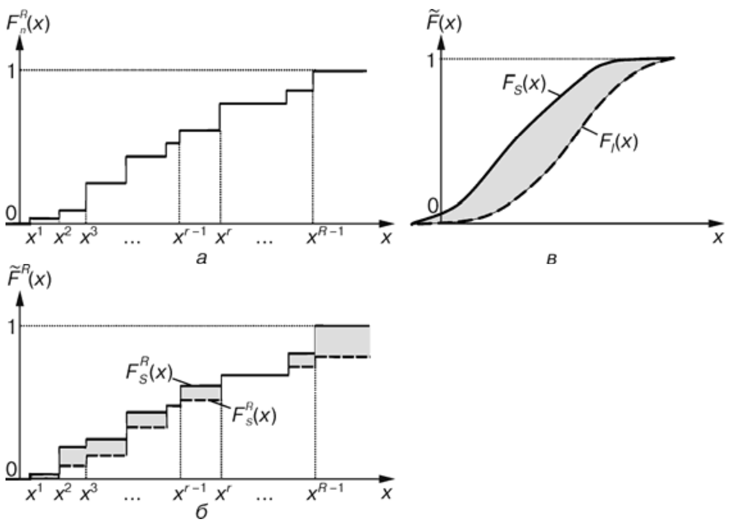


Рис. 23.2. *R*-разрядная интервальная функция распределения значений конечной последовательности $F_n^R(x)$ (*а*), спектр $\tilde{F}^R(x)$ *R*-разрядной интервальной функции распределения значений бесконечной последовательности (*б*) и спектр $\tilde{F}(x)$ функции распределения предельных точек бесконечной последовательности (*в*)

При $n \to \infty$ функция $F_n^R(x)$ не обязательно сходится. *Нарушение сходимости приводит к многозначности.*

Определение 5. *R-разрядной интервальной функцией распределения значений бесконечной последовательности X* будем называть множество (спектр) $\tilde{F}^R(x)$ всех частичных пределов последовательности $\left\{F_n^R(x)\right\}$ R-разрядных интервальных функций распределения: $\tilde{F}^R(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, F_n^R(x)$ (рис. 23.2, *б*).

Определение 6. *Функцией распределения $\tilde{F}(x)$ предельных точек бесконечной последовательности X* будем называть множество всех частичных пределов последовательности $\left\{\tilde{F}^R(x)\right\}$ при устремлении максимального расстояния $\Delta x^r = x^r - x^{r-1}$ между верхними границами соседних разрядов (рис. 23.1, *а*) к нулю: $\tilde{F}(x) = = \underset{\max_r \Delta x^r \to 0}{\mathrm{LIM}}\, \tilde{F}^R(x)$ (рис. 23.2, *в*).

Функции $\tilde{F}^R(x)$ и $\tilde{F}(x)$ характеризуют плотность распределения предельных точек на оси x для соответственно R-разрядной и бесконечно-разрядной интервальных функций распределения. В общем случае *эти функции — многозначные*, хотя в частном случае могут быть и *однозначными*. Спектр $\tilde{F}^R(x)$ ограничен нижней $F_I^R(x)$ и верхней $F_S^R(x)$ границами (рис. 23.2, *б*), а спектр $\tilde{F}(x)$ — нижней $F_I(x)$ и верхней $F_S(x)$ границами (рис. 23.2, *в*).

Согласно следствию 1 теоремы 1 находящаяся между границами *зона неопределенности является непрерывной.*

23.1.4. Спектр предельных точек

Спектр предельных точек $\tilde{S}_x$ последовательности X можно рассматривать с другой точки зрения.

То, что функция распределения $\tilde{F}(x)$ представляет собой в общем случае многозначную функцию означает, что в общем случае спектр предельных точек $\tilde{S}_x$ — гиперслучайная величина. В частном случае, когда $\tilde{F}(x)$ — однозначная функция, спектр $\tilde{S}_x$ — случайная величина.

Если спектр $\tilde{S}_x$ является случайной величиной, то для его описания применимы методы теории вероятностей; если он представляет собой гиперслучайную величину, то — методы теории гиперслучайных явлений.

Для описания гиперслучайных величин используется целый ряд однозначных величин и функций, описанных в главе 15, в частности:

• границы функции распределения $F_I(x)$, $F_S(x)$ и плотности распределения границ:

$$f_I(x) = \frac{dF_I(x)}{dx}, \quad f_S(x) = \frac{dF_S(x)}{dx};$$

• моменты границ: математические ожидания границ m_I, m_S, дисперсии границ D_I, D_S и пр.;

• границы моментов: границы математического ожидания m_i, m_s, границы дисперсии D_i, D_s и пр.

23.2. РАСХОДЯЩИЕСЯ ФУНКЦИИ

Пусть в δ-окрестности точки $t = t_0$ определена однозначная функция $x = x(t)$, принимающая конечные значения. Пусть $\tilde{S}_x(t_0)$ — множество предельных точек (частичных пределов) этой функции при $t \to t_0$, а $x_I(t_0)$ и $x_S(t_0)$ — соответственно нижняя и верхняя предельные точки.

Определение 7. Множество $\tilde{S}_x(t_0)$ всех предельных точек функции при $t \to t_0$ будем называть *спектром предельных точек* (*спектром частичных пределов*) функции при $t \to t_0$.

Рассматривая *сходимость функции в обобщенном смысле, будем подразумевать сходимость ее подпоследовательностей к соответствующим предельным точкам*, формулировать этот факт как *сходимость к спектру предельных точек* и записывать аналитически выражением $\tilde{S}_x(t_0) = \underset{t \to t_0}{\mathrm{LIM}}\, x(t)$.

Величина $x_0(t_0) = \dfrac{x_S(t_0) + x_I(t_0)}{2}$ представляет собой середину интервала, в котором находятся все частичные пределы функции $x(t)$ при $t \to t_0$, а величина $\Delta x(t_0) = x_S(t_0) - x_I(t_0)$ — длину этого интервала (ширину спектра $\tilde{S}_x(t_0)$) (рис. 23.3).

Если функция имеет единственный предел a в точке $t = t_0$, то $x_S(t_0) = x_I(t_0) = a$, а $\Delta x(t_0) = 0$; если же функция расходится (не имеет единственного предела) в этой точке, то $x_S(t_0) \neq x_I(t_0)$ и $\Delta x(t_0) \neq 0$.

Заметим, что требования конечности значений функции не являются существенными. При бесконечных значениях нижняя предельная точка, верхняя предельная точка или обе эти точки могут принимать бесконечно большие по модулю значения.

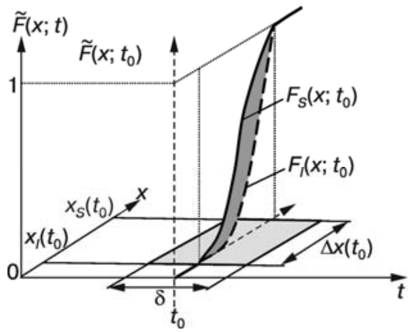


Рис. 23.3. Спектр предельных точек функции $\tilde{S}_x(t)$ при $t \to t_0$

Количество предельных точек функции может быть конечным, счетным или несчетным. Если спектр образует непрерывное всюду плотное множество точек, то имеет место *сходимость функции к интервалу*.

Для описания спектра $\tilde{S}_x(t)$ предельных точек функции $x(t)$ можно использовать многозначную (в общем случае) функцию распределения предельных точек $\tilde{F}(x;t)$, характеризуемую однозначными границами $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ (см. рис. 23.3).

Если в точке $t = t_0$ функция $x(t)$ сходится и имеет предел, равный a, то

$$F_I(x;t_0) = F_S(x;t_0) = \operatorname{sign}[x-a],$$

где $\operatorname{sign}[x]$ — функция единичного скачка.

В случае, когда функция распределения $\tilde{F}(x;t)$ — однозначная (спектр $\tilde{S}_x(t)$ представляет собой случайную функцию), границы $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ совпадают.

Как и в случае расходящейся последовательности, для описания расходящихся функций можно использовать однозначные величины и характеристики, в частности:

- границы функции распределения $F_I(x;t)$, $F_S(x;t)$ и плотности распределения границ:

$$f_I(x;t) = \frac{dF_I(x;t)}{dx}, \quad f_S(x;t) = \frac{dF_S(x;t)}{dx};$$

- моменты границ: математические ожидания границ $m_I(t)$, $m_S(t)$, дисперсии границ $D_I(t)$, $D_S(t)$ и пр.;
- границы моментов: границы математического ожидания $m_i(t)$, $m_s(t)$, границы дисперсии $D_i(t)$, $D_s(t)$ и пр. (см. главу 17).

Спектры предельных точек (частичных пределов) функции и их характеристики могут быть получены не только на основе двусторонних пределов, но и односторонних. Величины, соответствующие левосторонним пределам, будем обозначать знаком «минус», а соответствующие правосторонним пределам — знаком «плюс», например, левосторонний $\tilde{S}_x^-(t)$ и правосторонний $\tilde{S}_x^+(t)$ спектры, функции распределения предельных точек $\tilde{F}^-(x;t)$ и $\tilde{F}^+(x;t)$ соответственно левостороннего и правостороннего спектров, границы $F_I^-(x;t)$, $F_S^-(x;t)$ и $F_I^+(x;t)$, $F_S^+(x;t)$ функции распределения предельных точек соответственно левостороннего и правостороннего спектров.

Заметим, что в общем случае величины и характеристики, соответствующие левостороннему, правостороннему и двустороннему пределам, отличаются друг от друга, в частности, различаются спектры $\tilde{S}_x^-(t)$, $\tilde{S}_x^+(t)$ и $\tilde{S}_x(t)$.

23.3. ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

Для иллюстрации описанного способа представления расходящихся функций вычислим границы $F_I^-(x;t)$, $F_S^-(x;t)$ функции распределения предельных точек $\tilde{F}^-(x;t)$ левостороннего спектра $\tilde{S}_x^-(t)$ функции (22.5) в точке $t = t_0$. Для этого разделим функцию (22.5) на убывающие и возрастающие полупериоды.

Сформируем из возрастающих (четных) полупериодов числовую последовательность $\{P_k(x)\}$ ($k = 2,4,\dots$) с общим членом:

$$P_k(x) = \frac{t - t'_k}{t''_k - t'_k}, \tag{23.2}$$

где для k-го полупериода $[t'_k, t''_k]$ аргумент

$$t = t_0 + \frac{1}{\left[(-1)^k \arcsin x + \pi k\right]\omega_1}, \tag{23.3}$$

а t'_k и t''_k — минимальное и максимальное значения аргумента k-го полупериода, описываемые выражениями (22.7).

k-й член этой последовательности представляет долю k-го полупериода, занимаемого интервалом $[t'_k, t]$, определяемым фиксированным значением аргумента x.

Подставляя выражения (22.7) и (23.3) в формулу (23.2) и осуществляя предельный переход, можно получить

$$\lim_{k\to\infty} P_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x. \tag{23.4}$$

Аналогичные расчеты для нечетных фрагментов функции приводят к тому же пределу (23.4).

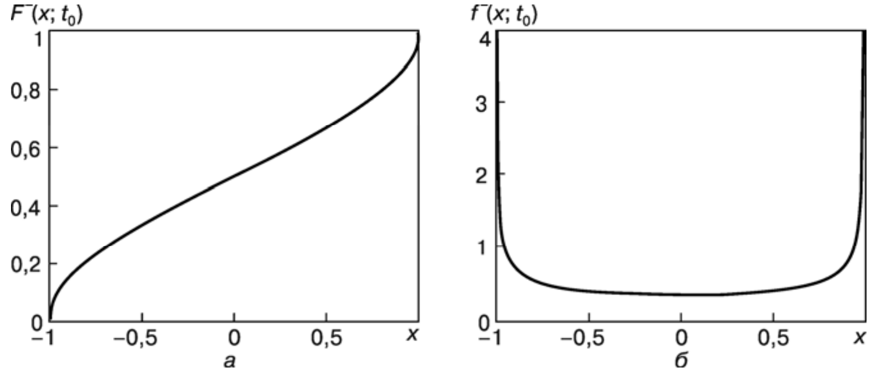


Рис. 23.4. Функция распределения (*а*) и плотность распределения (*б*) предельных точек левостороннего спектра $S_x^{-}(t)$ функции (22.5) в точке $t = t_0$

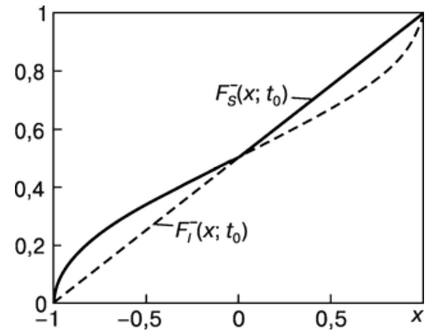


Рис. 23.5. Нижняя $F_I^{-}(x;t_0)$ и верхняя $F_S^{-}(x;t_0)$ границы функции распределения предельных точек левостороннего спектра $\tilde{S}_x^{-}(t)$ функции (22.6) в точке $t = t_0$

На основании теоремы 6 главы 22 (параграф 22.5) рассчитанный предел числовой последовательности $\{P_k(x)\}$ имеет и соответствующая последовательность $\{p_k(x)\}$ частот встречаемости значений функции, меньших x, на возрастающих ее фрагментах при $t \to t_0$.

Отсюда следует, что функция распределения предельных точек $F^{-}(x;t_0)$ — однозначная функция, описываемая правой частью выражения (23.4) (рис. 23.4, *а*). Соответствующая плотность распределения предельных точек

$$f^{-}(x;t_0) = \frac{dF^{-}(x;t_0)}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

(рис. 23.4, *б*).

Расчеты для нечетных фрагментов функции (22.6) приводят к выражению, отличающемуся от выражения (23.4):

$$\lim_{k\to\infty} P_k(x) = \frac{x+1}{2}. \tag{23.5}$$

При $x \neq 0$ значения функций (23.4) и (23.5) различаются между собой, а при $x = 0$ — совпадают. Поэтому на интервалах $-1 \le x < 0$, $0 < x \le 1$ функция распределения предельных точек $\tilde{F}^{-}(x;\, t_0)$ — многозначная, а при $x = 0$ — однозначная. Множество значений, которые принимает эта функция, ограничены границами

$$F_I^{-}(x;t_0) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & \text{если} \quad -1 \le x < 0, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$F_S^{-}(x;t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & \text{если} \quad -1 \le x < 0, \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(рис. 23.5).

МНОГОЗНАЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Рассмотрены различные варианты описания многозначных величин и функций. С помощью математического аппарата теории гиперслучайных явлений формализованы понятия многозначной величины и многозначной функции. Установлена связь между многозначностью и нарушением сходимости. Введены понятия спектров и функций распределения многозначных величин и функций.

24.1. ВАРИАНТЫ ОПИСАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕЛИЧИН И ФУНКЦИЙ

В математике различают однозначные и многозначные величины и функции.

Однозначная величина принимает конкретное значение, а многозначная — множество значений. Однозначная функция устанавливает между точками области определения и области значений однозначное соответствие (рис. 24.1, *а*), *а многозначная функция — многозначное соответствие* (рис. 24.1, *б*).

В дальнейшем будем полагать, что значения многозначной величины, аргумент и значения многозначной функции — *скалярные действительные величины.*

Частными случаями многозначной функции являются *многозначная числовая последовательность*, представляющая собой

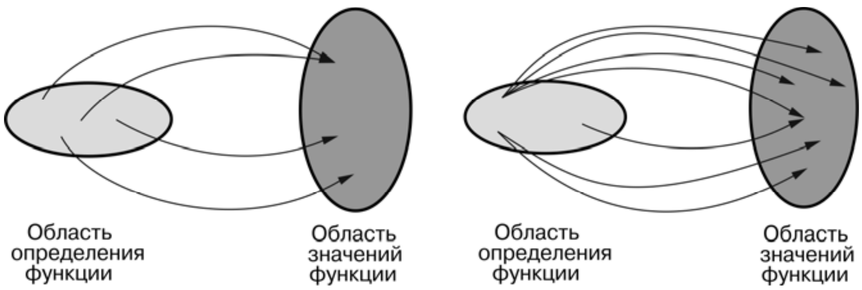


Рис. 24.1. Однозначная (*а*) и многозначная (*б*) функции

многозначную функцию целочисленного аргумента, и многозначная величина — вырожденная многозначная функция, область определения которой — число.

Факт многозначности будем подчеркивать знаком тильда над буквой, обозначающей соответствующую величину, последовательность или функцию.

24.1.1. Описание многозначных функций с помощью ветвей

Известны разные подходы описания многозначных величин и функций. Один из них, широко используемый в тригонометрии, теории специальных функций, теории функций комплексной переменной и других разделах математики, основан на понятии ветви функции.

Ветвью многозначной функции называют [Корн, Корн, 1973] однозначную непрерывную функцию в области ее определения.

Многозначность функции трактуют или как повышенную размерность области значений функции (рис. 24.2, *а*), или как повышенную размерность области ее определения (рис. 24.2, *б*).

В первом случае многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ аргумента t рассматривают как параметрически заданную однозначную непрерывную функцию $x_g(t)$, параметр которой $g \in G$ (где G — конечное или счетное множество) характеризует g-ю ветвь многозначной функции.

В принципе, таким путем можно описывать многозначную функцию с несчетным числом ветвей (при этом G — несчетное множество).

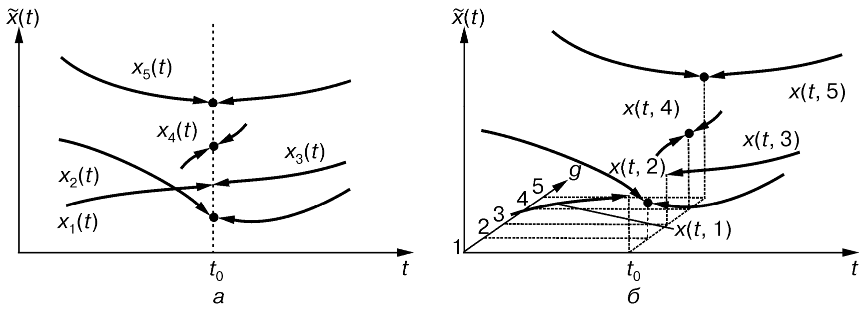


Рис. 24.2. Варианты представления многозначной функции: *а* — путем расширения множества значений (с помощью ветвей), *б* — путем расширения области определения (параметрическим путем)

Во втором случае многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ представляют однозначной непрерывной функцией $x(t,g)$ двух переменных t и g. При фиксации аргумента g получается непрерывная зависимость от аргумента t, которую можно трактовать как g-ю ветвь функции $\tilde{x}(t)$.

Таким образом, в обоих случаях функция $\tilde{x}(t)$ оказывается представимой конечным, счетным или несчетным множеством ветвей. При этом допускается, что

- ветви многозначной функции могут иметь общие точки: пересекаться, касаться друг друга и некоторые их фрагменты совпадать;
- области определения ветвей могут быть разными;
- возможны различные варианты разложения функции по ветвям.

Описание многозначной функции с помощью ветвей удобно и наглядно, прежде всего, когда их число конечное или, как минимум, счетное. При несчетном количестве наглядность теряется и возникают сложности разграничения ветвей.

24.1.2. Описание многозначных величин и функций вероятностными и интервальными методами

Другой подход описания многозначных величин и функций предлагает теория вероятностей. Одними из главных математических объектов этой теории являются случайная величина и случайная функция. Случайную величину можно рассматривать как многозначную величину, для которой определена вероятностная мера. Случайная функция трактуется или как множество случайных величин, зависящих от аргумента функции, или как множество однозначных реализаций многозначной функции, для которого определена вероятностная мера (см. параграф 2.2).

В рамках интервального анализа многозначная величина представляется интервалом или мультиинтервалом (множеством интервалов) [Шарый, 2010]. Многозначная функция рассматривается как интервальнозначная функция интервальнозначных аргументов [Калмыков, Шокин, Юлдашев, 1986].

24.1.3. Описание многозначных величин и функций гиперслучайными методами

Еще один подход описания многозначных величин и функций предлагает теория гиперслучайных явлений, ориентированная на изучение физических явлений, не характеризуемых однозначными вероятностными характеристиками.

Для описания физических явлений в рамках этой теории вместо конкретных вероятностных параметров и характеристик используются множества возможных их вариантов. В качестве абстрактных математических объектов выступают гиперслучайная величина — множество случайных величин и гиперслучайная функция — множество случайных функций. Вероятностная мера рассматриваемых случайных величин и функций зависит от параметра, значения которого принадлежат конечному, счетному или несчетному множеству.

Математический аппарат теории гиперслучайных явлений может быть использован для описания детерминированных многозначных величин и функций. Рассмотрим математические основы этого подхода [1].

24.2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕЛИЧИН И ФУНКЦИЙ

Многозначность тесно связана с нарушением сходимости. Поэтому дальнейшее изложение опирается на материалы двух предыдущих глав.

Пусть имеется детерминированная величина $x(p)$, значение которой зависит от параметра $p \in P$, где P — окрестность точки p_0. Для всех $p \neq p_0$ эта величина принимает однозначные значения.

Рассмотрим однозначную последовательность значений $\{x^n\} = x^1, x^2, \ldots, x^n$ величины $x(p)$ при $p \to p_0$. Обобщенный пре-

[1] Известны и другие подходы к проблеме описания многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [Борисович, Гельман, Мышкис, Обуховский, 2011, Половинкин, Балашов, 2004, Пшеничный, 1980]). Они отличаются от рассматриваемого в дальнейшем. Поэтому останавливаться на них не будем.

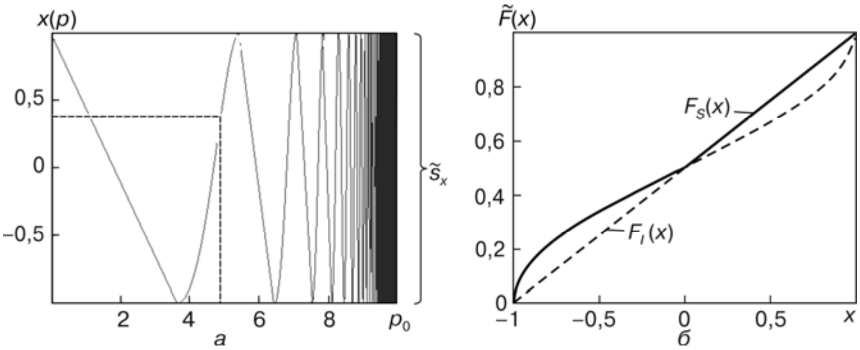


Рис. 24.3. Представление многозначной величины с помощью обобщенного предела: *а* — спектр значений $\tilde{S}_x$, *б* — функция распределения $\tilde{F}(x)$ и ее границы $F_S(x)$, $F_I(x)$

дел этой последовательности $\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x^n = \underset{p\to p_0}{\mathrm{LIM}}\, x(p)$ может стремиться к числу или к множеству чисел.

Определение 1а. Многозначную величину $\tilde{x}$ будем трактовать как обобщенный предел $\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x^n$ порождающей последовательности $\{x^n\}$ и представлять ее спектром значений $\tilde{S}_x$ и функцией распределения этих значений $\tilde{F}(x)$ (рис. 24.3).

Функция распределения $\tilde{F}(x)$ может быть как однозначной, так и многозначной.

Если функция распределения однозначная ($\tilde{F}(x) = F(x)$) и кусочно-непрерывная, то существует плотность распределения $f(x) = dF(x)/dx$.

Более строго многозначную величину можно задать с помощью гипервероятностного пространства, описываемого тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — множество элементарных событий (например, значений x многозначной величины $\tilde{x}$), $\Im$ — борелевское поле событий (σ-алгебра подмножеств событий), G — множество условий $g \in G$, а P_g — мера подмножеств событий, зависящая от условий g.

Определяемая таким образом многозначная величина является гиперслучайной величиной. Поэтому многозначную величину можно определить следующим образом.

Определение 1б. *Многозначная величина* $\tilde{x}$ *— гиперслучайная величина*, задаваемая спектром значений $\tilde{S}_x$ и функцией распределения $\tilde{F}(x)$ (см. рис. 24.3).

В частном случае, когда условия единственные, многозначная величина может рассматриваться как случайная величина и задаваться с помощью вероятностного пространства, описываемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где P — мера подмножеств событий. Тогда многозначная величина $\tilde{x}$ описывается спектром $\tilde{S}_x$ и однозначной функцией распределения $F(x)$.

Многозначная величина $\tilde{x}$, описываемая однозначной функцией распределения ($\tilde{F}(x) = F(x)$), называется *величиной случайного типа*, а величина $\tilde{x}$, описываемая многозначной функцией распределения, – *величиной гиперслучайного типа.*

Определение 2. *Многозначную функцию* $\tilde{x}(t)$ *можно рассматривать как множество многозначных величин — сечений функции*, соответствующих фиксированным значениям аргумента t.

Это означает, что в общем случае определяемая таким образом многозначная функция — гиперслучайная функция, а в частном случае, когда сечения представляют собой случайные величины, — случайная функция.

Многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ можно характеризовать множеством значений спектра $\tilde{S}_x(t)$ при фиксированных значениях t, функцией распределения $\tilde{F}(x;t)$, границами распределения $F_S(x;t)$, $F_I(x;t)$, многомерной функцией распределения $\tilde{F}(\vec{x};\vec{t})$ и другими характеристиками.

24.3. СПЕКТРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ

Определение 3. *Однозначной подпоследовательностью* (*однозначной частичной последовательностью*) *многозначной* конечной $\{\tilde{x}_i\} = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_i$ или бесконечной $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ *последовательности* будем называть любую однозначную последовательность, сформированную из исходной последовательности путем отбрасывания части членов и сохранения для оставшихся членов по одному значению.

Определение 4. m *-м частичным пределом* (*предельной точкой*) *многозначной последовательности* $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ будем называть предел

a_m (число) *однозначной сходящейся частичной последовательности*, сформированной из последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$.

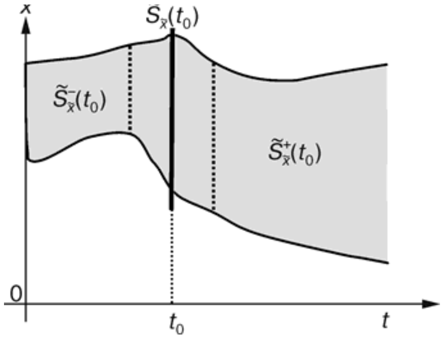


Рис. 24.4. Спектры $\tilde{S}_x(t_0)$, $\tilde{S}^-_x(t_0)$ и $\tilde{S}^+_x(t_0)$ многозначной функции $\tilde{x}(t)$

Определение 5. *m-м частичным пределом* (*предельной точкой*) при $t \to t_0 - 0$ ($t \to t_0 + 0$) *многозначной функции* $\tilde{x}(t)$, принимающей конечные значения, будем называть *m*-й предел (число) *однозначной частичной последовательности*, сформированной из исходной функции при $t \to t_0 - 0$ ($t \to t_0 + 0$).

Заметим, что не все однозначные частичные последовательности сходятся (имеют единственные пределы). Поэтому не все однозначные частичные последовательности многозначной последовательности или многозначной функции имеют единственные предельные точки.

В случае многозначных последовательностей и многозначных функций в качестве аналогов пределов могут выступать множества (спектры) предельных точек.

Пусть $\tilde{S}_x(t_0)$ — спектр многозначной функции $\tilde{x}(t)$ в точке t_0, $\{\tilde{x}_i(t_0)\}_{i\to\infty}$ — многозначная последовательность, порождающая сечение функции $\tilde{x}(t)$ в точке t_0, а $\tilde{S}^-_x(t_0)$ и $\tilde{S}^+_x(t_0)$ — левосторонний и правосторонний спектры функции $\tilde{x}(t)$ соответственно при $t \to t_0 - 0$ и $t \to t_0 + 0$.

Аналитически эти спектры будем представлять следующими выражениями: $\tilde{S}_x(t_0) = \operatorname*{LIM}_{i\to\infty} \tilde{x}_i(t_0)$, $\tilde{S}^-_x(t_0) = \operatorname*{LIM}_{t\to t_0-0} \tilde{x}(t)$ и $\tilde{S}^+_x(t_0) = \operatorname*{LIM}_{t\to t_0+0} \tilde{x}(t)$, где $\tilde{x}_i(t_0)$ — *i*-й элемент многозначной последовательности $\{\tilde{x}_i(t_0)\}_{i\to\infty}$.

Спектры $\tilde{S}_x(t_0)$, $\tilde{S}^-_x(t_0)$ и $\tilde{S}^+_x(t_0)$ не обязательно совпадают (рис. 24.4).

Множество предельных точек многозначной последовательности $\{\tilde{x}_i(t_0)\}_{i\to\infty}$ заключено в интервале $[x_I(t_0), x_S(t_0)]$, а множество предельных точек многозначной функции $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 - 0$ и

$t \to t_0 + 0$ — в интервалах $[x_I^-(t_0), x_S^-(t_0)]$ и $[x_I^+(t_0), x_S^+(t_0)]$, где $x_I(t_0)$ и $x_S(t_0)$ — соответственно нижняя и верхняя предельные точки последовательности $\{\tilde{x}_i(t_0)\}_{i\to\infty}$; $x_I^-(t_0)$ и $x_S^-(t_0)$ — соответственно нижняя и верхняя предельные точки функции $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 - 0$, а $x_I^+(t_0)$ и $x_S^+(t_0)$ — соответственно нижняя и верхняя предельные точки функции $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 + 0$.

Заметим, что требования ограниченности значений функции и значения аргумента t_0, фигурирующие в определении 5, не являются существенными. Аналогично можно определить понятия множества предельных точек для неограниченной многозначной функции $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 \pm 0$ и при t, стремящемся к плюс или минус бесконечности ($t \to +\infty$, $t \to -\infty$).

24.4. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Каждый j-й член $\tilde{x}_j$ многозначной конечной последовательности $\{\tilde{x}_i\}$ ($j = \overline{1,i}$) может быть представлен как обобщенный предел $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_j^n$ порождающей последовательности $\{x_j^n\} = x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n$ и описан функцией распределения:

$$\tilde{F}_j(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{n_j(x)}{n},$$

где $n_j(x)$ — количество членов последовательности $\{x_j^n\}$, меньших x.

Спектр значений $\tilde{S}_{x_i}$ последовательности $\{\tilde{x}_i\}$ может быть описан функцией распределения

$$\tilde{F}^i(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i} n_j(x)}{ni} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \tilde{F}_j(x).$$

Определение 6. *Функцией распределения предельных точек последовательности* $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ будем называть функцию

$$\tilde{F}(x) = \underset{i\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,\tilde{F}^i(x) = \underset{i\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\tilde{F}_j(x) = \underset{i\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,\frac{\sum_{j=1}^{i} n_j(x)}{ni}.$$

Обратим внимание, что функция $\tilde{F}(x)$ может быть многозначной. Если для всех $x \in (-\infty,+\infty)$ она однозначная, то $\tilde{F}(x) = F(x)$.

Рассматриваемая функция распределения предельных точек $\tilde{F}(x)$ аналогична функции распределения предельных точек однозначной последовательности.

В зависимости от вида функции распределения $\tilde{F}(x)$ будем различать многозначные последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ случайного и гиперслучайного типов.

Определение 7. *Многозначную последовательность* $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ будем относить к случайному типу, если функция распределения $\tilde{F}(x)$ предельных точек представляет собой однозначную функцию для всех $x \in (-\infty,+\infty)$, и к гиперслучайному типу, если она многозначная хотя бы в одной точке этого интервала.

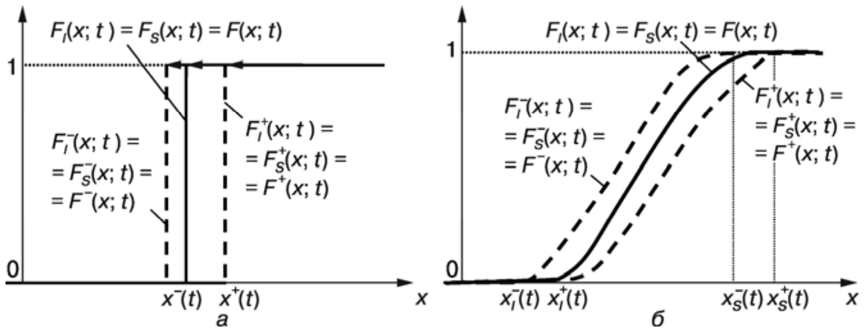
Как и в случае однозначной последовательности, функция распределения $\tilde{F}(x)$ может быть охарактеризована однозначными границами: нижней $F_I(x)$ и верхней $F_S(x)$. Если для всех $x \in (-\infty,+\infty)$ она принимает конкретные значения (последовательность сходится к числу или множеству чисел), то границы совпадают: $F_I(x) = F_S(x)$, в противном случае они различаются.

24.5. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

По аналогии с функцией распределения $\tilde{F}(x)$ многозначной последовательности можно ввести понятия левосторонней $\tilde{F}^{-}(x;t)$ и правосторонней $\tilde{F}^{+}(x;t)$ функций распределения предельных точек многозначной функции $\tilde{x}(t)$ (рис. 24.5), характеризующих частоту повторяемости значений функции соответственно при приближении аргумента к t слева и справа.

Заметим, что функции распределения $\tilde{F}^{\pm}(x;t)$ могут быть как однозначными, так и многозначными.

Определение 8. *Многозначную функцию* $\tilde{x}(t)$ будем называть *сходящейся слева* (при фиксированном t) *к определенному числу* $x^{-}(t)$, если левосторонний спектр $\tilde{S}_x^{-}(t)$ состоит из одной предельной точки (рис. 24.5, *а*) и *сходящейся слева к множеству чисел*, если этот спектр содержит множество предельных точек.



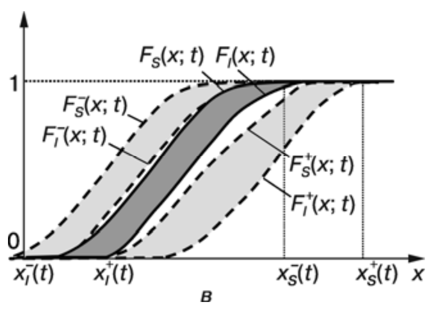


Рис. 24.5 Однозначные (*а*, *б*) и многозначные (*в*) функции распределения $\tilde{F}(x;t)$, $\tilde{F}^{\pm}(x;t)$

Аналогично будем различать многозначную функцию, *сходящуюся справа к конкретному числу* $x^{+}(t)$ (см. рис. 24.5, *а*) и *сходящуюся справа к множеству чисел* (см. рис. 24.5, *б*, *в*).

Левостороннюю $\tilde{F}^{-}(x;t)$ и правостороннюю $\tilde{F}^{+}(x;t)$ функции распределения можно характеризовать однозначными границами: соответственно $F_I^{-}(x;t)$, $F_S^{-}(x;t)$ и $F_I^{+}(x;t)$, $F_S^{+}(x;t)$.

Если во всей области определения функция $\tilde{x}(t)$ описывающие ее функции распределения $F(x;t)$, $F^{\pm}(x;t)$ однозначные, то функция $\tilde{x}(t)$ называется *функцией случайного типа*; в противном же случае – *функцией гиперслучайного типа*. У функции случайного типа границы функции распределения совпадают (рис. 24.5, *а*, *б*), а у функции гиперслучайного типа – отличатся друг от друга (рис. 24.5, *в*).

Особый интерес представляют многозначные функции со специальными свойствами. Об этом пойдет речь в следующей главе.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Для многозначных функций введены понятия непрерывной функции, производной, неопределенного и определенного интегралов, а также спектра главных значений определенного интеграла.

25.1. НЕПРЕРЫВНАЯ МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение 1. *Многозначную функцию случайного типа* $\tilde{x}(t)$ будем называть *непрерывной в точке t слева* (*справа*), если

1) она определена в окрестности этой точки слева (справа), а также в самой этой точке;

2) в точке t левосторонняя $F^{-}(x;t)$ (правосторонняя $F^{+}(x;t)$) функция распределения равна функции распределения значений $F(x;t)$: $F^{-}(x;t)=F(x;t)$ ($F^{+}(x;t)=F(x;t)$) (функция распределения $F(x;t)$ непрерывна по аргументу t слева (справа)).

В противном случае функцию будем называть *разрывной в точке t слева* (*справа*).

Определение 2. *Многозначную функцию* будем называть *непрерывной на интервале* (t_1,t_2), если она непрерывна во всех точках этого интервала слева и справа.

Для непрерывной функции $\tilde{x}(t)$ имеют место равенства $x_I^{-}(t)=x_I^{+}(t)=x_I(t)$, $x_S^{-}(t)=x_S^{+}(t)=x_S(t)$, где $x_I(t)$, $x_S(t)$ — соответственно нижняя и верхняя границы функции $\tilde{x}(t)$ (рис. 25.1, *а*, *в*).

Для непрерывных многозначных функций можно по-новому определить понятие ветви.

Определение 3. *c-й ветвью* многозначной непрерывной на интервале $t\in(t_1,t_2)$ функции $\tilde{x}(t)$ ($c\in(0,1]$) будем называть

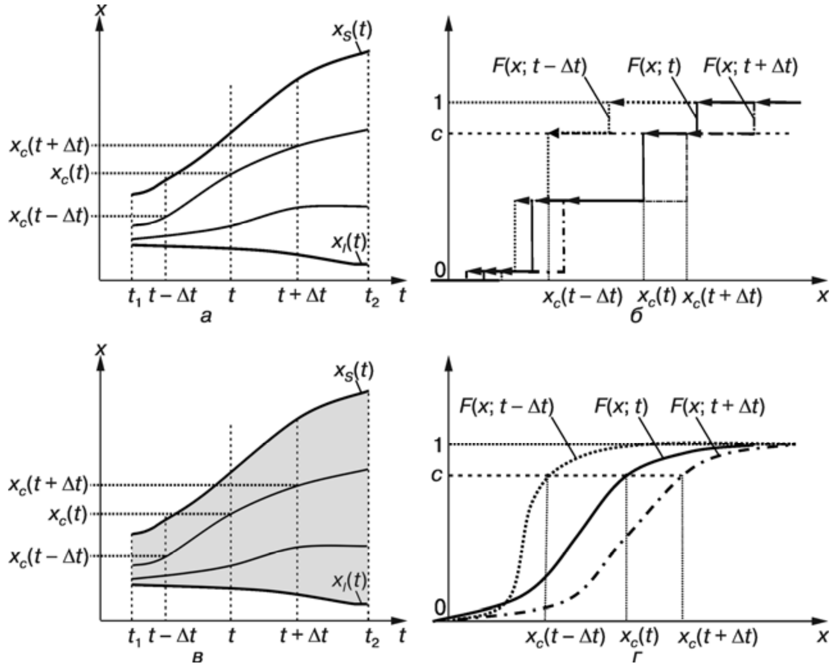


Рис. 25.1. Многозначные непрерывные функции $\tilde{x}(t)$ (*а*, *в*) и соответствующие сечения их функций распределения $F(x;t-\Delta t)$, $F(x;t)$, $F(x;t+\Delta t)$ в точках $t-\Delta t$, t и $t+\Delta t$ (*б*, *г*). Тонкими сплошными линиями на рис. 25.1, *а*, *в* изображены ветви функций $\tilde{x}(t)$, а полужирными — их границы

определенную на этом интервале однозначную функцию $x_c(t) = \inf\limits_x \arg\limits_x (F(x;t) = c)$ (см. рис. 25.1, *а*, *в*).

Количество ветвей многозначной функции может быть конечным, счетным или несчетным.

Если количество ветвей конечное (см. рис. 25.1, *а*) или счетное, то при $t = \text{const}$ функция распределения $F(x;t)$ — ступенчатая функция аргумента x (см. рис. 25.1, *б*), если же количество ветвей несчетное и для всех $t \in (t_1, t_2)$ значения функции плотно заполняют интервал $(x_I(t),\ x_S(t))$ (см. рис. 25.1, *в*), то при $t = \text{const}$ функция распределения $F(x;t)$ — строго возрастающая функция x (см. рис. 25.1, *г*).

Теорема 1. Ветви многозначной непрерывной функции — непрерывные функции, не имеющие общих точек.

Непрерывность ветвей многозначной непрерывной функции следует из непрерывности функции распределения $F(x;t)$ по t.

Доказательство, что ветви не имеют общих точек, проведем от противного. Пусть многозначная непрерывная функция $\tilde{x}(t)$, описываемая однозначной функцией распределения $F(x;t)$, имеет ветви $x_{c_1}(t)$ и $x_{c_2}(t)$ ($c_2 \neq c_1$), совпадающие хотя бы в одной точке $t = t_0$. При этом $x_{c_1}(t_0) = x_{c_1}(t_0) = x_0$. Это означает, что функция распределения $F(x;t)$ в точке (x_0, t_0) принимает два разных значения (c_1 и c_2), что противоречит условию ее однозначности.

Определение 4. *Многозначную непрерывную на интервале* $t \in (t_1, t_2)$ *функцию* $\tilde{x}(t)$ будем называть *разложимой по ветвям*, если ее можно представить множеством ветвей: $\tilde{x}(t) = \{x_c(t), \quad c \in C\}$, где C — множество ветвей.

Обратим внимание, что *не все непрерывные многозначные функции допускают разложение по ветвям*. Если функция $\tilde{x}(t)$ разложима по ветвям, то она описывается множеством ветвей C и функцией распределения ветвей $F_c(x)$.

25.2. ПРОИЗВОДНЫЕ МНОГОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

Определение 5. *Левосторонней производной* $\tilde{x}'^{-}(t)$ *непрерывной многозначной функции* $\tilde{x}(t)$, разложимой по ветвям, будем называть множество левосторонних производных:

$$\tilde{x}_c'^{-}(t) = \operatorname*{LIM}_{\Delta t \to +0} \frac{x_c(t) - x_c(t - \Delta t)}{\Delta t}, \tag{25.1}$$

а *правосторонней производной* $\tilde{x}'^{+}(t)$ — множество правосторонних производных:

$$\tilde{x}_c'^{+}(t) = \operatorname*{LIM}_{\Delta t \to +0} \frac{x_c(t + \Delta t) - x_c(t)}{\Delta t}, \tag{25.2}$$

рассчитанных в точке t для всех ветвей $c \in C$.

Обобщенные пределы выражений (25.1) и (25.2) не обязательно однозначные. Они могут сходиться к множеству чисел или расходиться.

Если для всех $c \in C$ в выражениях (25.1) и (25.2) пределы однозначные ($\mathrm{LIM} = \lim$), то $\tilde{x}_c'^{\pm}(t) = x_c'^{\pm}(t)$ и производные $\tilde{x}'^{\pm}(t)$

описывают скорости изменения функции по ветвям при приближении к t слева и справа.

Если пределы в указанных выражениях неоднозначные, то производная $\tilde{x}_c'^{\pm}(t)$, рассчитанная для c-й ветви, также описывает скорость изменения функции при движении по этой ветви, однако носит неопределенный характер и конкретным числом не выражается.

Определение 6. *Многозначную непрерывную функцию* $\tilde{x}(t)$, разложимую по ветвям, будем называть *дифференцируемой в точке t*, если все ее производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $x_c'^{-}(t) = x_c'^{+}(t) = x_c'(t)$.

Определение 7. *Многозначную непрерывную функцию* $\tilde{x}(t)$, разложимую по ветвям, будем называть *дифференцируемой*, если она дифференцируема на всем интервале ее определения.

Производные не обязательно непрерывны и разложимы по ветвям. Для непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}'(t)$ можно определить вторые производные $\tilde{x}''^{\pm}(t)$ и далее итерационно для непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}^{(r)}(t)$ любого r-го порядка — производные $\tilde{x}^{(r+1)\pm}(t)$ $(r+1)$-го порядка.

Для дифференцируемой функции $\tilde{x}(t)$ с дифференцируемой производной $\tilde{x}'(t)$ вторые производные $\tilde{x}''^{\pm}(t)$ в точке t характеризуют ускорения, с которыми изменяется функция $\tilde{x}(t)$ по ветвям при приближении к t слева и справа.

Многозначная дифференцируемая функция $\tilde{x}(t)$, имеющая в точке t_0 однозначные по ветвям производные $\tilde{x}_c^{(r)}(t_0)$ $(c \in C)$ любого порядка r, *может быть описана множеством ветвей* $x_c(t)$*, раскладываемых в точке* t_0 *в ряд Тейлора.* При этом функция $\tilde{x}(t)$ может быть описана множеством значений функции $\{x(t_0)\}$ в точке t_0, множест- вом значений ее производных $\{x_c^{(r)}(t_0)\}$ и множеством соответствующих функций распределения $F(x;t_0)$, $F(x^{(r)};t_0)$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

25.3. ПРИМЕРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Особый интерес представляют многозначные функции, однозначные на всем множестве их определения, за исключением некоторого интервала. На рис. 25.2, *а—г* приведены примеры функций такого рода.

Эти функции однозначные на интервалах $t < t_1$, $t > t_2$ и многозначные на интервале $t_1 \le t \le t_2$. У функции, приведенной на рис. 25.2, *а*, многозначность проявляется спонтанно (скачкообразно) и также спонтанно пропадает. В остальных же функциях (рис. 25.2, *б—г*) переход к многозначности и затем к однозначности сопровождается процессами ветвления (расщепления), изображенными пунктирными линиями. На этих участках формируются частичные пределы.

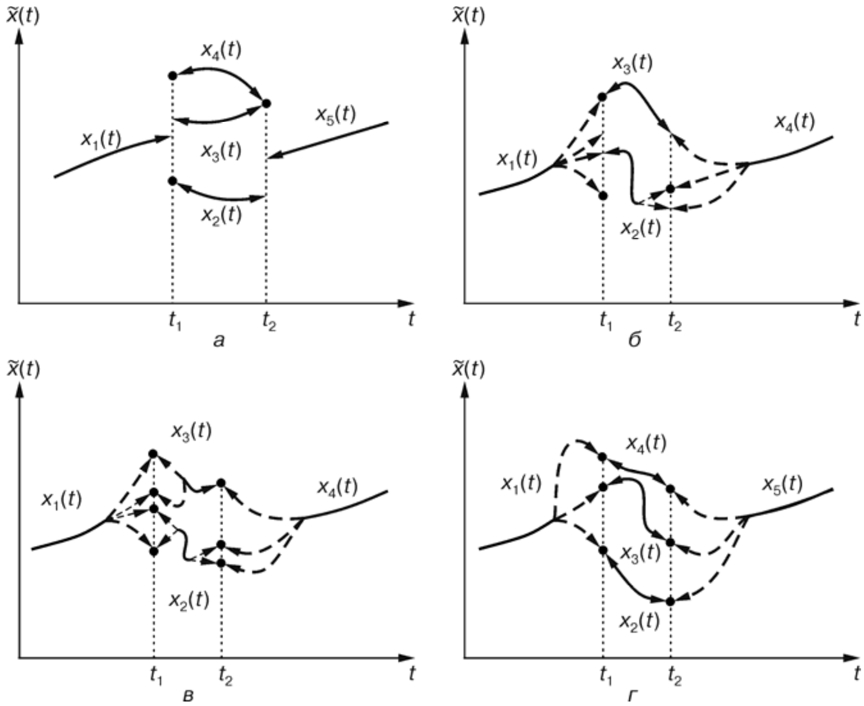


Рис. 25.2. Многозначные функции: *а*, *б* — разрывные, *в*, *г* — непрерывные (при выполнении во всех точках области определения функции условий определения 1)

Функции, изображенные на рис. 25.2, *а* и *б*, — разрывные. Если во всех точках области определения функций, изображенных на рис. 25.2, *в* и *г*, выполняются условия определения 1, то эти функции непрерывные. Функции на рис. 25.2, *а*—*в* недифференцируемые, а функция на рис. 25.2, *г* — дифференцируемая (если она непрерывная).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_1)}\right) & \text{при} \quad t < t_1, \\ [-1, 1] \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2, & \\ \sin\left(\dfrac{1}{\omega_2(t-t_2)}\right) & \text{при} \quad t > t_2, \end{cases} \tag{25.3}$$

однозначную на интервалах $(-\infty, t_1)$, $(t_2, +\infty)$ и многозначную на интервале $[t_1, t_2]$, где $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ (рис. 25.3, *а*).

При t, стремящемся к t_1 слева, и t, стремящемся к t_2 справа, однозначные части функции (25.3) расщепляются. Левосторонняя $F^-(x;t_1)$ и правосторонняя $F^+(x;t_2)$ функции распределения описываются выражением (23.4):

$$F^-(x;t_1) = F^+(x;t_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x\,. \tag{25.4}$$

Если на интервале $[t_1, t_2]$ функция распределения $F(x;t)$ описывается тем же выражением (25.4), то функция (25.3) — непрерывная и дифференцируемая.

В этом случае производная функции (25.3) — однозначная при любом $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$x'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega_1(t-t_1)^2}\cos\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_1)}\right) & \text{при} \quad t < t_1, \\ 0 \quad \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2, & \\ -\dfrac{1}{\omega_2(t-t_2)^2}\cos\left(\dfrac{1}{\omega_2(t-t_2)}\right) & \text{при} \quad t > t_2. \end{cases}$$

Функция распределения производной $F(x';t) = \mathrm{sign}[x' - x'(t)]$.

Если на интервале $t \in [t_1, t_2]$ функция распределения $F(x;t)$ подчиняется, например, зависимости

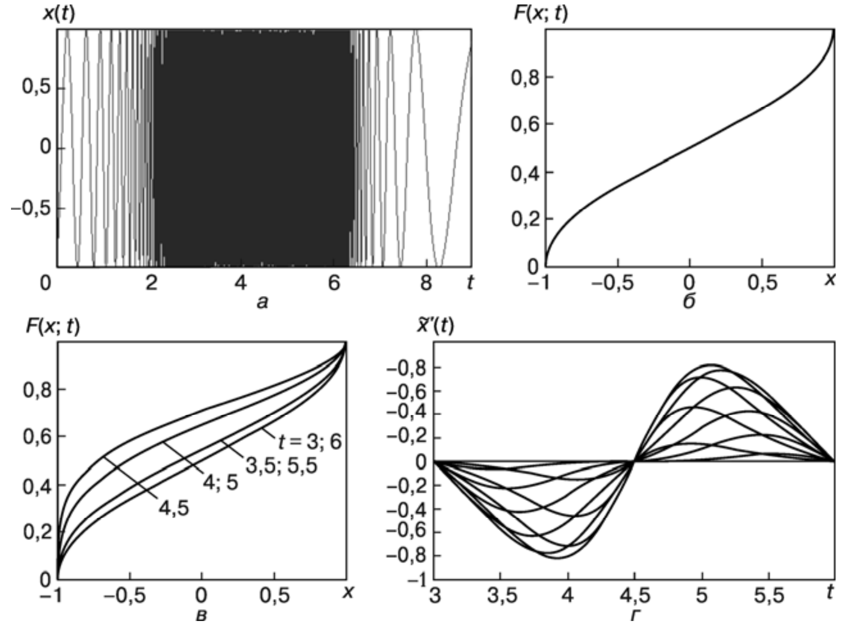


Рис. 25.3. Многозначная функция (25.3) (*а*) с двумя различными функциями распределения на интервале $[t_1, t_2]$: (25.4) (*б*) и (25.5) (*в*), а также производная (25.6) (*г*) ($c \in [0,1]$ с шагом 0,1; $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $\omega_1 = 10^{-2}$, $\omega_2 = 4 \cdot 10^{-2}$)

$$F(x;t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x\right)^{a(t)}, \tag{25.5}$$

где, например, $a(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi(t - t_1)}{t_2 - t_1}$ (рис. 25.3, *в*), то *c*-я ветвь $x_c(t)$ функции $\tilde{x}(t)$ описывается выражением

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x_c(t)\right)^{a(t)} = c\,.$$

Решение этого уравнения $x_c(t) = -\cos\pi\sqrt[a(t)]{c}$. Вычисляя производную, получаем

$$x_c'(t) = \frac{\pi^2 c^{1/a(t)} \ln c}{2a^2(t)(t_2 - t_1)} \sin\left(\pi c^{1/a(t)}\right) \sin\left(\frac{2\pi(t - t_1)}{t_2 - t_1}\right).$$

Отсюда следует, что в данном случае функция (25.3) — непрерывная и дифференцируемая при любом *t*. На интервале $[t_1, t_2]$ ее производная неоднозначная и описывается (рис. 25.3, *г*) выражением

$$\tilde{x}'(t) = \left\{ \frac{\pi^2 c^{1/a(t)} \ln c}{2a^2(t)(t_2 - t_1)} \sin\left(\pi c^{1/a(t)}\right) \sin\left(\frac{2\pi(t - t_1)}{t_2 - t_1}\right), \quad c \in (0,1] \right\}. \quad (25.6)$$

Функция распределения этой производной $\tilde{F}(x';t)$ может быть однозначной (тогда $\tilde{F}(x';t) = F(x';t)$) или многозначной.

25.4. ИНТЕГРАЛ ОТ МНОГОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

Определение 8. *Первообразной* (*примитивной*) *многозначной функцией* $\tilde{x}(t)$, определенной на интервале $[a,b]$, будем называть многозначную дифференцируемую функцию $\tilde{y}(t)$, производная которой во всех точках этого интервала равна функции $\tilde{x}(t)$: $\tilde{y}'(t) = \tilde{x}(t)$.

Как и любая многозначная дифференцируемая функция (а следовательно, непрерывная и разложимая по ветвям), первообразная $\tilde{y}(t)$ описывается множеством значений $\tilde{S}_y(t)$ и функцией распределения значений $F(y;t)$ в точке *t*.

Определение 9. *Неопределенным интегралом от многозначной функции* $\tilde{x}(t)$ будем называть дифференцируемую многозначную функцию:

$$\int \tilde{x}(t)\, dt = \tilde{y}(t) + C_0 ,$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Определение 10. *Определенным интегралом от многозначной* ограниченной непрерывной *функции* $\tilde{x}(t)$, определенной на интервале $[a,b]$ и разложимой по ветвям, будем называть множество предельных точек

$$\tilde{S}_y = \int_a^b \tilde{x}(t)dt = \left\{ \underset{\max \Delta t_i \to 0}{\mathrm{LIM}} \sum_{i=1}^{I} x_c(\xi_i)\Delta t_i ,\ c \in C \right\}, \quad (25.7)$$

а *нижней* y_I и *верхней* y_S *границами интеграла* — соответственно нижнюю и верхнюю границы этого множества, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $\tilde{x}(\xi_i)$ — значения функции в произвольной точке $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b \tilde{x}(t)dt$, как и любое множество предельных точек, описывается не только множеством своих значений $\tilde{S}_y$, но и функцией распределения значений $\tilde{F}(y)$, в общем случае многозначной.

Особый интерес представляет случай, когда пределы LIM в выражении (25.7) однозначные. Тогда множество предельных точек

$$\tilde{S}_y = \int\limits_a^b \tilde{x}(t)dt = \left\{ \int\limits_a^b x_c(t)dt,\, c \in C \right\}.$$

Заметим, что определение 10 допускает обобщение на случай несобственных интегралов.

25.5. СПЕКТР ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Введенное понятие определенного интеграла многозначной функции может быть полезным для оценки определенных интегралов Римана в случае их расходимости. Такого рода задачи возникают, например, при функциональных преобразованиях.

Рассмотрим непрерывную однозначную ограниченную функцию $x(t,\lambda)$ скалярного аргумента t с параметром $\lambda \in \Lambda$, определенную на интервале $t \in [a(\lambda), b(\lambda)]$. Пусть интеграл Римана этой функции сходится при $\lambda \neq \lambda_0$ и расходится при $\lambda = \lambda_0$.

Определение 11. *Спектром главных значений определенного интеграла функции* $x(t,\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ будем называть множество предельных точек:

$$\tilde{S}_y^{\circ} = \operatorname*{LIM}_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} x(t,\lambda)dt,$$

а *функцией распределения этого спектра* — функцию

$$\tilde{F}(y) = \operatorname*{LIM}_{\lambda \to \lambda_0} \frac{m_\lambda(y)}{m_\lambda},$$

где $m_\lambda(y)$ — количество значений интеграла $\int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} x(t,\lambda)dt$, меньших y, а m_λ — общее количество значений этого интеграла.

Рассматриваемый спектр главных значений интеграла отличается от главного значения интеграла Римана многозначностью. Границы этого интеграла y_I, y_S представляют собой нижнюю и верхнюю границы множества предельных точек $\tilde{S}_y^\circ$.

* * *

Таким образом, с помощью математического аппарата теории гиперслучайных явлений можно описывать многозначные величины, последовательности и функции.

Известные для однозначных функций понятия, в частности, понятия сходимости, непрерывности, дифференцируемости, первообразной, неопределенного и определенного интегралов, обобщаются на случай многозначных функций.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРИ НАРУШЕНИЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Нарушения статистической устойчивости влияют на статистические закономерности, описываемые законом больших чисел, центральной предельной теоремой, теоремами, определяющими потенциальную точность измерений, и др.

Часть V монографии в основном посвящена рассмотрению этих вопросов. Кроме того, в ней рассматривается еще один концептуальный вопрос.

Отсутствие физической интерпретации понятия вероятности, обусловленное нарушением статистической устойчивости (см. параграф 2.6), приводит к тому, что *все физические понятия, определяемые с использованием вероятностных характеристик, оказываются фактически неопределенными*. К их числу относится, например, понятие *энтропии, количества информации* и др.

В главе 32 на примере энтропии описан подход к определению этих понятий для неопределенных величин, не характеризуемых вероятностной мерой.

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Показано, что закон больших чисел, известный для последовательности случайных величин, справедлив как при наличии, так и отсутствии сходимости выборочного среднего. При отсутствии сходимости выборочное среднее приближается к среднему математических ожиданий, синхронно флуктуируя с ним в определенном интервале. Закон больших чисел обобщен на случай последовательности гиперслучайных величин. Исследованы особенности проявления обобщенного закона больших чисел.

26.1. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ВЕЛИЧИН

Одним из основных законов теории вероятностей является *закон больших чисел для случайных явлений*, первоначальная версия которого была опубликована в посмертной работе Я. Бернулли в 1713 г. [Бернулли, 1986]. Этот закон был доказан Я. Бернулли для *последовательности случайных событий* в виде теоремы, современная интерпретация которой следующая.

Теорема 1 (*Бернулли*). Пусть вероятность появления события в серии опытов постоянна и равна p_0. Тогда при неограниченном увеличении числа опытов N частота N_0 / N появления события сходится по вероятности к вероятности p_0:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{N_0}{N} - p_0\right| > \varepsilon\right\} = 0 ,$$

где N_0 — число опытов, при котором произошло событие, ε — произвольное, как угодно малое положительное число.

За минувшие три столетия закон больших чисел детально изучался и обобщался. Выяснилось, что он справедлив и для более широкого комплекса условий, чем полагал Я. Бернулли, в частности — в модифицированном виде для неоднородной последовательности случайных событий, а также последовательности случайных величин и функций.

Известно много вариантов закона больших чисел для *последовательности случайных величин* [Гнеденко, 1988]. Напомним некоторые из них.

Теорема 2 (*Чебышева*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $m_1, m_2, \ldots, m_N$ и ограниченными дисперсиями. Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности среднее выборочных значений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к среднему математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Теорема 3 (*Хинчина*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием m. Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности среднее выборочных значений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к математическому ожиданию m:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - m\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Для неоднородной последовательности необязательно независимых случайных величин закон больших чисел был доказан А.А. Марковым.

Теорема 4 (*Маркова*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность случайных величин таковых, что при устремлении объема выборки N к бесконечности

$$\frac{1}{N^2}\mathrm{D}\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] \to 0,$$

где $\mathrm{D}[\cdot]$ — оператор дисперсии. Тогда среднее элементов $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к среднему их математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Необходимое и достаточное условия применимости закона больших чисел для последовательности как угодно зависимых случайных величин определяется следующей теоремой.

Теорема 5. Необходимым и достаточным условием сходимости по вероятности среднего случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$ к среднему их математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$ при устремлении объема выборки N к бесконечности является стремление к нулю величины

$$\mathrm{M}\left[\frac{\overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{xN}}{1+\overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{xN}}\right],$$

где $\overset{\circ}{m}{}^{*}_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - m_n)$ — среднее центрированных величин рассматриваемой последовательности.

А.Н. Колмогоровым был доказан так называемый *усиленный закон больших чисел*, под которым понимается сходимость с вероятностью единица.

Теорема 6 (*Колмогорова*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{D}[X_n] < \infty .$$

Тогда она подчиняется усиленному закону больших чисел.

Необходимое и достаточное условие справедливости усиленного закона больших чисел для однородной последовательности взаимно независимых случайных величин дает теорема, доказанная также А.Н. Колмогоровым.

Теорема 7 (*Колмогорова*). Необходимым и достаточным условием применимости усиленного закона больших чисел для однородной последовательности взаимно независимых случайных величин является существование математического ожидания.

Следует обратить внимание на чрезвычайно важное обстоятельство, о котором уже шла речь: в ряде модификаций (в частности, описываемых теоремами 2, 5 и 6) закон больших чисел для последовательности случайных величин *не гарантирует*, что выборочное среднее $m_{xN}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ и среднее математических ожиданий $m_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n$ имеют пределы. Этот закон утверждает лишь сходимость выборочного среднего к среднему математических ожиданий, *не требуя при этом их сходимости к определенным фиксированным величинам.*

Отсюда следует, что *закон больших чисел действует не только при отсутствии нарушений статистической устойчивости, когда выборочное среднее m_{xN}^* и среднее математических ожиданий m_{xN} имеют пределы* (*совпадающие по величине*), *но и при наличии нарушений статистической устойчивости, когда пределов* (*в обычном смысле*) *нет.*

Рассмотрим детально эту особенность, отталкиваясь от теоремы 2.

26.2. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

При конечном объеме выборки N величина $m_{xN}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ — случайная величина, а величина $m_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n$ — детерминированная величина (число). Случайная величина m_{xN}^* описывается функцией распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$, а m_{xN} — функцией распределения $F_{m_{xN}}(x)$ в виде функции единичного скачка в точке m_{xN}.

Пределы величин m_{xN}^* и m_{xN} могут быть однозначными (детерминированными числами) и многозначными величинами: случайными, интервальными или гиперслучайными. Однозначные пределы будем обозначать m_x^* и m_x, а многозначные пределы или те, которые могут оказаться многозначными, — $\tilde{m}_x^*$ и $\tilde{m}_x$.

Вне зависимости от того, являются ли рассматриваемые пределы однозначными или многозначными, согласно закону больших чисел по мере увеличения объема выборки N выборочное среднее m_{xN}^* постепенно приближается к среднему математических ожиданий m_{xN}.

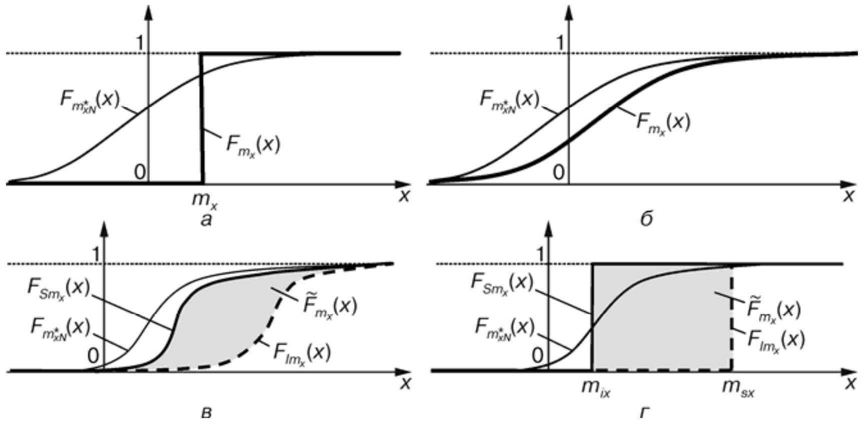


Рис. 26.1. Формирование предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$, когда предельные выборочное среднее и среднее математических ожиданий — числа (*а*), когда они — случайные величины (*б*), когда они — гиперслучайные величины (*в*, *г*) (*в* — общий случай, *г* — частный случай)

При $N \to \infty$ возможны два случая:

1. Величина m_{xN}^* сходится к *однозначному* выборочному среднему математических ожиданий m_x (числу).

2. Величина m_{xN}^*, становясь в пределе многозначной величиной $\tilde{m}_x^*$, сходится к *многозначной величине* $\tilde{m}_x$.

Случай 1 — идеализированный, рассматриваемый в теории вероятностей (см., например, [Гнеденко, 1988, Горбань, 2003]). В этом случае предел среднего математических ожиданий m_x описывается функцией распределения $F_{m_x}(x)$ в виде функции единичного скачка в точке m_x. К ней стремится функция распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$ выборочного среднего m_{xN}^* при $N \to \infty$ (рис. 26.1, *а*).

Случай 2 более реалистичен. Здесь предельное выборочное среднее $\tilde{m}_x^*$ и предельное среднее математических ожиданий $\tilde{m}_x$ описываются многозначными спектрами $\tilde{S}_{m_x^*}$ и $\tilde{S}_{m_x}$. При этом возможны два варианта:

2.1. Предельное выборочное среднее $\tilde{m}_x^*$ и предельное среднее математических ожиданий $\tilde{m}_x$ являются *случайными величинами*. Тогда спектры $\tilde{S}_{m_x^*}$ и $\tilde{S}_{m_x}$ характеризуются однозначными функциями распределения $F_{m_x^*}(x)$ и $F_{m_x}(x)$ (рис. 26.1, *б*).

2.2. Величины $\tilde{m}_x^*$, $\tilde{m}_x$ являются *гиперслучайными* (в частном случае интервальными) *величинами*. Тогда спектры $\tilde{S}_{m_x^*}$ и $\tilde{S}_{m_x}$ характеризуются многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ и $\tilde{F}_{m_x}(x)$ (рис. 26.1, *в*).

Так как сходимость по распределению последовательности *случайных величин* менее сильная, чем сходимость по вероятности, в варианте 2.1 предельная функция распределения $F_{m_x^*}(x)$ совпадает с предельной функцией распределения $F_{m_x}(x)$.

Сходимость по распределению последовательности *гиперслучайных величин* также менее сильная, чем сходимость по вероятности. Поэтому в варианте 2.2 предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ совпадает с предельной функцией распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$. При этом нижняя граница $F_{Im_x^*}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ совпадает с нижней границей $F_{Im_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$, а верхняя граница $F_{Sm_x^*}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x^*}(x)$ — с верхней границей $F_{Sm_x}(x)$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$. На рис. 26.1, *в* расположенная между указанными границами зона неопределенности изображена затемненной областью.

В параграфе 23.1 доказана теорема 1, из которой следует (см. следствие 2), что если функция распределения, описывающая спектр последовательности средних детерминированных величин, — многозначная функция, то соответствующая зона неопределенности непрерывная. На основании этой теоремы зона *неопределенности функции распределения* $\tilde{F}_{m_x}(x)$ *— непрерывная.*

Интервал, в котором флуктуирует выборочное среднее m^*_{xN} при $N \to \infty$, характеризуется нижней границей m^*_{ix} достижения функцией $F_{Sm^*_x}(x)$ минимального (нулевого) значения и верхней границей m^*_{sx} достижения функцией $F_{Im^*_x}(x)$ максимального (единичного) значения (если таковые существуют). Естественно, эти границы совпадают с соответствующими границами m_{ix}, m_{sx} функций $F_{Sm_x}(x)$, $F_{Im_x}(x)$: $m^*_{ix} = m_{ix}$, $m^*_{sx} = m_{sx}$. Указанные границы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Заметим, что в монографии [Горбань, 2011 (1)] исследован частный случай [1], когда верхняя $F_{Sm^*_x}(x)$ и нижняя $F_{Im^*_x}(x)$ границы функции распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$ описываются функциями единичного скачка соответственно в точках m^*_{ix}, m^*_{sx}, а верхняя $F_{Sm_x}(x)$ и нижняя $F_{Im_x}(x)$ границы функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ — функциями единичного скачка соответственно в точках m_{ix}, m_{sx} (рис. 26.1, *г*).

Таким образом, теоретически *среднее случайной выборки может сходиться к определенному числу, стремиться к плюс или минус бесконечности или флуктуировать в пределах определенного интервала* $[m_{ix}, m_{sx}]$. В последнем случае имеет место *сходимость выборочного среднего к интервалу.*

Предельное выборочное среднее может представлять собой число, случайную величину, интервал или гиперслучайную величину с непрерывной зоной неопределенности.

26.3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим модификации *закона больших чисел для последовательности гиперслучайных величин* (*гиперслучайной выборки*).

[1] В период написания монографии [Горбань, 2011 (1)] основные положения математического анализа расходящихся и многозначных функций не были еще четко сформулированы, что послужило препятствием к рассмотрению общего случая.

Теорема 8 (аналогичная теореме 2). Пусть имеется гиперслучайная выборка $X_1,\ldots,X_N$, состоящая из гиперслучайных величин $X_n = X_n / g_n \in G$ ($n = \overline{1,N}$), независимых при всех условиях. Условные случайные величины X_n / g_n ($g_n \in G$), образующие эти гиперслучайные величины, имеют математические ожидания m_{x_n / g_n} и ограниченные дисперсии D_{x_n / g_n} ($n = \overline{1,N}$).

Обозначим гиперслучайное выборочное среднее как

$$\tilde{m}^*_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{X_n / g_n \in G\},$$

а среднее математических ожиданий — как

$$\tilde{m}_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{m}_{x_n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{m_{x_n / g_n},\ g_n \in G\},$$

где $\tilde{m}_{x_n} = \{m_{x_n / g_n},\ g_n \in G\}$ — гиперслучайное (в общем случае) математическое ожидание гиперслучайной величины X_n.

Тогда при устремлении объема выборки к бесконечности ($N \to \infty$) гиперслучайное выборочное среднее $\tilde{m}^*_{xN}$ сходится по вероятности к среднему математических ожиданий $\tilde{m}_{xN}$, а нижняя $m^*_{ixN} = \inf\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} \tilde{m}^*_{xN}$ и верхняя $m^*_{sxN} = \sup\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} \tilde{m}^*_{xN}$ границы этого выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$ сходятся по вероятности соответственно к нижней $m_{ixN} = \inf\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} \tilde{m}_{xN}$ и верхней $m_{sxN} = \sup\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} \tilde{m}_{xN}$ границам среднего математических ожиданий $\tilde{m}_{xN}$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m^*_{ixN} - m_{ixN}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$
$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m^*_{sxN} - m_{sxN}\right| > \varepsilon\right\} = 0, \qquad (26.1)$$

где ε — как угодно малое положительное число.

Для доказательства теоремы рассмотрим случайную выборку $X_1 / g_1,\ldots,X_N / g_N$, полученную при фиксированной последовательности условий $(g_1,\ldots,g_N) = \vec{g} \in \vec{G}$. Рассчитанное по ней выборочное среднее $m^*_{xN/\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n / g_n$ при устремлении объема выборки N к бесконечности согласно теореме Чебышева для случайных величин сходится по вероятности к среднему условных математических ожиданий $m_{xN/\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n/g_n}$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m^*_{xN/\vec{g}} - m_{xN/\vec{g}}\right| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Сходимость величины $m^*_{xN/\vec{g}}$ к величине $m_{xN/\vec{g}}$ для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ означает равномерную (относительно параметра $\vec{g}$) сходимость по вероятности случайной величины $m^*_{xN/\vec{g}}$ к величине $m_{xN/\vec{g}}$. Иначе говоря, имеет место сходимость по вероятности гиперслучайного выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN} = \{m^*_{xN/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$ к среднему математических ожиданий $\tilde{m}_{xN} = \{m_{xN/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$.

В общем случае предельные величины $\tilde{m}^*_x$ и $\tilde{m}_x$ соответственно гиперслучайного выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$ и среднего математических ожиданий $\tilde{m}_{xN}$ характеризуются многозначными спектрами $\tilde{S}_{m^*_x}$, $\tilde{S}_{m_x}$ и многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$, $\tilde{F}_{m_x}(x)$.

Поскольку имеет место сходимость по вероятности, имеет место сходимость и по распределению. Поэтому предельная функция распределения выборочного среднего $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$ совпадает с предельной функцией распределения среднего математических ожиданий $\tilde{F}_{m_x}(x)$. При этом границы выборочного среднего совпадают с границами среднего математических ожиданий, т. е. справедливо равенство (26.1).

Нетрудно убедиться, что рассмотренные в параграфе 26.1 модификации закона больших чисел для последовательности случайных величин допускают обобщения на случай последовательности гиперслучайных величин.

Например, для неоднородной выборки гиперслучайных величин эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 9 (аналогичная теореме 5). Пусть $X_1,\ldots,X_N$ — гиперслучайная выборка состоит из гиперслучайных величин $X_n = \{X_n / g_n \in G\}$

($n = \overline{1, N}$). Условные случайные величины X_n / g_n ($g_n \in G$), образующие эти гиперслучайные величины, имеют математические ожидания m_{x_n / g_n}. Пусть m^*_{ixN}, m^*_{sxN} — границы гиперслучайного выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$, а m_{ixN}, m_{sxN} — границы среднего математических ожиданий $\tilde{m}_{xN}$.

Тогда необходимым и достаточным условием сходимости по вероятности выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$ к множеству $\tilde{m}_{xN}$ средних условных математических ожиданий при устремлении объема выборки N к бесконечности и сходимости по вероятности границ m^*_{ixN}, m^*_{sxN} этого выборочного среднего соответственно к границам m_{ixN}, m_{sxN} средних условных математических ожиданий $\tilde{m}_{xN}$ является стремление к нулю для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ величин

$$\mathrm{M}\left[\frac{\overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{xN/\vec{g}}}{1 + \overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{xN/\vec{g}}}\right], \tag{26.2}$$

где $\overset{\circ}{m}{}^*_{xN/\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n / g_n - m_{x_n / g_n})$ — среднее центрированных условных случайных величин $X_1 / g_1, \ldots, X_N / g_N$.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 8. Различие состоит лишь в том, что вместо утверждения теоремы Чебышева используется утверждение теоремы 5.

26.4. ОСОБЕННОСТИ ПРОЯВЛЕНИЯ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Обратим внимание, что при фиксированном параметре $\vec{g} \in \vec{G}$ обычный предел $m_{x/\vec{g}}$ условных средних математических ожиданий $m_{xN/\vec{g}}$ (и обычный предел $m^*_{x/\vec{g}}$ выборочных средних $m^*_{xN/\vec{g}}$) может существовать (представлять собой число), а может не существовать.

1. Если такие пределы существуют для всех $\vec{g} \in \vec{G}$, то величина $\tilde{m}_x$, к которой стремится гиперслучайное выборочное среднее $\tilde{m}^*_{xN}$, представляет собой *множество детерминированных величин*. Соответствующая этой величине $\tilde{m}_x$ функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ представляет собой множество условных функций распределения в виде функций единичного скачка в точках $m_{x/\vec{g}}$. Границы этого множества описываются функциями распределения $F_{Sm_x}(x)$, $F_{Im_x}(x)$ в виде функций единичного скачка соответственно в точках m_{ix}, m_{sx}, совпадающих с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} ($m_{ix} = m_{Sx}$, $m_{sx} = m_{Ix}$) (рис. 26.2, *а*).

На рис. 26.2 кривыми $F_{m^*_{xN_1/\vec{g}_1}}(x)$, $F_{m^*_{xN_2/\vec{g}_2}}(x)$ изображены функции распределения среднего для двух разных выборок в условиях $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ соответственно объема N_1 и N_2, а точками $m_{m^*_{xN_1/\vec{g}_1}}$, $m_{m^*_{xN_2/\vec{g}_2}}$ на оси x — соответствующие им математические ожидания.

Когда предельные условные математические ожидания $m_{x/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ всюду плотно заполняют интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$, а их функции распределения имеют скачкообразный вид, гиперслучайное выборочное среднее приближается при $N \to \infty$ к *интервальной* величине $[m_{ix}, m_{sx}]$, изображенной на рис. 26.2, *а* затемненной областью.

Математические ожидания условных средних математических ожиданий $m_{xN/\vec{g}}$, соответствующие разным выборкам, могут различаться (рис. 26.2, *а*), а могут и совпадать (рис. 26.2, *б*). Совпадение математических ожиданий имеет место в том случае, когда выборка однородна или когда она хотя и неоднородна, но математические ожидания ее элементов одинаковы. Тогда скачкообразные предельные функции распределения совпадают между собой и предельные условные математические ожидания $m_{x/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ одинаковы ($m_{x/\vec{g}} = m_x$). При этом границы предельного математического ожидания m_{ix}, m_{sx} совпадают ($m_{ix} = m_{sx} = m_x$) и при увеличении объема выборки к бесконечности выборочное

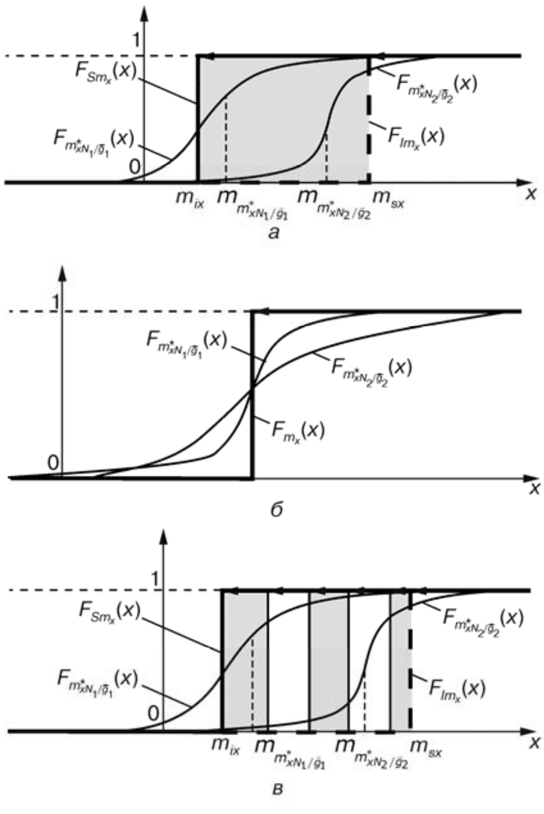


Рис. 26.2. Границы $F_{Sm_x}(x)$, $F_{Im_x}(x)$ функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ предельного среднего математических ожиданий $\tilde{m}_x$, когда $\tilde{m}_x$ — множество чисел (*а* — при разных условных математических ожиданиях $m_{x/\vec{g}}$, всюду плотно заполняющих интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$, *б* — при одинаковых $m_{x/\vec{g}}$ $\forall\vec{g}\in\vec{G}$), а также когда $\tilde{m}_x$ — конечный мультиинтервал (*в*)

среднее $m^*_{xN/\vec{g}}$ $\forall\vec{g}\in\vec{G}$ стремится к *детерминированной* величине m_x (см. рис. 26.2, *б*).

2. Отсутствие обычного предела для какого-нибудь вектора $\vec{g}\in\vec{G}$ означает, что соответствующее условное среднее математических ожиданий $m_{xN/\vec{g}}$ либо стремится к плюс или минус бесконечности, либо сходится к многозначной величине $\tilde{m}_{x/\vec{g}}$: интервальной, случайной или гиперслучайной.

2.1. В случае сходимости при $N\to\infty$ условных средних математических ожиданий $m_{xN/\vec{g}}$ $\forall\vec{g}\in\vec{G}$ к *интервалам* (рис. 26.2, *в*) гиперслучайная величина $\tilde{m}_x$ представляет собой *мультиинтервал* (многосвязный интервал) — множество интервалов, изображенных на рисунке затемненными областями.

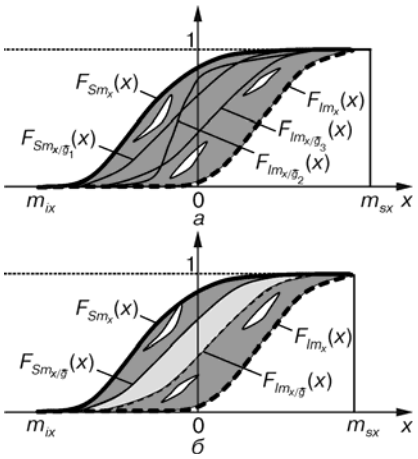


Рис. 26.3. Границы $F_{Sm_x}(x)$, $F_{Im_x}(x)$ функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ среднего математических ожиданий $\tilde{m}_x$, когда $\tilde{m}_{x/\vec{g}}$ $\forall\vec{g} \in \vec{G}$ представляет собой случайную величину (*а*) и гиперслучайную величину (*б*)

Если отдельные интервалы мультиинтервала полностью перекрываются, то мультиинтервал $\tilde{m}_x$ вырождается в интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$ (см. рис. 26.2, *а*). Тогда выборочное среднее $\tilde{m}^*_{xN}$ при $N \to \infty$ флуктуирует в этом интервале, не выходя за его границы.

2.2. Если $\tilde{m}_{x/\vec{g}}$ $\forall\vec{g} \in \vec{G}$ представляет собой *случайную величину*, то предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ состоит из непересекающихся или пересекающихся однозначных условных функций распределения $F_{m_x/\vec{g}}(x)$ (изображенных на рис. 26.3, *а* тонкими линиями). Множество этих функций распределения образуют зону неопределенности, ограниченную верхней и нижней границами распределения $F_{Sm_x}(x)$ и $F_{Im_x}(x)$ (на рис. 26.3 эта зона изображена затемненной областью).

Заметим, что в данном случае зона неопределенности не обязательно сплошная (это отражено на рис. 26.3 незатемненными фрагментами).

Вырожденным случаем такой предельной функции распределения является однозначная функция распределения $F_{m_x}(x)$. Она соответствует случаю, когда для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ оказывается предельной одна и та же функция распределения ($F_{m_x/\vec{g}}(x) = F_{m_x}(x)$).

2.3. Если условные средние математических ожиданий $\tilde{m}_{x/\vec{g}}$ представляют собой *гиперслучайные величины*, то предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ состоит из многозначных условных функций распределения $\tilde{F}_{m_x/\vec{g}}(x)$. На рис. 26.3, *б* одна из таких условных функций распределения изображена слабо затемненной областью.

На основании следствия 2 теоремы 1 параграфа 23.1 зоны неопределенности функций распределения $\tilde{F}_{m_x/\vec{g}}(x)$ — непрерывные (аналогично ситуации, описанной в параграфе 26.2). Поэтому изображенные на рис. 26.3, *б* разрывы зоны неопределенности функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ могут появляться не в результате наличия разрывов в функциях распределения $\tilde{F}_{m_x/\vec{g}}(x)$, а в результате их неплотной упаковки.

В данном случае диапазон изменения величины $\tilde{m}_x$ также ограничен интервалом $[m_{ix}, m_{sx}]$ (см. рис. 26.3, *б*).

Таким образом, теоретически при $N \to \infty$ *среднее* $\tilde{m}^*_{xN}$ *гиперслучайной выборки может сходиться к фиксированной величине (числу), к множеству фиксированных величин (чисел), флуктуировать в непересекающихся интервалах условных границ, флуктуировать во всем интервале* $[m_{ix}, m_{sx}]$ *или стремиться к* $+\infty$ *или* $-\infty$.

При этом *предельное выборочное среднее может представлять собой число, интервал, мультиинтервал, случайную величину, множество случайных величин или гиперслучайную величину с необязательно непрерывной зоной неопределенности.*

Факт различия типов величин, к которым стремятся выборочные средние случайных и гиперслучайных величин, играет существенную роль в приложениях. К этому вопросу мы вернемся позже.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Исследованы особенности центральной предельной теоремы для последовательности случайных величин при наличии и отсутствии сходимости выборочного среднего к фиксированному числу. Центральная предельная теорема обобщена на случай последовательности гиперслучайных величин. Приведены результаты экспериментальных исследований, демонстрирующие отсутствие сходимости выборочных средних реальных физических процессов к фиксированным числам.

27.1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим центральную предельную теорему в варианте, изложенном в работе [Гнеденко, 1988].

Теорема 1 (Линдеберга—Феллера). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — в общем случае неоднородная случайная выборка, элементы которой взаимно независимы и описываются функциями распределения $F_{x_n}(x)$ с математическими ожиданиями m_{x_n} и дисперсиями D_{x_n} ($n = \overline{1, N}$). Выполняется *условие Линдеберга*: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{B_N^2} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{|x-m_{x_n}|>\varepsilon B_N} (x - m_{x_n})^2 d F_{x_n}(x) = 0 , \qquad (27.1)$$

где $B_N^2 = \sum_{n=1}^{N} D_{x_n}$ — сумма дисперсий D_{x_n} случайных величин X_n, $n = \overline{1, N}$.

Тогда функция распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ выборочного среднего m^*_{xN} сходится равномерно к гауссовской функции распределения

$$F(x / m_{xN}, D_{xN}) = \Phi\left(\frac{x - m_{xN}}{\sqrt{D_{xN}}}\right) \qquad (27.2)$$

с математическим ожиданием m_{xN} и дисперсией $D_{xN} = B_N^2 / N^2$:

$$\lim_{N\to\infty} F_{m_{xN}^*}(x) = \lim_{N\to\infty} F(x / m_{xN}, D_{xN}), \qquad (27.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-z^2 / 2) dz$.

Условие (27.1) является *необходимым и достаточным условием сходимости выборочного среднего к гауссовскому распределению.*

Используя описанную в [Гнеденко, 1988] схему вывода равенства (27.3), можно доказать более общее утверждение, а именно: при выполнении указанных в теореме 1 условий разность между функцией распределения $F_{m_{xN}^*}(x)$ выборочного среднего m_{xN}^* и гауссовской функцией распределения $F(x / m_{xN}, D_{xN})$, описываемой выражением (27.2), сходится равномерно к нулю:

$$\lim_{N\to\infty} \left[F_{m_{xN}^*}(x) - F(x / m_{xN}, D_{xN}) \right] = 0. \qquad (27.4)$$

Между формулами (27.3) и (27.4) имеется существенное различие. Формула (27.3) предполагает наличие у выборочного среднего m_{xN}^* однозначной предельной функции распределения $F_{m_x^*}(x)$, к которой стремится функция $F_{m_{xN}^*}(x)$ при $N \to \infty$, и наличие однозначной предельной функции распределения $F_{m_x}(x) = F(x / m_x, D_x)$, к которой стремится функция $F(x / m_{xN}, D_{xN})$, где m_x и D_x — соответственно математическое ожидание и дисперсия предельной гауссовской функции распределения.

Формула же (27.4) допускает, что рассматриваемые предельные функции распределения могут быть многозначными функциями.

Многозначность предельной функции распределения, к которой стремится функция $F(x / m_{xN}, D_{xN})$, обусловлена многозначностью математического ожидания и (или) дисперсии. Поэтому в выражении $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$, представляющем предельную функцию распределения, фигурируют многозначные параметры $\tilde{m}_x$ и $\tilde{D}_x$. Поскольку эти параметры в общем случае многозначные, то многозначной оказывается и функция $\tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Ее можно трактовать как множество однозначных гауссовских функций распределения с различными однозначными математическими ожиданиями $m_x \in \tilde{m}_x$ и дисперсиями $D_x \in \tilde{D}_x$.

Из выражения (27.4) следует соотношение

$$F_{m^*_{xN}}(x) \to \tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x),$$

означающее, что имеет место сходимость по распределению последовательности детерминированных функций $F_{m^*_{xN}}(x)$ к многозначной функции $\tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$. Иными словами, многозначные предельные функции распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$, $\tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$ описываются одинаковыми наборами однозначных функций распределения.

Когда параметры m_x и D_x — числа, причем $D_x = 0$, предельная гауссовская функция распределения $F_{m_x}(x) = F(x / m_x, D_x)$ приобретает вид функции единичного скачка, изображенной на рис. 26.1, *а* полужирной линией; когда m_x и D_x — однозначные величины, но $D_x \neq 0$, эта функция распределения имеет вид кривой, изображенной на рис. 26.1, *б* полужирной линией. В частном случае m_x может принимать бесконечно большое по модулю значение. Тогда предельная гауссовская функции распределения располагается в плюс или минус бесконечности.

Когда предельное математическое ожидание $\tilde{m}_x$ и (или) предельная дисперсия $\tilde{D}_x$ — многозначные величины, предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ — многозначная функция. Нарис. 26.1, *в*, *г* она изображена в виде затемненной области. Отметим, что по соображениям, изложенным в параграфе 26.2, ее зона неопределенности сплошная.

Когда $D_x = 0$, а $\tilde{m}_x$ — многозначная величина, границы функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ описываются скачкообразными функциями (см. рис. 26.1, *г*). Когда D_x — число, не равное нулю, а $\tilde{m}_x$ — многозначная величина, границы функции распределения

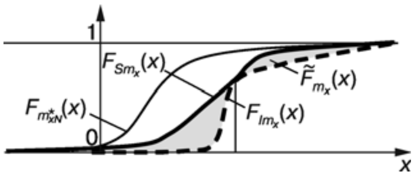


Рис. 27.1. Формирование предельной функции распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$, когда математическое ожидание m_x — число, а дисперсия $\tilde{D}_x$ — многозначная величина

$\tilde{F}_{m_x}(x)$ описываются гауссовскими непересекающимися кривыми.

Определение 1. *Функцию распределения* будем называть *фрагментарно-гауссовской,* если она описывается фрагментами гауссовских функций распределений.

Частным случаем фрагментарно-гауссовской функции распределения является гауссовская функция.

Если число фрагментов J превышает единицу, то такую функцию можно описать следующим выражением:

$$G(x) = \begin{cases} F(x / m_1, D_1) & \text{при} \quad x \le x_1, \\ F(x / m_j, D_j) & \text{при} \quad x_j < x \le x_{j+1}, \quad j = \overline{1, J-2}, \\ F(x / m_J, D_J) & \text{при} \quad x > x_{J-1}, \end{cases}$$

где $x_1, \dots, x_{J-1}$ — последовательный ряд точек на оси x, в которых происходит изменение вида распределения.

В общем случае, когда параметры $\tilde{m}_x$ и $\tilde{D}_x$ предельной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ — многозначные величины, границы предельной функции распределения описываются фрагментарно-гауссовскими кривыми.

Когда m_x — число, а $\tilde{D}_x$ — многозначная величина, предельная функция распределения $\tilde{F}_{m_x}(x)$ имеет определенную специфику: она состоит из двух соприкасающихся в одной точке областей. При этом абсцисса точки соприкосновения равна математическому ожиданию m_x, а границы представляют собой пары фрагментов гауссовских кривых (на рис. 27.1 они ограничивают затемненные области).

Таким образом, при выполнении условий Линдеберга среднее математических ожиданий, к которому стремится выборочное среднее, может быть *числом* (когда m_x — число и $D_x = 0$), *гауссовской случайной величиной* (когда m_x и D_x — числа и $D_x \neq 0$), *интервальной величиной* (когда $D_x = 0$, а $\tilde{m}_x$ — многозначная величина) или *гиперслучайной величиной* (когда $\tilde{m}_x$ и $\tilde{D}_x$ — многозначные величины) *с непрерывной зоной неопределенности* и *границами функции распределения, описываемыми фрагментарно-гауссовскими кривыми.*

27.2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим центральную предельную теорему применительно к последовательности гиперслучайных величин (гиперслучайной выборке).

Теорема 2. Пусть $X_1,\ldots,X_N$ — в общем случае неоднородная гиперслучайная выборка с взаимно независимыми при всех условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ элементами, n-й элемент выборки в условиях g_n описывается функцией распределения $F_{x_n/g_n}(x)$ с математическим ожиданием m_{x_n/g_n} и дисперсией D_{x_n/x_n}. При всех условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ выполняется условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{B_{N/\vec{g}}^2} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\left|x-m_{x_n/g_n}\right|>\varepsilon B_{N/\vec{g}}} (x - m_{x_n/g_n})^2 dF_{x_n/g_n}(x) = 0,$$

где $B_{N/\vec{g}}^2 = \sum_{n=1}^{N} D_{x_n/g_n}$ — сумма дисперсий D_{x_n/g_n} случайных величин X_n/g_n ($n = \overline{1,N}$).

Тогда при $N \to \infty$ верхняя и нижняя границы $F_{Sm_{xN}^*}(x)$, $F_{Im_{xN}^*}(x)$ функции распределения гиперслучайного выборочного среднего $\tilde{m}_{xN}^* = \left\{m_{xN/\vec{g}}^*, \vec{g} \in \vec{G}\right\}$, где $m_{xN/\vec{g}}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n/g_n$ — случайное среднее в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$, равномерно стремятся к фрагментарно-гауссовским функциям распределения.

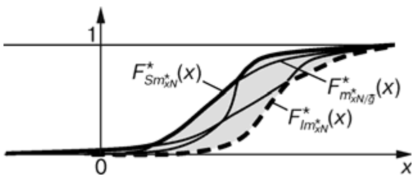


Рис. 27.2. Веер функций распределения $F_{m^*_{xN/\vec{g}}}(x)$ случайных средних $m^*_{xN/\vec{g}}$ (тонкие кривые), верхняя $F_{Sm^*_{xN}}(x)$ (полужирная сплошная кривая) и нижняя $F_{Im^*_{xN}}(x)$ (полужирная штриховая кривая) границы функции распределения гиперслучайного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$, $N = \text{const}$

Доказательство теоремы основано на центральной предельной теореме 1. На основании этой теоремы для любого набора условий $\vec{g}$

$$\lim_{N\to\infty}\left[F_{m^*_{xN/\vec{g}}}(x) - F(x/m_{xN/\vec{g}}, D_{xN/\vec{g}})\right] = 0$$

или иначе

$$\operatorname*{LIM}_{N\to\infty}\tilde{F}_{m^*_{xN}}(x) = \operatorname*{LIM}_{N\to\infty}\tilde{F}(x/\tilde{m}_{xN}, \tilde{D}_{xN}),$$

где $F_{m^*_{xN/\vec{g}}}(x)$ — функция распределения случайного выборочного среднего $m^*_{xN/\vec{g}}$; $F(x/m_{xN/\vec{g}}, D_{xN/\vec{g}})$ — гауссовская функция распределения с математическим ожиданием $m_{xN/\vec{g}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n/g_n}$ и дисперсией $D_{xN/\vec{g}} = \dfrac{1}{N^2}B^2_{N/\vec{g}}$, а $\tilde{F}_{m^*_{xN}}(x)$ — функция распределения гиперслучайного выборочного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$; $\tilde{F}(x/\tilde{m}_{xN}, \tilde{D}_{xN}) = \left\{F(x/m_{xN/\vec{g}}, D_{xN/\vec{g}}),\ \vec{g}\in\vec{G}\right\}$.

Границы функции распределения $F_{Sm^*_{xN}}(x)$, $F_{Im^*_{xN}}(x)$ гиперслучайного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$ формируются из фрагментов функций распределения $F_{m^*_{xN/\vec{g}}}(x)$ случайных средних $m^*_{xN/\vec{g}}$, $\vec{g}\in\vec{G}$ (рис. 27.2).

При большом N эти функции распределения приближаются к гауссовским распределениям. Поскольку две разные гауссовские функции распределения пересекаются не более чем в одной точке, границы функции распределения $F_{Sm^*_{xN}}(x)$, $F_{Im^*_{xN}}(x)$ гиперслучайного среднего $\tilde{m}^*_{xN}$ при $N \to \infty$ равномерно стремятся к фрагментарно-гауссовским функциям распределения.

Заметим, что рассматриваемая теорема, утверждающая, что в случае выполнения условия Линдеберга при устремлении объема выборки к бесконечности имеет место фрагментарно-гауссовский характер границ функции распределения выборочного среднего, не противоречит теореме 8 предыдущей главы, утверждающей сходимость границ гиперслучайного выборочного среднего к границам гиперслучайного среднего математических ожиданий m_{ix}, m_{sx}.

На основании теоремы 2 и выводов параграфа 27.1, при выполнении условий Линдеберга гиперслучайное среднее математических ожиданий, к которому стремится выборочное среднее, в данном случае может быть *числом, гауссовской случайной величиной, интервальной величиной или гиперслучайной величиной с необязательно непрерывной зоной неопределенности* (согласно выводам параграфа 26.4) *и границами функции распределения, описываемыми фрагментарно-гауссовскими кривыми.*

27.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ СРЕДНИХ

Для выяснения характера сходимости выборочных средних реальных процессов ниже приведены результаты обработки записей колебаний напряжения городской электросети и интенсивности излучения пульсара PSRJ 1012+5307 в рентгеновском диапазоне частот (см. параграф 9.2 и главу 12).

Выбор именно этих записей связан с тем, что колебание напряжения сети — одно из наиболее неустойчивых колебаний, а колебание интенсивности излучения пульсара — одно из наиболее устойчивых.

27.3.1. Экспериментальные исследования колебаний напряжения электросети

В параграфе 9.2 приведены методика получения записей колебаний напряжения электросети и результаты исследования статистической устойчивости этих колебаний.

Обработка записей сводилась к вычислению и анализу выборочных средних m^*_{xN} и оценок параметров статистической неус-

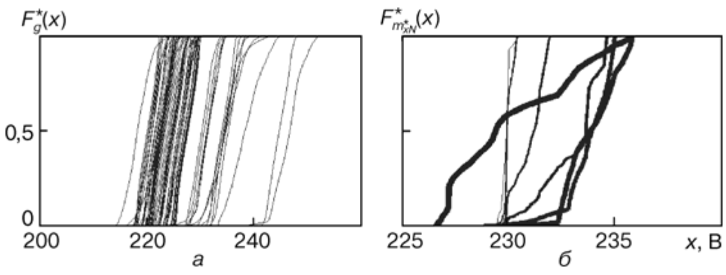


Рис. 27.3. Оценки функции распределения напряжения электросети $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (*а*) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при различных объемах выборки $N = 2^r$ ($r = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$) (*б*) (толщина линий возрастает с увеличением параметра *r*)

тойчивости γ_N^*, μ_N^* (см. главу 5), позволяющих оценить интервал статистической устойчивости.

В результате исследования 60-часовых записей колебания напряжения было установлено, что интервал статистической устойчивости равен примерно 1 часу.

Для выяснения характера нарушений статистической устойчивости дополнительно исследовались функции распределения колебания напряжения $F_g^*(x)$ на прилегающих друг к другу интервалах наблюдения длительностью около часа ($g = \overline{1,64}$) и функции распределения выборочного среднего $F_{m_{xN}^*}^*(x)$.

Результаты расчета этих функций распределения для записи, изображенной на рис. 1.5, *а* (глава 1), приведены на рис. 27.3.

Как видно из рис. 1.5, *а* и 27.3, *а*, качество электросети низкое. В данном случае напряжение колеблется между $x_i = 215$ В и $x_s = 255$ В.

Выборочное среднее не проявляет тенденции к стабилизации (см. рис. 1.5, *б*), что свидетельствует о явном нарушении статистической устойчивости процесса.

Кривые функции распределения $F_g^*(x)$, соответствующие разным значениям параметра g, сильно отличаются друг от друга (в первую очередь по своему местоположению) (рис. 27.3, *а*), что свидетельствует о выраженной нестационарности исследуемого колебания.

Кривые функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 27.3, *б*), демонстрируют полное отсутствие тенденции стремления функции распределения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$ и стремление выборочного среднего m^*_{xN} к какому-то определенному предельному значению m_x.

При небольших значениях параметра r (8 и 10) по виду кривых функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ (рис. 27.3, *б*) с некоторым уровнем скептицизма все же можно предположить наличие стремления ее к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей, с уменьшающейся дисперсией при увеличении объема выборки). Однако при больших значениях r (начиная с 10 до 20), как видно из рисунка, предполагаемая тенденция не подтверждается: закон распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ становится явно негауссовским.

С увеличением объема выборки дисперсия выборочного среднего m^*_{xN} то возрастает (для значений r от 8 до 14 и от 18 до 20), то спадает (для значений r от 14 до 18). В целом при переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия не только не проявляет тенденции стремления к нулю, предсказываемой теорией вероятностей (см. рис. 26.1, *а*), а возрастает, причем во много раз (размах выборочного среднего увеличивается примерно от 1 до 8 В).

Судя по полученным результатам, функция распределения выборочного среднего стремится к многозначной функции $\tilde{F}_{m_x}(x)$ общего вида (типа изображенной на рис. 26.1, *в*). К такому же выводу приводит анализ результатов обработки данных, полученных в других сеансах записи колебаний напряжения электросети.

27.3.2. Экспериментальные исследования колебаний интенсивности пульсара

В главе 12 приведены результаты исследования статистической устойчивости колебаний пульсара PSRJ 1012+5307 на основе данных, взятых с сайта [All-Sky Monitor].

Колебание интенсивности излучения пульсара за 16 лет наблюдения приведены на рис. 12.3, *а*, а его выборочного среднего — на рис. 12.3, *в*.

Колебание интенсивности пульсара, как следует из рис. 12.3, *а*, напоминает белый шум. Показания прибора, регистрирующего интенсивность излучения, изменяются в диапазоне от $x_i = -15$ В до $x_s = 15$ В.

На рис. 12.3, *в* кривая выборочного среднего на первый взгляд проявляет тенденцию к стабилизации, что свидетельствует об отсутствии явно выраженных нарушений статистической устойчивости процесса. На отсутствие явных нарушений статистической устойчивости указывает и близость кривых оценок функций распределения напряжения $F_g^*(x)$, рассчитанных для прилегающих друг к другу интервалов наблюдения длительностью три месяца ($g = \overline{1,64}$) (рис. 27.4, *а*).

Однако кривые оценок функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$, полученные для нарастающих по экспоненциальному закону объемов выборки (рис. 27.4, *б*), демонстрируют

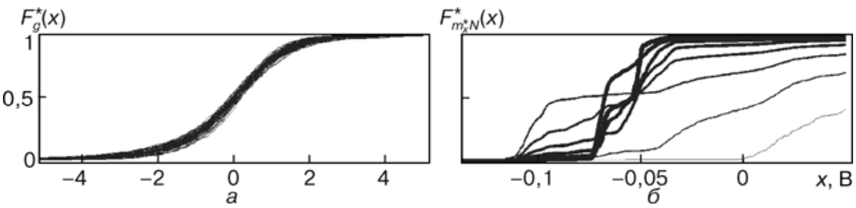


Рис. 27.4. Оценки функции распределения излучения пульсара $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (*а*) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ ($r = \overline{8,15}$) (*б*) (толщина линий возрастает с увеличением параметра r)

отсутствие стремления выборочного среднего m^*_{xN} к какому-то определенному предельному значению m_x и даже отсутствие тенденции стремления функции распределения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к какой-то определенной предельной функции распределения $F_{m_x}(x)$.

По динамике изменения функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ при небольших значениях параметра r (от 8 до 13) можно предположить наличие стремления этой функции распределения к гауссовскому распределению (причем, как и предсказывает теория вероятностей, с уменьшающейся дисперсией при увеличении объема выборки). Но при больших значениях r (начиная с 13 до 15) предполагаемая тенденция не прослеживается: закон распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ становится явно негауссовским.

При переходе от малых к большим объемам выборки дисперсия выборочного среднего m^*_{xN} вначале проявляет тенденцию к уменьшению (при изменении r от 8 до 13), но затем перестает уменьшаться. Размах выборочного среднего остается примерно на одном и том же уровне (примерно $0{,}04$ В).

Судя по виду кривых функции распределения выборочного среднего, можно предположить стремление функции $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к многозначной функции $\tilde{F}_{m_x}(x)$ типа изображенной на рис. 27.1.

Подобным образом были исследованы выборочные средние и других описанных в части II процессов. В этих исследованиях ни разу не была зафиксирована тенденция стремления оценки функции распределения выборочного среднего $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к какому-то определенному закону распределения, а тем более к гауссовскому закону с дисперсией, стремящейся к нулю.

Полученные результаты экспериментальных исследований показывают, что реальные оценки носят гиперслучайный характер. Гиперслучайная природа оценок проявляется на больших интервалах усреднения, превосходящих интервал статистической устойчивости. На небольших же интервалах усреднения оценки практически случайные.

27.4. ДЕЙСТВИЕ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕАЛЬНЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ВЕЛИЧИНАМ

Проведенные исследования указывают на то, что *потенциальная точность измерений реальных физических величин должна быть ограниченной.* Ограничение точности обусловлено неидеальным характером феномена статистической устойчивости, проявляющимся в отсутствии сходимости статистических оценок (их несостоятельностью).

При возрастании объема статистических данных вначале при небольших интервалах усреднения уровень флуктуаций статистических оценок уменьшается. Но из-за нарушения статистической устойчивости, начиная с некоторого критического объема данных (интервала статистической устойчивости), эти флуктуации приобретают незатухающий характер, что приводит к ограничению точности реальных измерений. Потенциальная точность измерения определяется диапазоном $[a,b]$, в котором флуктуирует оценка.

Механизм ограничения точности выборочного среднего m^*_{xN} достаточно прозрачен. Незатухающие флуктуации оценки m^*_{xN} в диапазоне $[a,b]$ сопровождаются синхронными флуктуациями среднего математических ожиданий m_{xN}. При этом, как предписывает закон больших чисел и центральная предельная теорема, величина $\left|m^*_{xN} - m_{xN}\right|$ постепенно уменьшается, а функция распределения выборочного среднего $F_{m^*_{xN}}(x)$ проявляет стремление к гауссовскому распределению $F(x / m_{xN}, D_{xN})$ с математическим ожиданием m_{xN} и дисперсией D_{xN}.

Однако параметры m_{xN} и D_{xN} этого распределения постоянно изменяются. Вместе с ними изменяются функции распределения $F(x / m_{xN}, D_{xN})$ и $F_{m^*_{xN}}(x)$. Из-за нарушения сходимости предельная функция распределения $\tilde{F}_{m^*_x}(x)$, к которой стремится

$F_{m_{xN}^*}(x)$, и предельная функция распределения $\tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$, к которой стремится $F(x / m_{xN}, D_{xN})$, оказываются многозначными. Соответствующая им зона неопределенности определяется диапазоном изменения параметров m_{xN} и D_{xN} при $N \to \infty$.

Экспериментальные исследования показывают, что *при относительно небольших интервалах усреднения флуктуации оценки* m_{xN}^* *носят практически случайный характер, на больших же интервалах проявляется их гиперслучайная природа.*

КОНЦЕПЦИИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ

Проанализированы две концепции оценки точности измерений: концепция погрешности и концепция неопределенности. Рассмотрен ряд моделей измерений.

28.1. СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Точность измерения — качественная категория, характеризуемая количественно *погрешностью* или *неопределенностью измерения.*

Для характеристики точности измерения в настоящее время применяются два подхода. Один из них основан на *концепции погрешности* измерения, другой — на *концепции неопределенности* измерения.

28.1.1. Концепция погрешности

Основы концепции погрешности были заложены еще Галилео Галилеем [Галилей, 1948], который ввел понятия систематической и случайной погрешностей.

В метрологии различают три близких понятия, используемых при определении понятия погрешности: истинное значение измеряемой физической величины, действительное ее значение и результат измерения.

Определение 1. *Истинное значение* — значение измеряемой физической величины, идеальным образом отражающее свойство данного объекта в количественном и в качественном отношениях.

Истинное значение — объективная принципиально не достижимая абсолютная истина.

Обратим внимание, что истинное значение понимается как *детерминированное, неизменное* и *однозначное.*

На практике абстрактное понятие истинного значения заменяют понятием «действительное значение».

Определение 2. *Действительное значение* — это экспериментально найденное значение измеряемой физической величины, близкое к истинному, отличающееся от него на величину, которая считается пренебрежимо малой для данной цели.

Определение 3. *Результат измерения* представляет собой приближенную оценку истинного значения величины, найденную путем измерения.

Определение 4. *Погрешность результата измерения* — разница между результатом измерения и истинным (или действительным) значением измеряемой величины [Сергеев, Крохин, 2001].

Погрешность изменяется во времени. Зависимость погрешности от времени представляет собой широкополосный процесс.

По характеру проявления погрешности делят на *систематические, случайные, прогрессирующие и грубые* (*промахи*). Деление погрешности на отдельные составляющие связано с попыткой независимого описания разных участков частотного спектра. Такое деление является условным. Оно введено исключительно для удобства.

Определение 5. Под *систематической* понимают *погрешность*, которая при многократном измерении остается постоянной или изменяется по определенному закону [Тюрин, 1973].

Определение 6. Под *случайной* понимают *погрешность*, которая при повторных измерениях изменяется случайным образом [Тюрин, 1973].

Возникновение случайной погрешности обычно связывают со случайными временными и (или) пространственными изменениями множества различных влияющих величин, а систематическую погрешность — с отклонениями параметров или условий измерения от идеальных.

Систематическая погрешность отражает особенности спектра погрешности на нулевой частоте (или в близлежащей области).

Случайную погрешность можно уменьшить путем статистической обработки результатов ряда измерений, систематическую ошибку, как правило, — путем учета тех или иных известных зависимостей результата измерений от параметров, влияющих на результат.

В ряде случаев систематическая погрешность частично может быть скомпенсирована путем применения особых способов измерения, которые дают возможность без определения ее величины уменьшить ее влияние на конечный результат. Известен целый ряд таких способов: замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений и др. [Тюрин, 1973].

Если систематическая погрешность не изменяется от измерения к измерению (этот факт, как правило, принимается по умолчанию, если не оговорено противное), то систематическая погрешность совпадает с математическим ожиданием суммарной погрешности. При этом математическое ожидание случайной погрешности оказывается равным нулю.

Определение 7. *Прогрессирующая* (*дрейфовая*) *погрешность*[1] — это *непредсказуемая погрешность*, медленно изменяющаяся во времени [Сергеев, Крохин, 2001].

Прогрессирующая погрешность отражает особенности спектра погрешности в диапазоне низких и инфранизких частот. Выразить ее через систематическую погрешность и случайную погрешность с определенным законом распределения нельзя.

С математической точки зрения прогрессирующая погрешность возникает вследствие изменчивости во времени закона распределения, в частности, математического ожидания, дисперсии и других параметров.

Прогрессирующую погрешность обычно связывают с процессами старения или износа деталей измерительных устройств: разрядкой источников питания, старением радиоэлементов, деформацией и изменением упругости механических деталей, окислением, коррозией и пр. Эти процессы очень медленные. Заметные изменения погрешности нередко наступают по истечении месяцев, лет или даже десятилетий.

Понятие прогрессирующей погрешности используется при исследовании динамики изменения погрешности средств измерения [Новицкий, Зограф, Лабунец, 1990] и их метрологической надежности.

Во всей известной автору метрологической литературе (в частности цитированных в этом параграфе книгах) прогрессирующая погрешность трактуется как *нестационарный случайный процесс*. Вопрос о возможно *неслучайном характере этой погрешности* не обсуждается.

Особого интереса к прогрессирующей погрешности метрологи не проявляют. В подавляющем числе учебников и монографий по метрологии о ней либо вообще не упоминается, либо упоминается вскользь. При проведении большинства метрологических работ ее обычно игнорируют.

---

[1] Впервые понятие прогрессирующей погрешности было введено в монографии М.Ф. Маликова [Маликов, 1949].

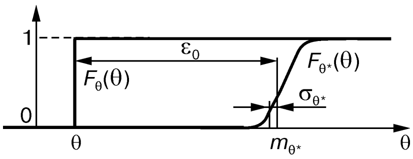


Рис. 28.1. Детерминированно-случайная модель измерения

Определение 8. *Грубая погрешность* (*промах*) — это *случайная погрешность* результата отдельного наблюдения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда [Сергеев, Крохин, 2001].

Промахи, как правило, возникают из-за ошибок или неправильных действий оператора либо кратковременных резких изменений условий проведения измерений.

Таким образом, погрешность измерения обычно рассматривается (за редким исключением учета прогрессирующей погрешности) как стационарный случайный процесс, представляемый систематической и случайной (с нулевым математическим ожиданием) составляющими.

При построении физических моделей измеряемых величин и их оценок предполагают, что величины, подлежащие измерению, носят детерминированный, а их оценки — случайный характер. Для математического описания измеряемых величин используют детерминированные математические модели, а для описания их оценок — случайные (стохастические) модели с определенными законами распределения. На этом построена вся современная классическая теория измерений.

В случае измерения скалярной величины измеряемую величину θ можно представить скачкообразной функцией распределения $F_\theta(\theta)$, а результат измерения (оценку Θ^*) — функцией распределения $F_{\theta^*}(\theta)$ (рис. 28.1). Такую модель измерения естественно назвать *детерминированно-случайной.*

Погрешность измерения обычно характеризуют либо систематической погрешностью ε_0 (математическим ожиданием погрешности, равным разности между математическим ожиданием оценки m_{θ^*} и значением измеряемой величины θ) и среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_{θ^*} случайной погрешности (СКО оценки Θ^*), либо доверительным интервалом $I_\gamma(p) = [\Theta^* - \varepsilon_0 - \varepsilon, \Theta^* - \varepsilon_0 + \varepsilon]$, соответствующим определенной доверительной вероятности $\gamma = P(|\Theta^* - \varepsilon_0 - \theta| \le \varepsilon)$ того, что абсолютное отклонение случайной величины $\Theta^* - \varepsilon_0$ от измеряемой величины θ не больше некоторой заданной величины ε.

Иногда случайную погрешность характеризуют интервалом $[-\varepsilon, \varepsilon]$ без указания доверительной вероятности. Трактовка такого варианта описания может быть разной.

Первый вариант предполагает, что погрешность имеет определенный, отражающий существо задачи, закон распределения и соответствующая этому интервалу доверительная вероятность близка к единице (без конкретизации точного значения).

Второй вариант предполагает, что закон распределения случайной погрешности равномерный на интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и соответствующая доверительная вероятность равна единице.

Третий вариант (обычно не обсуждаемый в литературе) может предполагать, что интервал $[-\varepsilon, \varepsilon]$ представляет множество возможных значений изменяемой части погрешности без указания плотности распределения. Это означает, что она носит интервальный характер и потому может трактоваться как случайная лишь в переносном смысле. Такую модель измерения естественно назвать *детерминированно-интервальной.* К этой модели вернемся несколько позже. Здесь же отметим, что по сути она близка к рассматриваемой ниже модели, соответствующей концепции неопределенности.

28.1.2. Концепция неопределенности

В рамках концепции неопределенности рассматриваются два типа неопределенностей измерения: по типу A и по типу B.

Определение 9. Под *неопределенностью по типу* A подразумевают все составляющие неопределенности, оцениваемые путем применения статистических методов, а под *неопределенностью по типу* B — все составляющие, оцениваемые другими способами [Руководство, 1999, Uncertainty, 2009].

В указанных документах приведен перечень возможных источников возникновения неопределенности, включающий

1) неполное определение измеряемой величины;

2) несовершенную реализацию определения измеряемой величины;

3) нерепрезентативную выборку — измеренный образец может не представлять определяемую измеряемую величину;

4) неточные данные об условиях окружающей среды, влияющих на измерение, или несовершенное измерение условий окружающей среды;

5) субъективную систематическую погрешность оператора при снятии показаний аналоговых приборов;

6) конечную разрешающую способность прибора или порог чувствительности;

7) неточные значения, приписанные эталонам, используемым для измерения, и стандартным образцам веществ и материалов;

8) неточные значения констант и других параметров, полученных из внешних источников и используемых в алгоритме обработки данных;

9) аппроксимации и предположения, используемые в методе измерения и измерительной процедуре;

10) изменения в повторных наблюдениях измеряемой величины при одинаковых условиях.

Эти источники не обязательно являются независимыми и некоторые из источников от 1) до 9) могут вносить вклад в источник 10).

Неопределенность измерения измеряемой величины θ характеризуется неопределенностью $u_{A\theta}$ по типу A, неопределенностью $u_{B\theta}$ по типу B, *суммарной стандартной неопределенностью* $u_\theta = \sqrt{u_{A\theta}^2 + u_{B\theta}^2}$ и *расширенной неопределенностью* $U_\theta = ku_\theta$ (где k — коэффициент охвата).

Деление погрешностей на случайные и систематические обусловлено *природой их возникновения* и *проявления* в ходе измерений, а деление неопределенностей по типам А и В — *методами их расчета*.

В настоящее время в среде метрологов бытует мнение, что концепция неопределенности более прогрессивная, чем концепция погрешности. Частично можно согласиться с их точкой зрения, но лишь частично.

С одной стороны, переход от стохастической (в концепции погрешности) к неопределенной модели (в концепции неопределенности), трактуемой значительно шире, чем стохастическая модель, может только приветствоваться. Однако, с другой стороны, игнорирование природы возникновения и проявления неопределенности делает концепцию неопределенности оторванной от реалий жизни.

Здесь уместно напомнить слова Б.В. Гнеденко в комментарии к шестой проблеме Гильберта [Проблемы Гильберта, 1969]: «...каждая естественнонаучная дисциплина имеет свой материальный объект исследования и ее содержание определяется природой тех реальных явлений, которые она изучает. Не метод исследования, а материальный предмет исследования является определяющим для каждой науки о природе».

Игнорировать физику явлений никак нельзя, впрочем, как и ограничиваться учетом лишь случайных источников неточности измерений.

На наш взгляд, дальнейшее концептуальное развитие теории измерений необходимо проводить либо по пути модернизации концепции погрешности в направлении расширения модели измерения, учитывающей воздействие различных, не только случайных, факторов, либо по пути модернизации концепции неопределенности в направлении учета природы возникновения и проявления неточности измерений.

В дальнейшем будем следовать первому пути.

28.2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ

Современная метрология исходит из того, что

• истинное значение физической величины детерминировано, однозначно и за время проведения измерения не изменяется,

• за время проведения измерения средства измерения не изменяют своих характеристик,

• за время проведения измерения статистические условия постоянны,

• результат конкретного измерения однозначен.

Все эти пункты, мягко говоря, не очень обоснованы.

Все реальные физические объекты и описывающие их физические величины подвержены изменению во времени (за исключением, возможно, мировых констант). *Изменяется все: объект измерения, средства измерения и условия проведения измерений.*

Поскольку любое измерение осуществляется не мгновенно, а в течение некоторого интервала времени, *результат измерения представляет собой некоторую усредненную величину, отражающую различные состояния измеряемого объекта, различные состояния средства измерения и различные условия измерения.*

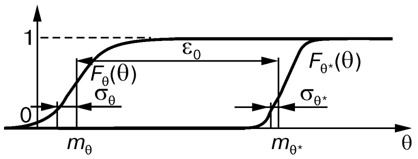


Рис. 28.2. Случайно-случайная модель измерения

Конечно, удобно представлять измеряемую величину детерминированной, однозначной и неизменной величиной, а результат измерения — случайной величиной. Но эта примитивная модель не отражает множество нюансов реальной ситуации.

Первый шаг к более полному учету действительности — предположить, что не только оценка Θ^*, но и измеряемая величина носит случайный характер. На рис. 28.2 схематично изображены функции распределения $F_\theta(\theta)$ и $F_{\theta^*}(\theta)$ измеряемой величины и оценки, соответствующие указанной модели. Такую модель измерения естественно назвать *случайно-случайной.*

В данном случае смещение оценки $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - m_\theta$, где m_{θ^*} — математическое ожидание оценки Θ^*; m_θ — математическое ожидание измеряемой случайной величины Θ; σ_θ, σ_{θ^*} — среднеквадратические отклонения соответственно измеряемой случайной величины Θ и ее оценки Θ^*.

Уточненными детерминированно-случайной и случайно-случайной моделями являются *детерминированно-гиперслучайная* (рис. 28.3, *а*) и *случайно-гиперслучайная* (рис. 28.3, *б*) *модели.* В первой из них измеряемая величина описывается детерминированной, а во второй — случайной величиной. В обеих моделях оценка представляется гиперслучайной величиной.

На рисунках $F_{S\theta^*}(\theta)$ и $F_{I\theta^*}(\theta)$ — соответственно верхняя и нижняя границы функции распределения гиперслучайной оценки Θ^*; ε_{S0} и ε_{I0} — смещения верхней и нижней границ функции распределения гиперслучайной оценки относительно измеряемой величины (если эта величина — детерминированная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - \theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - \theta$, если случайная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - m_\theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - m_\theta$); $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ — математические ожидания верхней и нижней границ гиперслучайной оценки; $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ — среднеквадратические отклонения соответствующих границ гиперслучайной оценки. Зона неопределенности гиперслучайной оценки показана затемненной областью.

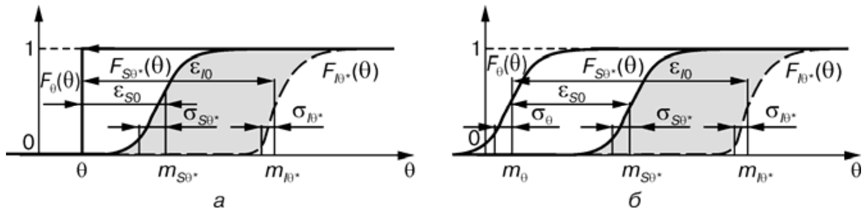
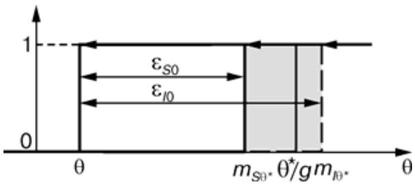


Рис. 28.3. Детерминированно-гиперслучайная (*а*) и случайно-гиперслучайная (*б*) модели измерения

Рис. 28.4. Детерминированно-интервальная модель измерения



Частным случаем детерминированно-гиперслучайной модели измерения является *детерминированно-интервальная модель* (рис. 28.4), о которой шла речь в п. 28.1.1. В этом случае измеряемая величина рассматривается как детерминированная, а оценка — как интервальная величина. Зона неопределенности интервальной величины представлена затемненной областью.

Следующим шагом приближения к действительности можно считать *гиперслучайно-гиперслучайную модель измерения*, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами.

Начнем рассмотрение моделей измерения, альтернативных классической, с детерминированно-гиперслучайной модели, а затем рассмотрим гиперслучайно-гиперслучайную модель.

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Исследована детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок — понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Показано, что гиперслучайные оценки детерминированных величин несостоятельны и поэтому точность измерений оказывается ограниченной.

29.1. ТОЧЕЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим задачу оценки детерминированной величины θ по результатам наблюдения гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$.

Точечную гиперслучайную оценку Θ^* будем рассматривать как некоторую статистику — функцию выборки $\vec{X}$ объема N из гиперслучайной генеральной совокупности. Оценку Θ^* можно описать множеством случайных величин Θ^* / g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\Theta^* = \{\Theta^* / g \in G\}$. При этом случайная оценка Θ^* / g является функцией случайной выборки $\vec{X} / g$.

Конкретную величину θ^* гиперслучайной оценки Θ^* можно представить множеством детерминированных величин θ^* / g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\theta^* = \{\theta^* / g \in G\}$.

В зависимости от постановки задачи *точность точечной оценки* можно характеризовать по-разному. В общем случае точность характеризует *гиперслучайная погрешность* $Z = \Theta^* - \theta$. При фиксированном условии g в качестве параметра точности оценки может выступать величина $\Delta^2_{z/g}$ — математическое ожидание квадрата *случайной погрешности* $Z/g = \Theta^* / g - \theta$:

$$\Delta^2_{z/g} = \mathrm{M}\left[\left|\Theta^* / g - \theta\right|^2\right].$$

Для характеристики точности оценки в изменяющихся условиях можно использовать интервал, в котором находятся величины $\Delta^2_{z/g}$ ($g \in G$). Погрешность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому верхняя граница рассматриваемого интервала

$$\Delta^2_{\max} = \max[\Delta^2_{Sz}, \Delta^2_{Iz}],$$

где $\Delta^2_{Sz} = \mathrm{M}_S[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$, $\Delta^2_{Iz} = \mathrm{M}_I[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$ — *средние квадраты погрешности* Z, рассчитанные с использованием соответственно верхней $F_{S\theta^*}(\theta)$ и нижней $F_{I\theta^*}(\theta)$ границ функции распределения.

Точность точечной оценки можно охарактеризовать также *границами среднего квадрата погрешности* Z:

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[\left|\Theta^* / g - \theta\right|^2], \quad \Delta^2_{sz} = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[\left|\Theta^* / g - \theta\right|^2].$$

29.2. НЕСМЕЩЕННАЯ И СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 1. *Гиперслучайная оценка* Θ^* детерминированной величины θ называется *несмещенной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\Theta^* / g]$ условной случайной величины Θ^* / g равно оцениваемой величине: $m_{\theta^* / g} = \theta$. В противном случае оценка называется *смещенной.*

Величина смещения (*систематическая погрешность*) в условиях g описывается выражением $\varepsilon_{0/g} = m_{\theta^* / g} - \theta$.

Границы Δ^2_{Sz}, Δ^2_{Iz} и Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} можно представить следующим образом:

$$\Delta^2_{Sz} = m^2_{Sz} + \sigma^2_{Sz}, \qquad \Delta^2_{Iz} = m^2_{Iz} + \sigma^2_{Iz},$$

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2],$$

где $m_{Sz} = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$, $m_{Iz} = m_{I\theta^*} - \theta = \varepsilon_{I0}$ — математические ожидания границ погрешности, представляющие собой смещения оценки относительно соответственно верхней и нижней границ функции распределения; $\sigma_{Sz}^2 = \mathrm{M}_S\left[\left(Z - m_{Sz}\right)^2\right]$, $\sigma_{Iz}^2 = \mathrm{M}_I\left[\left(Z - m_{Iz}\right)^2\right]$ — дисперсии границ погрешности, совпадающие с дисперсиями границ оценки $\sigma_{S\theta^*}^2$, $\sigma_{I\theta^*}^2$; $\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 = \mathrm{M}\left[\left(\Theta^* / g - m_{\theta^*/g}\right)^2\right]$ — условная дисперсия погрешности, совпадающая с условной дисперсией оценки (рис. 29.1).

В изменяющихся условиях погрешность z описывается неравенством

$$\varepsilon_{S0} - k\sigma_{Sz} < z < \varepsilon_{I0} + k\sigma_{Iz}, \tag{29.1}$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ при наличии оценки θ^* в этих неопределенных условиях — неравенством

$$\theta^* - \varepsilon_{I0} - k\sigma_{Iz} < \theta < \theta^* - \varepsilon_{S0} + k\sigma_{Sz}, \tag{29.2}$$

где k — константа, определяющая степень доверия.

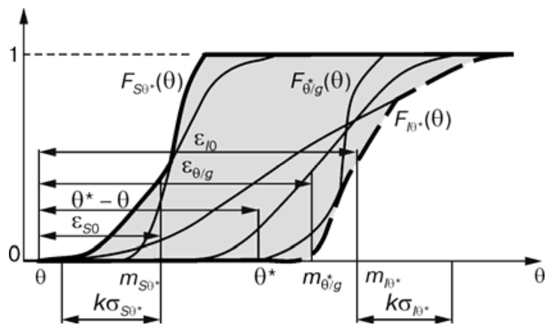


Рис. 29.1. Веер условных функций распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ (тонкие кривые) для различных условий g, верхняя $F_{S\theta^*}(\theta)$ (полужирная сплошная линия) и нижняя $F_{I\theta^*}(\theta)$ (полужирная пунктирная линия) границы функции распределения

Если условные функции распределения оценки Θ^* / g не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ их условные дисперсии $\sigma^2_{\theta^*/g}$ увеличиваются (тип распределения «*а*» в соответствии с классификацией, введенной в параграфе 15.4) или уменьшаются (тип распределения «*б*»), этот интервал определяется границами смещения $\varepsilon_{i0} = \inf\limits_{g \in G} \varepsilon_{0/g}$, $\varepsilon_{s0} = \sup\limits_{g \in G} \varepsilon_{0/g}$ и границами среднеквадратического отклонения оценки $\sigma_{i\theta^*}$, $\sigma_{s\theta^*}$.

Для распределения типа «*а*» он равен

$$[\theta^* - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{s\theta^*},\, \theta^* - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{i\theta^*}],$$

а для распределения типа «*б*» —

$$[\theta^* - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{i\theta^*},\, \theta^* - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{s\theta^*}].$$

Определение 2. *Гиперслучайная оценка* Θ^* *детерминированной величины* θ называется *состоятельной*, если при всех условиях $g \in G$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N \to \infty} P\{|\Theta^* / g - \theta| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall g \in G,$$

где N — объем выборки для каждого g; $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

Далеко не все гиперслучайные оценки состоятельны. В параграфе 26.3 отмечено, что в общем случае при увеличении объема выборки гиперслучайное среднее стремится не к определенному числу, а к множеству чисел. Лишь в исключительном случае оно стремится к числу.

Определение 3. Несостоятельные гиперслучайные оценки называют *оценками гиперслучайного типа*, а состоятельные — *случайного типа*.

Реальные статистические условия наблюдения величин постоянно изменяются. Поэтому оценки реальных величин, обычно рассматриваемые как случайные и состоятельные, более правильно считать *гиперслучайными и несостоятельными*.

При использовании детерминированно-случайной модели измерения погрешность представляет собой случайную величину. Она описывается систематической и случайной составляющими. Эти составляющие можно охарактеризовать двумя параметрами: смещением ε_0 и среднеквадратическим отклонением σ_z. При этом погрешность z конкретного измерения может

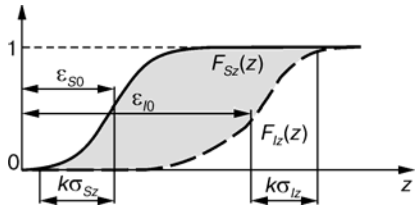


Рис. 29.2. Модель погрешности измерения

быть описана неравенством

$$\varepsilon_0 - k\sigma_z < z < \varepsilon_0 + k\sigma_z .$$

В случае детерминированно-гиперслучайной модели измерений погрешность представляет собой гиперслучайную величину. Она определяется зоной неопределенности и описывается неравенством (29.1), в котором фигурируют четыре параметра: $\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}, \sigma_{Sz}, \sigma_{Iz}$. Эти параметры задают на оси погрешности местоположение и размер зоны неопределенности (рис. 29.2).

В частном случае, когда границы функции распределения различаются лишь математическими ожиданиями (тогда $\sigma_{Sz} = \sigma_{Iz} = \sigma_z$), погрешность Z может быть представлена аддитивной моделью $Z = \mathrm{E}_0 + V$ с двумя составляющими: *неопределенной составляющей* E_0, характеризующей местоположение и протяженность зоны неопределенности, и *случайной составляющей V*, характеризующей форму этой зоны.

Неопределенная составляющая E_0 — *статистически непрогнозируемая* — может быть описана интервальной величиной $[\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}]$, а случайная составляющая V — среднеквадратическим отклонением σ_z.

Неопределенная составляющая E_0 может быть представлена в виде суммы систематической составляющей ε_{S0}, характеризующей начало зоны неопределенности, и интервальной величины $[0, \varepsilon_{I0} - \varepsilon_{S0}]$, характеризующей протяженность этой зоны неопределенности. При этом погрешность имеет три составляющие: *систематическую*, *случайную* и *интервальную*.

Таким образом, в детерминированно-случайной и детерминированно-гиперслучайной моделях измерения погрешности разные. В первом случае погрешность носит случайный характер и содержит систематическую и случайную составляющие. Во втором — гиперслучайный характер и *в общем случае не может быть разложена на составляющие*.

В частном случае погрешность может быть представлена тремя составляющими: систематической, случайной и интервальной.

29.3. ЭФФЕКТИВНАЯ И ДОСТАТОЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Важной характеристикой оценки является ее эффективность.

Определение 4а. *Гиперслучайная оценка* Θ_e^* *детерминированной величины* θ называется *эффективной* (*при всех условиях* $g \in G$), если условные математические ожидания квадрата отклонения оценки Θ_e^* / g от величины θ по совокупности выборок заданного объема N не больше, чем для любых других оценок Θ_i^* / g:

$$\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2] \le \mathrm{M}[(\Theta_i^* / g - \theta)^2], \quad i = 1, 2, \ldots \quad \forall g \in G. \qquad (29.3)$$

В общем случае величина $\mathrm{M}\left[(\Theta^* / g - \theta)^2\right]$ — не дисперсия оценки $\sigma^2_{\theta^* / g}$. Она является таковой лишь для несмещенных оценок. Для этих оценок условие эффективности может быть записано в виде $\sigma^2_{\theta_e^* / g} \le \sigma^2_{\theta_i^* / g}$, $i = 1, 2, \ldots \quad \forall g \in G$.

Мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_s, l_i, определяемые как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения эффективной оценки Θ_e^* к математическому ожиданию квадрата отклонения рассматриваемой оценки Θ^*:

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \theta)^2]}, \quad l_i = \inf_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \theta)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. В случае, когда оценка эффективна, $l_s = l_i = 1$.

Границы погрешности можно оценить с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерной условной плотности распределения $f_{\vec{x} / \theta, g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность вероятности абсолютно интегрируема по $\vec{x}$, дважды дифференцируема по θ и, кроме того, для условной случайной оценки Θ^*/g существуют первые два момента. Тогда границы среднего квадрата погрешности Δ_{sz}^2, Δ_{iz}^2 и границы $\sigma_{s\theta^*}^2$, $\sigma_{i\theta^*}^2$ условной дисперсии оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$ определяются неравенствами

$$\Delta_{sz}^2 \geq \sigma_{s\theta^*}^2 \geq \sup_{g \in G} \left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta} \right)^2 J_g^{-1} \right],$$

$$\Delta_{iz}^2 \geq \sigma_{i\theta^*}^2 \geq \inf_{g \in G} \left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta} \right)^2 J_g^{-1} \right], \tag{29.4}$$

где J_g — *информация по Фишеру*:

$$J_g = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2} \right],$$

$\mathrm{M}[\cdot]$ — оператор математического ожидания, действующий в данном случае на вектор $\vec{X}$.

Доказательство теоремы основано на известном *неравенстве Крамера—Рао для случайных оценок* [Левин Б.Р., 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003]. При выполнении указанных условий для случайных величин Θ^*/g справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{M}\left[(\Theta^* - \theta)^2 / g \right] \geq \sigma_{\theta^*/g}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta} \right)^2 J_g^{-1}. \tag{29.5}$$

На его основании справедливы неравенства (29.4).

Из выражения (29.4) видно, что для обеспечения нулевой дисперсии величина $\partial \varepsilon_{0/g} / \partial \theta$ должна быть равной -1. Отсюда следует, что так же, как в случае случайных оценок, невозможно одновременно обеспечить нулевое смещение и нулевую дисперсию.

Для однородной независимой выборки

$$f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} f_{x_n/\theta,g}(x_n) \text{ и } J_g = -N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{x/\theta,g}(X)}{\partial \theta^2} \right].$$

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки используется и другое определение.

Определение 4б. *Эффективной оценкой* Θ_e^* называется оценка Θ^*, для которой границы математического ожидания определяются равенствами

$$\mathrm{M}_s\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \sup_{g \in G}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}\right],$$

$$\mathrm{M}_i\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \inf_{g \in G}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}\right]. \qquad (29.6)$$

В общем случае определения (29.3) и (29.6) не эквивалентны. Если эффективная оценка в соответствии с выражениями (29.6) всегда удовлетворяет неравенству (29.3), то эффективная оценка в соответствии с выражением (29.3) не всегда удовлетворяет равенствам (29.6). Если не существует эффективной оценки в соответствии с выражениями (29.6), то эти выражения характеризуют не потенциальную точность оценки, а верхнюю границу точности оценки.

Границы функции распределения гиперслучайного вектора $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X} / g_S$ и $\vec{X} / g_I$, соответствующие некоторым виртуальным граничным условиям g_S и g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G.

Теорема 2. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерных плотностей распределения границ $f_{\vec{x}/\theta, g_S}(\vec{x})$, $f_{\vec{x}/\theta, g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, плотности распределения границ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для гиперслучайной оценки Θ^* существуют первые два момента границ.

Тогда средние относительно границ квадраты абсолютной погрешности Δ_{Sz}^2, Δ_{Iz}^2 и дисперсии границ $\sigma_{S\theta^*}^2$, $\sigma_{I\theta^*}^2$ определяются неравенствами

$$\Delta_{Sz}^2 \geq \sigma_{S\theta^*}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{S0}}{\partial \theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1},$$

$$\Delta_{Iz}^2 \geq \sigma_{I\theta^*}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{I0}}{\partial \theta}\right)^2 J_{g_I}^{-1}, \qquad (29.7)$$

где J_{g_S}, J_{g_I} — информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta, g_S}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta, g_I}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на неравенстве (29.5). На основании неравенства (29.5) справедливы неравенства (29.7).

Определение 5. *Гиперслучайная оценка* Θ^* *детерминированной величины* θ называется *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятностей $f_{\vec{x}/\theta^*, g}(x_1, ..., x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о θ.

Если оценка эффективная, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

29.4. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим *гиперслучайную интервальную оценку детерминированной величины.*

Пусть для детерминированной величины θ существует гиперслучайная оценка Θ^*, границы функции распределения погрешности $Z = \Theta^* - \theta$ этой оценки описываются выражениями $F_{Sz}(\theta^* - \theta)$, $F_{Iz}(\theta^* - \theta)$, а плотности распределения границ — выражениями $f_{Sz}(\theta^* - \theta)$, $f_{Iz}(\theta^* - \theta)$ (рис. 29.3).

Вероятность того, что погрешность оценки не больше $-\varepsilon$, определяется двойным неравенством:

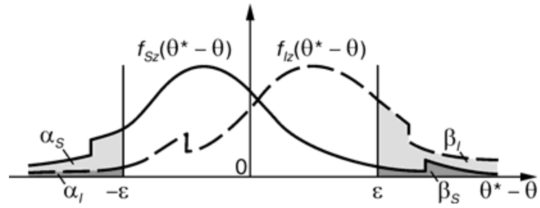


Рис. 29.3. Плотности распределения границ погрешности $Z = \Theta^* - \theta$

$$\alpha_I \le P(\Theta^* / g - \theta \le -\varepsilon) \le \alpha_S ,$$

а вероятность того, что она не меньше ε, — неравенством

$$\beta_S \le P(\Theta^* / g - \theta \ge \varepsilon) \le \beta_I ,$$

где

$$\alpha_I = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Iz}(z)dz , \ \alpha_S = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Sz}(z)dz ,$$

$$\beta_S = \int_{\varepsilon}^{\infty} f_{Sz}(z)dz , \ \beta_I = \int_{\varepsilon}^{\infty} f_{Iz}(z)dz .$$

Отсюда следует, что *границы доверительной вероятности*

$$P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon / g)$$

нахождения истинного значения величины θ в *доверительном интервале* $I = (\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon / g)$ определяются двойным неравенством

$$1 - (\alpha_S + \beta_I) \le P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon / g) \le 1 - (\alpha_I + \beta_S) .$$

Подобно интервалу $[m_{S\theta^*} - k\sigma_{S\theta^*}, \ m_{I\theta^*} + k\sigma_{I\theta^*}]$, это неравенство характеризует точность гиперслучайной оценки.

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрена гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем и частных случаях. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

30.1. ГИПЕРСЛУЧАЙНО-ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Под *гиперслучайно-гиперслучайной моделью измерения* понимается модель, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами.

Пусть множество G охватывает множество всех вариантов условий формирования измеряемой величины и оценки. За время взятия выборки в условиях $g \in G$ значение измеряемой величины не изменяется. Измеряемая гиперслучайная величина Θ представляет собой множество случайных величин Θ/g, описывающих измеряемую величину при фиксированных условиях $g \in G$: $\Theta = \{\Theta / g \in G\}$ (рис. 30.1). Случайная величина Θ/g может принимать множество конкретных значений $\{\theta/g\}$. Множество гиперслучайных величин $\{\Theta\}$ образует пространство Θ_0.

Гиперслучайная оценка Θ^*, соответствующая измеряемой гиперслучайной величине Θ, представляет собой множество случайных величин Θ^*/g, описывающих оценки случайных величин Θ/g в условиях $g \in G$: $\Theta^* = \left\{\Theta^* / g \in G\right\}$. Функция распределения случайной величины Θ^*/g определяется законом распреде-

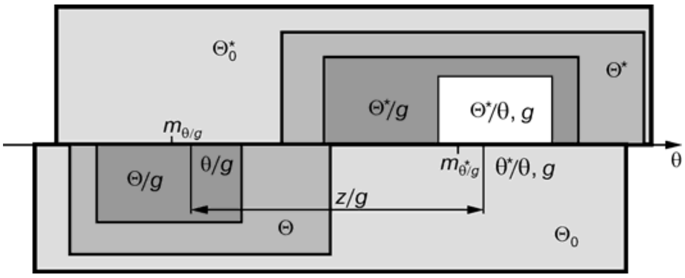


Рис. 30.1. Качественное представление измеряемой величины и ее оценки

ления случайной величины $\Theta^*/\theta,g$, описывающим оценку при конкретном значении измеряемой величины θ/g, и законом распределения случайной величины Θ/g. Случайная величина $\Theta^*/\theta,g$ может принимать множество конкретных значений $\{\theta^*/\theta,g\}$. Множество гиперслучайных оценок $\{\Theta^*\}$ образует пространство Θ_0^*.

Гиперслучайная оценка Θ^* формируется на основе гиперслучайной выборки данных $\vec{X}=\{\vec{X}/g\in G\}$ из генеральной совокупности гиперслучайной величины $X=\{X/g\in G\}$, доступной для непосредственного измерения. Гиперслучайная оценка Θ^* является функцией (статистикой) гиперслучайной выборки $\vec{X}$, случайные оценки Θ^*/g и $\Theta^*/\theta,g$ — функциями соответственно случайных выборок $\vec{X}/g$ и $\vec{X}/\theta,g$, а конкретная оценка $\theta^*/\theta,g$ — функцией конкретной выборки $\vec{x}/\theta,g$.

Величины Θ, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g и Θ^* описываются следующим образом.

Гиперслучайная величина Θ представляется вероятностными характеристиками (условными функциями распределения $F_{\theta/g}(\theta)$ для всех $g\in G$, условными плотностями $f_{\theta/g}(\theta)$, границами функции распределения $F_{S\theta}(\theta)$, $F_{I\theta}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta/g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta/g}$ и т. д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}$, $m_{I\theta}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta}$, $\sigma_{I\theta}$ и др.).

Случайная оценка $\Theta^*/\theta, g$ характеризуется вероятностными характеристиками (функцией распределения $F_{\theta^*/\theta,g}(\theta)$, плотностью распределения $f_{\theta^*/\theta,g}(\theta)$ и пр.) и числовыми параметрами: математическим ожиданием $m_{\theta^*/\theta,g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/\theta,g}$ и т. д., а случайная оценка Θ^*/g — функцией распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$, математическим ожиданием $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[m_{\theta^*/\Theta,g}]$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/g}$ и пр., где в данном случае оператор математического ожидания $\mathrm{M}[\cdot]$ действует на случайную величину Θ/g.

Гиперслучайная оценка Θ^* описывается вероятностными характеристиками (условными функциями распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ $\forall g \in G$, границами функции распределения $F_{S\theta^*}(\theta)$, $F_{I\theta^*}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta^*/g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/g}$ для всех $g \in G$ и т. д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ и др.).

Схематично гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения изображена на рис. 30.2.

Одна из основных задач измерения гиперслучайной величины Θ состоит в том, чтобы, имея в своем распоряжении конкретную выборку $\vec{x}/\theta,g$, соответствующую неизвестной величине θ и неизвестным условиям $g \in G$, а также априорную информацию о параметрах и характеристиках оценки и измеряемой величины, вычислить оценку и оценить точность измерения.

Оценку можно рассматривать как *точечную* или как *интервальную*. В первом случае необходимо сформировать по выборке $\vec{x}/\theta,g$ конкретную оценку $\theta^*/\theta,g$ и для неопределенных условий указать границы погрешности, соответствующие гиперслучайной величине Θ и гиперслучайной оценке Θ^*. Во втором слу-

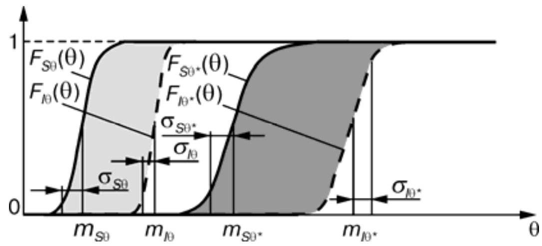


Рис. 30.2. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

чае с учетом гиперслучайных свойств погрешности надо рассчитать границы доверительного интервала, накрывающего измеряемую гиперслучайную величину Θ. Рассмотрим оба типа оценок.

30.2. ТОЧЕЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В фиксированных условиях g о близости случайной оценки Θ^*/g к случайной величине Θ/g можно судить по условной функции распределения $F_{z/g}(z)$ *погрешности* $Z/g = \Theta^*/g - \Theta/g$. В качестве метрики можно использовать корень из среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/g} = \sqrt{\mathrm{M}\left[\left|\Theta^*/g - \Theta/g\right|^2\right]}$ (или квадрат этой величины).

Величина $\Delta_{z/g}$ связана с математическим ожиданием $m_{z/g}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{z/g}$ погрешности зависимостью $\Delta_{z/g} = \sqrt{m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2}$. Нетрудно убедиться, что величина $m_{z/g}$ представляет собой смещение оценки $\varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки следующей зависимостью:

$$\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g},$$

где $R_{\theta^*\theta/g} = \mathrm{M}[(\Theta^*/g - m_{\theta^*/g})(\Theta/g - m_{\theta/g})]$ — условный ковариационный момент оценки и измеряемой величины.

В неопределенных условиях точность измерения характеризуют границы функции распределения погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$, а

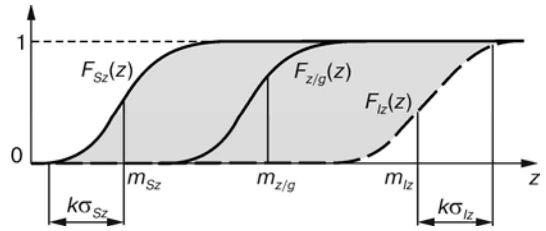


Рис. 30.3. Характеристики и параметры погрешности

также величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz}, представляющие собой корни из средних относительно границ квадратов погрешности (рис. 30.3):

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z)dz}\,,\ \Delta_{Iz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z)dz}\,,$$

где $f_{Sz}(z)$, $f_{Iz}(z)$ — плотности распределения границ, соответствующие функциям распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$.

Величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} определяются математическими ожиданиями m_{Sz}, m_{Iz} границ функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ и среднеквадратическими отклонениями границ σ_{Sz}, σ_{Iz}:

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2}\,,\ \Delta_{Iz} = \sqrt{m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2}\,.$$

Погрешность может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому величина Δ_{Sz} может быть как больше, меньше или равно величине Δ_{Iz}.

Погрешность конкретного измерения $z = \theta^* / \theta - \theta$ в неизвестных условиях можно оценить неравенством

$$m_{Sz} - k\sigma_{Sz} < z < m_{Iz} + k\sigma_{Iz}\,, \tag{30.1}$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ при наличии оценки θ^* / θ — неравенством

$$\theta^* / \theta - m_{Iz} - k\sigma_{Iz} < \theta < \theta^* / \theta - m_{Sz} + k\sigma_{Sz}\,, \tag{30.2}$$

где k — некоторая константа (см. рис. 30.3), определяемая степенью доверия к результату измерения.

Следует обратить внимание на то, что в неравенствах (30.1), (30.2) учитывается различие дисперсий границ распределения, что существенно при значительном их отличии друг от друга.

Выражения (30.1), (30.2) упрощаются, когда условные функции распределения погрешности Z/g для всех $g \in G$ не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}$ ее условные дисперсии $\sigma^2_{z/g}$ увеличиваются (тип распределения «*а*» в соответствии с классификацией, введенной в параграфе 15.4) или уменьшаются (тип распределения «*б*»). Тогда интервалы (30.1), (30.2) характеризуются границами математического ожидания погрешности m_{iz}, m_{sz} и границами среднеквадратического ее отклонения σ_{iz}, σ_{sz}:

$$m_{iz} = \inf_{g \in G} m_{z/g} = \inf_{g \in G} \varepsilon_g = \varepsilon_i \,, m_{sz} = \sup_{g \in G} m_{z/g} = \sup_{g \in G} \varepsilon_g = \varepsilon_s \,,$$

$$\sigma_{iz} = \inf_{g \in G} \sigma_{z/g} = \inf_{g \in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}} \,,$$

$$\sigma_{sz} = \sup_{g \in G} \sigma_{z/g} = \sup_{g \in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}} \,. \qquad (30.3)$$

Для распределения типа «*а*» неравенства (30.1), (30.2) имеют соответственно вид

$$\varepsilon_i - k\sigma_{iz} < z < \varepsilon_s + k\sigma_{sz} \,,$$

$$\theta^* / \theta - \varepsilon_s - k\sigma_{sz} < \theta < \theta^* / \theta - \varepsilon_i + k\sigma_{iz} \,, \qquad (30.4)$$

а для распределения типа «*б*» —

$$\varepsilon_i - k\sigma_{sz} < z < \varepsilon_s + k\sigma_{iz} \,,$$

$$\theta^* / \theta - \varepsilon_s - k\sigma_{iz} < \theta < \theta^* / \theta - \varepsilon_i + k\sigma_{sz} \,. \qquad (30.5)$$

Границы среднего квадрата погрешности Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} определяются разностью математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $m_{\theta/g}$ (смещением оценки ε_g), дисперсиями оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $\sigma^2_{\theta/g}$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G} \Delta_{z/g}^2 = \inf_{g \in G} (\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}),$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G} \Delta_{z/g}^2 = \sup_{g \in G} (\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}).$$

Обратим внимание, что структура неравенств (29.1), (30.1), описывающих погрешность соответственно для детерминированно-гиперслучайной и гиперслучайно-гиперслучайной моделей, одинакова. В обоих случаях погрешность может быть охарактеризована четырьмя параметрами m_{Sz}, m_{Iz}, σ_{Sz}, σ_{Iz}, задающими на оси погрешности местоположение и размеры зоны неопределенности.

В частном случае, когда границы функции распределения различаются лишь математическими ожиданиями ($\sigma_{Sz} = \sigma_{Iz} = \sigma_z$), погрешность Z может быть представлена *неопределенной* E_0 и *случайной* V составляющими. Неопределенная составляющая может быть описана интервальной величиной $[m_{Sz}, m_{Iz}]$, а случайная составляющая — среднеквадратическим отклонением σ_z.

Эквивалентный вариант представления погрешности в этом случае — с помощью *систематической* m_{Sz}, *случайной* V и *интервальной* $[0, m_{Iz} - m_{Sz}]$ составляющих.

30.3. РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ

30.3.1. Аддитивная модель оценки

В ряде случаев *оценка* Θ^* может быть представлена *аддитивной моделью*, описываемой суммой *измеряемой гиперслучайной величины* Θ и *гиперслучайной помехи* W. При этом смещение ε_g равно математическому ожиданию $m_{w/g}$ случайной помехи W/g, дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ — дисперсии помехи $\sigma_{w/g}^2$, границы смещения ε_i, ε_s — соответственно границам математического ожидания помехи m_{iw}, m_{sw}, а границы дисперсии погрешности σ_{iz}^2, σ_{sz}^2 — соответствующим границам дисперсии помехи σ_{iw}^2, σ_{sw}^2.

Тогда для распределения погрешности типа «*а*» неравенства (30.4) приобретают вид

$$m_{iw} - k\sigma_{iw} < z < m_{sw} + k\sigma_{sw},$$

$$\theta^* / \theta - m_{sw} - k\sigma_{sw} < \theta < \theta^* / \theta - m_{iw} + k\sigma_{iw},$$

а для распределения типа «*б*» неравенства (30.5) —

$$m_{iw} - k\sigma_{sw} < z < m_{sw} + k\sigma_{iw},$$

$$\theta^* / \theta - m_{sw} - k\sigma_{iw} < \theta < \theta^* / \theta - m_{iw} + k\sigma_{sw}.$$

Границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2), \;\; \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2)\,. \qquad (30.6)$$

Из выражений (30.6) следует, что в случае аддитивной модели помехи гиперслучайные особенности измеряемой величины не влияют на точность измерения. Существенную роль играют лишь математическое ожидание и дисперсия помехи. При пренебрежимо малой дисперсии $\sigma_{w/g}^2$ $\forall g \in G$ границы среднего квадрата погрешности равны соответствующим границам квадрата математического ожидания помехи m_{iw}^2, m_{sw}^2.

30.3.2. Мультипликативная модель оценки

В другом частном случае *оценка* Θ^* может быть представлена *мультипликативной моделью*, описываемой выражением $\Theta^* = (1 + \Xi)\Theta$. При этом погрешность $Z/g = (\Xi / g)(\Theta/g)$, где Ξ, Ξ/g — соответственно гиперслучайная и случайная величины, характеризующие множитель мультипликативной помехи.

Если величины Ξ/g, Θ/g независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ (смещение оценки) равно $m_{\xi/g} m_{\theta/g}$, а дисперсия

$$\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\xi/g}^2 \sigma_{\theta/g}^2 + m_{\xi/g}^2 \sigma_{\theta/g}^2 + \sigma_{\xi/g}^2 m_{\theta/g}^2,$$

где $m_{\xi/g}$, $\sigma_{\xi/g}^2$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия множителя Ξ / g. При этом средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2 = (m_{\xi/g}^2 + \sigma_{\xi/g}^2)(m_{\theta/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2)$, границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g\in G}[(m_{\xi/g}^2 + \sigma_{\xi/g}^2)(m_{\theta/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2)] \,,$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g\in G}[(m_{\xi/g}^2 + \sigma_{\xi/g}^2)(m_{\theta/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2)] \,,$$

а параметры границ распределения, входящие в неравенства (30.1) и (30.2), описываются следующими выражениями:

$$m_{Sz} = m_{S\xi} m_{S\theta} \,, \; m_{Iz} = m_{I\xi} m_{I\theta} \,,$$

$$\sigma_{Sz}^2 = \sigma_{S\xi}^2 \sigma_{S\theta}^2 + m_{S\xi}^2 \sigma_{S\theta}^2 + \sigma_{S\xi}^2 m_{S\theta}^2 \,, \; \sigma_{Iz}^2 = \sigma_{I\xi}^2 \sigma_{I\theta}^2 + m_{I\xi}^2 \sigma_{I\theta}^2 + \sigma_{I\xi}^2 m_{I\theta}^2 \,,$$

где $m_{S\xi}$, $m_{I\xi}$ — математические ожидания, а $\sigma_{S\xi}^2$, $\sigma_{I\xi}^2$ — дисперсии границ распределения множителя мультипликативной помехи.

Как видно, в данном случае погрешность измерения определяется параметрами двух величин: множителя мультипликативной помехи и измеряемой величины.

30.4. Гиперслучайная оценка результатов косвенных измерений гиперслучайной величины

При *косвенных измерениях* значение измеряемой (выходной) величины определяется на основании измерений других (входных) величин.

Пусть выходная гиперслучайная величина Θ является известной функцией M входных гиперслучайных величин Y_m $(m = \overline{1, M})$: $\Theta = \varphi(Y_1, ..., Y_M)$. При этом случайная величина Θ/g является функцией случайных величин Y_m / g $(m = \overline{1, M})$: $\Theta / g = \varphi(Y_1 / g_1, ..., Y_M / g)$, а случайная оценка Θ^* / g — функцией случайных оценок Y_m^* / g $(m = \overline{1, M})$: $\Theta^* / g = \varphi(Y_1^* / g, ..., Y_M^* / g)$.

Тогда в линейном приближении математические ожидания измеряемой величины и ее оценки описываются соответственно выражениями

$$m_{\theta/g} = \varphi(m_{y_1/g}, ..., m_{y_M/g}) \,, \; m_{\theta^*/g} = \varphi(m_{y_1^*/g}, ..., m_{y_M^*/g}) \,,$$

а моменты второго порядка — выражениями

$$\sigma_{\theta/g}^2 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} R_{y_m y_l / g} \,,$$

$$\sigma^2_{\theta^*/g} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_l}R_{y^*_m y^*_l/g},$$

$$R_{\theta^*\theta/g} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y^*_m y_l/g},$$

где $m_{y_m/g}$, $m_{y^*_m/g}$ — математические ожидания случайных величин Y_m/g, Y^*_m/g соответственно; $\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}$ — производные функции $\varphi(y_1,...,y_M)$ по y_m соответственно в точках $(y_1,...,y_M) = (m_{y_1/g},...,m_{y_M/g})$ и $(y_1,...,y_M) = (m_{y^*_1/g},...,m_{y^*_M/g})$; $R_{y_m y_l/g}$, $R_{y^*_m y^*_l/g}$, $R_{y^*_m y_l/g}$ — ковариационные моменты соответственно пар величин $(Y_m/g, Y_l/g)$, $(Y^*_m/g, Y^*_l/g)$, $(Y^*_m/g, Y_l/g)$.

Поскольку математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ равно смещению оценки $\varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma^2_{z/g}$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки зависимостью $\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}$, то средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}$, равный $m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}$, описывается выражением

$$\Delta^2_{z/g} = [\varphi(m_{y^*_1/g},...,m_{y^*_M/g}) - \varphi(m_{y_1/g},...,m_{y_M/g})]^2 +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_l}R_{y^*_m y^*_l/g} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y_m y_l/g} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y^*_m y_l/g}\right).$$

Используя это равенство, нетрудно рассчитать границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}\Delta^2_{z/g},\quad \Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}\Delta^2_{z/g}.$$

Глава 31

ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

31.1. НЕСМЕЩЕННАЯ И СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 1. *Гиперслучайная оценка* Θ^* *гиперслучайной величины* Θ называется *несмещенной* (несмещенной при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}$ случайной величины Θ^*/g равно математическому ожиданию $m_{\theta/g}$ условной случайной величины Θ/g, т. е. если $\varepsilon_g = 0 \quad \forall g \in G$. В противном случае оценка называется *смещенной*.

Приведенное определение понятия несмещенной оценки для гиперслучайной величины и гиперслучайной оценки согласовано с общепринятым определением этого же понятия для детерминированной величины и случайной оценки [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003], а также для детерминированной величины и гиперслучайной оценки (см. параграф 29.2).

Следует отметить, что если оценка несмещенная, то границы математического ожидания измеряемой величины и ее оценки совпадают $m_{i\theta} = m_{i\theta^*}$, $m_{s\theta} = m_{s\theta^*}$. При этом из факта, что оценка несмещенная, не следует, что обязательно совпадают соответствующие математические ожидания границ (т. е. $m_{S\theta} = m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta} = m_{I\theta^*}$).

Совпадение имеет место лишь в некоторых частных случаях, например, когда оба распределения величин Θ и Θ^* относятся к типу «*а*» или «*б*» согласно классификации параграфа 15.4. В этих двух случаях при несмещенной оценке математические ожидания границ распределения погрешности равны нулю: $m_{Sz} = m_{Iz} = 0$.

Определенный интерес представляет частный случай смещенной оценки — смещенной на фиксированную величину ε_0 $\forall g \in G$. Тогда границы смещения $\varepsilon_i = \varepsilon_s = \varepsilon_0$.

Для детерминированной величины θ и случайной оценки Θ^* состоятельной, как известно, называется оценка, которая сходится по вероятности к величине θ [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003].

Определение состоятельной гиперслучайной оценки Θ^* / θ детерминированной величины θ дано в параграфе 29.2.

Определение 2. *Гиперслучайная оценка* Θ^* *гиперслучайной величины* Θ называется *состоятельной*, если для всех условий $g \in G$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{\left|\Theta^* / g - \Theta / g\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \forall g \in G,$$

где N — объем выборки для каждых условий g.

Сходимость по распределению более слабая, чем сходимость по вероятности. Поэтому необходимым условием сходимости гиперслучайной оценки Θ^* к гиперслучайной величине Θ является сходимость функции распределения $F_{\theta^* / g}(\theta)$ к функции распределения $F_{\theta / g}(\theta)$.

Частным случаем рассматриваемой оценки является *состоятельная случайная оценка* Θ^* *случайной величины* Θ, определяемая при постоянных и единственных условиях наблюдения следующим образом:

$$\lim_{N \to \infty} P\{\left|\Theta^* - \Theta\right| > \varepsilon\} = 0.$$

Смысл этого выражения достаточно прозрачен.

Заметим, что при возрастающем объеме выборки N случайные погрешности $Z = \Theta^* - \Theta$ представляют собой случайную последовательность, описываемую функцией распределения $F_{zN}(z)$, зависящей от величины N. При устремлении N к бесконечности функция распределения $F_{zN}(z)$ приближается к функции единичного скачка $F_z(z)$ в точке 0.

Гиперслучайная оценка случайной величины, сохраняющая гиперслучайный характер при $N \to \infty$, так же, как и гиперслучайная оценка *детерминированной величины*, *несостоятельна*.

В случае *гиперслучайной оценки гиперслучайной величины* дело обстоит несколько иначе. Если гиперслучайная оценка Θ^* гиперслучайной величины Θ сохраняет при $N \to \infty$ гиперслучайный характер, то теоретически оценка может быть как состоятельной, так и несостоятельной. Необходимым условием состоятельности оценки является согласованное изменение измеряемой величины и оценки при изменении условий, что практически нереально.

Поэтому, принимая адекватность описания реальных процедур измерения гиперслучайно-гиперслучайными моделями, следует признать, *что все реальные оценки несостоятельны, т. е. являются оценками гиперслучайного типа.*

Отсюда следует фундаментальный вывод: *достичь бесконечно высокой точности измерения реальных величин принципиально нельзя ни при каких условиях, даже при бесконечно большом объеме данных.* Подтверждением этого служат следствия из теорем, доказанных в следующем параграфе.

В заключение настоящего параграфа отметим, что так же, как и в случае детерминированно-гиперслучайной модели измерения, когда границы функции распределения погрешности различаются лишь математическими ожиданиями (см. параграф 29.2), погрешность может быть представлена в виде суммы неопределенной и случайной составляющих, описываемых соответственно интервальной и случайной величинами.

31.2. ЭФФЕКТИВНАЯ И ДОСТАТОЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 3а. *Гиперслучайная оценка* Θ_e^* *гиперслучайной величины* Θ называется *эффективной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание квадрата отклонения оценки Θ_e^* / g от величины Θ / g по совокупности выборок заданного объема N (т. е. средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}$) не больше, чем для любых других оценок Θ^*_i / g:

$$\Delta^2_{z_e/g} \le \Delta^2_{z_i/g},\ i = 1,2,...,\ \forall g \in G, \qquad (31.1)$$

где

$$\Delta^2_{z_e/g} = \mathrm{M}[(\Theta^*_e / g - \Theta / g)^2],\ \Delta^2_{z_i/g} = \mathrm{M}[(\Theta^*_i / g - \Theta / g)^2].$$

Как и для детерминированно-гиперслучайной модели измерения, мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_i, l_s, определяемые в данном случае как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения от Θ/g эффективной оценки Θ^*_e / g к математическому ожиданию квадрата отклонения от Θ / g рассматриваемой оценки Θ^* / g:

$$l_i = \inf_{g\in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e / g - \Theta / g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \Theta / g)^2]},$$

$$l_s = \sup_{g\in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e / g - \Theta / g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \Theta / g)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. Когда оценка эффективна, $l_i = l_s = 1$.

Границы точности измерения определяются следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ объемом N для каждых условий $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условной плотностью вероятностей $f_{\theta/g}(\theta)$. При этом ($N+1$)-мерная условная плотность распределения $f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)$ дважды дифференцируема по θ, производные $\dfrac{\partial f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta}$ и $\dfrac{\partial^2 f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta^2}$ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и θ, а

$$\lim_{\theta\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta^* - \theta) f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)\, d\vec{x} = 0.$$

Тогда границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2 \geq \inf_{g \in G} J_g^{-1}, \quad \Delta_{sz}^2 \geq \sup_{g \in G} J_g^{-1}, \tag{31.2}$$

где J_g — условная информация по Фишеру, определяемая выражением

$$J_g = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial \Theta}\right)^2\right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial \Theta^2}\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на известном неравенстве Крамера—Рао для случайных оценок [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003].

При выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие неравенства: $\Delta_{z/g}^2 \geq J_g^{-1} \quad \forall g \in G$. Отсюда следуют неравенства (31.2).

Для однородной независимой выборки

$$f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta) = f_{\theta/g}(\theta)\prod_{n=1}^{N} f_{x/\theta,g}(x_n),$$

$$J_g = -\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial^2[\ln f_{\theta/g}(\Theta) + N \ln f_{x/\theta,g}(X)]}{\partial \Theta^2}\right)\right].$$

Если элементы выборки X_n / g представляют собой аддитивную смесь случайной величины Θ / g с дисперсией $\sigma_{\theta/g}^2$ и независимой случайной однородной помехи V / g с дисперсией $\sigma_{v/g}^2$, то при гауссовском распределении величин Θ / g и X_n / g условная информация по Фишеру $J_g = \dfrac{1}{\sigma_{\theta/g}^2} + \dfrac{N}{\sigma_{v/g}^2}$. Тогда при $N \to \infty$ из выражений (31.2) следуют неравенства $\Delta_{iz}^2 \geq 0$, $\Delta_{sz}^2 \geq 0$.

На основании этого результата может сложиться мнение, что вывод предыдущего параграфа, касающийся предела точности измерения, неверен, что точность измерения может быть неограниченно высокой. В действительности это не так.

Более точные границы точности измерения, определяемые двумя следующими теоремами, вносят необходимую ясность в этот вопрос.

Теорема 2. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / g \in G \right\}$ объемом N для каждоых условий $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерной условной плотности распределения $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность распределения абсолютно интегрируема по $\vec{x}$ и дважды дифференцируема по θ. Кроме того, для условной случайной оценки $\Theta^* / \theta, g$ существуют два первых момента. Тогда границы $\overline{\sigma}^2_{i\theta^*}$, $\overline{\sigma}^2_{s\theta^*}$ средней дисперсии $\overline{\sigma}^2_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\sigma^2_{\theta^*/\Theta,g}]$ дисперсии $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}$ оценки $\Theta^* / \theta, g$ определяются неравенствами

$$\overline{\sigma}^2_{i\theta^*} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right],$$

$$\overline{\sigma}^2_{s\theta^*} \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right], \tag{31.3}$$

а границы среднего квадрата погрешности — неравенствами

$$\Delta^2_{iz} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g} + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right],$$

$$\Delta^2_{sz} \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g} + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right], \tag{31.4}$$

где $\varepsilon_{\theta/g} = (m_{\theta^*/\theta,g} - \theta / g)$ — смещение оценки $\Theta^* / \theta, g$ в условиях g относительно θ / g; $J_g(\theta)$ — информация по Фишеру для случайной оценки $\Theta^* / \theta, g$:

$$J_g(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2} \right].$$

Доказательство теоремы основано на неравенстве Крамера—Рао для случайной оценки детерминированной величины.

Для случайной величины $\Theta^* / \theta, g$ при фиксированных величинах θ, g и выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие соотношения для дисперсии $\sigma^2_{\theta^* / \theta, g}$ и среднего квадрата погрешности $\Delta^2_{z / \theta, g} = \mathrm{M}[(\Theta^* / \theta, g - \theta / g)^2]$ [Ван Трис, 1972]:

$$\sigma^2_{\theta^* / \theta, g} \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\theta / g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}(\theta), \quad \Delta^2_{z / \theta, g} = \varepsilon^2_{\theta / g} + \sigma^2_{\theta^* / \theta, g}.$$

Тогда для средней дисперсии $\bar{\sigma}^2_{\theta^* / g}$ и среднего квадрата погрешности $\Delta^2_{z / g} = \mathrm{M}[\Delta^2_{z / \Theta, g}]$ имеем

$$\bar{\sigma}^2_{\theta^* / g} \geq \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta / g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$

$$\Delta^2_{z / g} \geq \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta / g} + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta / g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \tag{31.5}$$

Из неравенств (31.5) следуют неравенства (31.3) и (31.4).

Из выражений (31.3) видно, что для обеспечения нулевой средней дисперсии величина $\partial \varepsilon_{\theta / g} / \partial \theta$ для всех θ / g должна быть равной -1. Это означает, что невозможно одновременно обеспечить нулевое среднее смещение и нулевую среднюю дисперсию оценки.

Для однородной независимой выборки

$$J_g(\theta) = -N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{x / \theta, g}(X)}{\partial \theta^2}\right].$$

Тогда при $N \to \infty$ справедливы неравенства

$$\Delta^2_{iz} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta / g}], \quad \Delta^2_{sz} \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta / g}].$$

Отсюда следует, что потенциальная точность определяется границами среднего квадрата смещения, а бесконечно высокая точность измерения обеспечивается при бесконечно большом объеме выборки и отсутствии смещения для всех θ и условий $g \in G$.

Статистические условия формирования измеряемой величины и оценки, как правило, изменяются асинхронно. Поэтому практически нереально, чтобы обеспечивалось отсутствие смещения для всех условий, а, следовательно, и бесконечно высокая точность измерения.

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки используют также другое определение, основанное на неравенствах (31.4).

Определение 3б. *Эффективной гиперслучайной оценкой* Θ_e^* называется оценка Θ^* заданного объема N, для которой границы среднего квадрата погрешности определяются равенствами

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \qquad (31.6)$$

Отметим, что в общем случае определения (31.1) и (31.6) не эквивалентны.

Теорема 3. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерных плотностей распределения границ $f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{x})$, $f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, эти плотности распределения абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для случайной оценки $\Theta^* / \theta, g$ существуют два первых момента. Тогда *средние дисперсии границ распределения погрешности* $\bar{\sigma}_{S\theta^*}^2 = \mathrm{M}[\sigma_{\theta^*/\Theta,g_S}^2]$, $\bar{\sigma}_{I\theta^*}^2 = \mathrm{M}[\sigma_{\theta^*/\Theta,g_I}^2]$ описываются неравенствами

$$\bar{\sigma}_{S\theta^*}^2 \geq \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial \Theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1}(\Theta)\right],$$

$$\bar{\sigma}^2_{I\theta^*} \geq \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial \Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_I}(\Theta)\right], \tag{31.7}$$

а *средние относительно границ квадраты погрешности* Δ^2_{Sz} и Δ^2_{Iz} — неравенствами

$$\Delta^2_{Sz} \geq \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g_S} + \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial \Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_S}(\Theta)\right],$$

$$\Delta^2_{Iz} \geq \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g_I} + \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial \Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_I}(\Theta)\right], \tag{31.8}$$

где ε_{θ/g_S}, ε_{θ/g_I} — смещения оценки для верхней и нижней границ распределения; $J_{g_S}(\theta)$, $J_{g_I}(\theta)$ — информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 2. Границы функции распределения гиперслучайной выборки $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X}/g_S$, $\vec{X}/g_I$, соответствующих виртуальным условиям g_S, g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G. Неравенства (31.7), (31.8) следуют из неравенств (31.5).

Для однородной независимой выборки объемом N

$$J_{g_S}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_S}(X)}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_I}(X)}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Тогда средние относительно границ квадраты погрешности Δ^2_{Sz} и Δ^2_{Iz} при $N \to \infty$ стремятся соответственно к $M[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}]$ и $M[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]$.

Для невырожденной гиперслучайной оценки Θ^*/θ справедливы неравенства $m_{\theta^*/\theta,g_S} < m_{\theta^*/\theta,g_I}$, $\varepsilon_{\theta/g_S} < \varepsilon_{\theta/g_I}$. С учетом этого $\max\left[M[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}], M[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]\right] > 0$. Тогда при $N \to \infty$ максимальный средний относительно границ квадрат погрешности больше нуля. Это означает, что точность измерения гиперслучайной величины ограничена.

Таким образом, теоремы 2, 3 теоретически обосновывают известный из практики факт, что *точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.*

Определение 4. *Гиперслучайная оценка* Θ^* *гиперслучайной величины* Θ называется *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятностей $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1,...,x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины Θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о Θ.

Это определение согласовано с известным определением случайной достаточной оценки и гиперслучайной достаточной оценки детерминированной величины.

Если гиперслучайная оценка гиперслучайной величины является эффективной, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

31.3. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим *интервальную гиперслучайную оценку гиперслучайной величины.* Доверительный интервал $[z_1, z_2]$, характеризующий величину гиперслучайной погрешности Z, и предполагаемый интервал $\theta^*/\theta, g - z_2 < \theta/g < \theta^*/\theta, g - z_1$ нахождения измеряемой величины θ/g могут быть рассчитаны, исходя из границ доверительной вероятности.

Пусть

$$\alpha_S = \int\limits_{-\infty}^{z_1} f_{Sz}(z)dz\,,\ \alpha_I = \int\limits_{-\infty}^{z_1} f_{Iz}(z)dz\,,$$

$$\beta_S = \int\limits_{z_2}^{\infty} f_{Sz}(z)dz\,,\ \beta_I = \int\limits_{z_2}^{\infty} f_{Iz}(z)dz\,.$$

Тогда $\alpha_I \le P(Z \le z_1 / g) \le \alpha_S$, $\beta_S \le P(Z \ge z_2 / g) \le \beta_I$. Отсюда $\gamma_i \le P(z_1 < Z < z_2 / g) \le \gamma_s$, или

$$\gamma_i \le P(\Theta^* - z_2 < \Theta < \Theta^* - z_1 / g) \le \gamma_s\,,$$

где γ_i, γ_s — границы доверительной вероятности:

$$\gamma_i = 1 - (\alpha_S + \beta_I)\,,\ \gamma_s = 1 - (\alpha_I + \beta_S)\,. \tag{31.9}$$

При известных функциях распределения границ погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ границы доверительной вероятности γ_i, γ_s определяют границы доверительного интервала z_1, z_2.

Для гауссовского распределения границ с параметрами (m_{Sz}, σ_{Sz}), (m_{Iz}, σ_{Iz}) расчет границ доверительного интервала состоит в следующем.

Примем во внимание, что

$$\alpha_S = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right),\ \alpha_I = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right),$$

$$\beta_S = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right),\ \beta_I = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция гауссовского распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда из выражения (31.9) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) - \Phi\left(\dfrac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) = \gamma_i\,, \\ \Phi\left(\dfrac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) - \Phi\left(\dfrac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) = \gamma_s\,. \end{cases}$$

Искомые границы z_1, z_2 являются решением этой системы.

31.4. КРИТИЧЕСКИЙ ОБЪЕМ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

Объем выборки имеет смысл увеличивать до тех пор, пока это приводит к ощутимому повышению точности измерения. Для гиперслучайных оценок существует *критический объем выборки*, выше которого увеличивать объем обрабатываемых данных нецелесообразно. В этом отношении гиперслучайные оценки ведут себя подобно интервальным оценкам [Орлов, 2002].

Рассмотрим простой пример. Пусть измеряемая величина Θ, оценка Θ^* и выборка $\vec{X}$ — гиперслучайны. Случайная выборка $\vec{X}/g = \{X_n/g, n = \overline{1,N}\}$, соответствующая условиям $g \in G$, представляет собой аддитивную смесь случайной величины Θ/g с дисперсией $\sigma^2_{\theta/g}$ и случайной однородной помехи, описываемой вектором $\vec{V}/g$, компоненты которого независимы и имеют математические ожидания $m_{v/g}$ и дисперсии $\sigma^2_{v/g}$. Помеха не зависит от измеряемой величины и дисперсия помехи лежит в диапазоне (σ^2_{iv}, σ^2_{sv}). Статистические условия изменяются настолько медленно, что условия формирования выборки можно считать практически постоянными.

Необходимо оценить измеряемую величину θ/g в неизвестных условиях $g \in G$ и точность измерения.

Имея N подряд идущих отсчетов $x_n/\theta,g$, можно сформировать для неизвестных условий $g \in G$ оценку $\theta^*/\theta, g = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n/\theta, g$.

Средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g} = m^2_{v/g} + \dfrac{\sigma^2_{v/g}}{N}$. Эту величину можно оценить следующим неравенством:

$$|\varepsilon|_i^2 + \frac{\sigma^2_{iv}}{N} < \Delta^2_{z/g} < |\varepsilon|_s^2 + \frac{\sigma^2_{sv}}{N}, \qquad (31.10)$$

где $|\varepsilon|_i^2 = \inf\limits_{g\in G} m^2_{v/g}$, $|\varepsilon|_s^2 = \sup\limits_{g\in G} m^2_{v/g}$ — нижняя и верхняя границы квадрата модуля смещения оценки.

При $N \to \infty$ имеем $|\varepsilon|_i^2 < \Delta^2_{z/g} < |\varepsilon|_s^2$.

Полагая, что критическому объему выборки N_0 соответствует десятикратное превышение верхней границы модуля смещения $|\varepsilon|_s^2$ над дисперсией оценки σ_{sv}^2, найдем $N_0 > \dfrac{10\sigma_{sv}^2}{|\varepsilon|_s^2}$.

Отсюда следует, что с уменьшением верхней границы модуля смещения и с увеличением верхней границы дисперсии помехи σ_{sv}^2 величина критического объема выборки возрастает. Если верхняя граница модуля смещения сопоставима с верхней границей среднеквадратического отклонения помехи, то критический объем выборки N_0 составляет всего десять отсчетов.

Описанные методы применимы для расчета погрешностей измерения различных детерминированных, случайных и гиперслучайных величин, наблюдаемых в неопределенных условиях. Они дают более объективную информацию об исследуемом явлении, чем традиционные методы, предполагающие определенный, например равномерный, закон распределения условий или вообще игнорирующие факт изменения условий.

* * *

Рассмотренные в главах 29—31 гиперслучайные модели измерения физических величин построены в предположении, что выборка $\vec{X}$, оценка Θ^*, а в главах 30, 31 — и измеряемая величина Θ адекватно описываются гиперслучайными моделями частного вида, представляемыми множествами случайных величин в одинаковых условиях, т. е. $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$, $\Theta^* = \left\{\Theta^* / g \in G\right\}$ и $\Theta = \left\{\Theta / g \in G\right\}$.

Более общие гиперслучайные модели измерения учитывают возможность изменения условий в процессе формирования выборки. При этом выборка, оценка и измеряемая величина описываются гиперслучайными моделями общего вида, представляемыми множествами случайных величин в изменяющихся условиях, т. е. $\vec{X} = \left\{\vec{X} / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$, $\Theta^* = \left\{\Theta^* / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$ и $\Theta = \left\{\Theta / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$.

При использовании гиперслучайных моделей общего вида во всех выражениях глав 29—31, где встречается скалярная величина g, следует поставить вектор $\vec{g}$, а там, где встречается множество G, — множество $\vec{G}$.

Переход к более общим гиперслучайным моделям не привносит ничего нового, поскольку, по сути, просто одно обозначение заменяется на другое.

Подводя итог изложенному в главах 29—31, посвященным гиперслучайным моделям измерения физических величин, следует обратить внимание на следующее:

• невозможность достижения на практике бесконечно высокой точности измерений даже при неограниченном объеме данных обусловлено изменением статистических условий, в результате чего реальные оценки физических величин оказываются статистически неустойчивыми (несостоятельными);

• несостоятельность оценок учитывается в гиперслучайных моделях измерения. Поэтому гиперслучайные модели более адекватно, чем классическая детерминированно-случайная модель, описывают процедуру измерения;

• в общем случае гиперслучайную погрешность нельзя разложить на систематическую и случайную составляющие. В частном случае (совпадения формы границ функции распределения погрешности) погрешность может быть представлена суммой трех составляющих: систематической, интервальной и случайной.

ЭНТРОПИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Проанализированы различные варианты определения понятия энтропии. Понятие шенноновской энтропии для случайных величин распространено на неопределенные величины, не имеющие вероятностной меры. Введены понятия энтропии гиперслучайной и интервальной величин.

32.1. ПОНЯТИЕ ЭНТРОПИИ

В физике, математике, информатике, кибернетике, телекоммуникации, связи и других разделах науки широко используется понятие энтропии. Это — одно из базовых понятий, с помощью которого определяются другие понятия, в частности, понятие количества информации.

Как ни странно, даже в рамках одной и той же дисциплины энтропия, зачастую, трактуется по-разному.

С греческого языка *энтропия* переводится как поворот, превращение. Впервые этот термин был введен в термодинамику *Р.Ю. Клаузиусом* для характеристики необратимо рассеиваемой части энергии [Clausius, 1865]. В теплофизике под энтропией подразумевают [Яворский, Детлаф, 1968] функцию S состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты δQ, сообщенного системе, к ее абсолютной температуре T: $dS = \delta Q / T$. Энтропия не зависит от способа достижения состояния системы и определяется лишь параметрами этого состояния.

Л.Э. Больцман, рассматривая множество микросостояний системы, ввел понятие *статистической энтропии* (1872) $S = k \ln \Omega$ [Boltzmann, 1872], где k — коэффициент пропорциональности (Максом Планком этот коэффициент назван постоянной Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), Ω — число возможных микросостояний (способов), с помощью которых можно составить данное макроскопическое состояние системы, отождествляемое с числом микросостояний системы при условии, что все микросостояния равновероятны.

При статистическом обосновании термодинамики *Д.В. Гиббс* [Gibbs, 1902] рассматривал энтропию как величину

$$S = k\int f(p,q)\ln f(p,q)dpdq\ , \tag{32.1}$$

где k — размерный множитель, $f(p,q)$ — плотность распределения вероятностей обобщенных координат p и импульсов q в фазовом пространстве системы.

Для характеристики степени неопределенности опыта с N возможными исходами *Р.В.Л. Хартли* [Хартли, 1969] предложил (1928) использовать величину $\log_2 N$.

Для независимого случайного события X с N возможными состояниями, описываемыми вероятностями p_n $(n=\overline{1,N})$, *К.Э. Шеннон* определил (1948) ***информационную энтропию*** (***среднюю энтропию***) следующим образом [Shannon, 1948, Шеннон, 1963]:

$$H_x = -\sum_{n=1}^{N} p_n \log_2 p_n = -\mathrm{M}\left[\log_2 p_n\right]. \tag{32.2}$$

Энтропия, описываемая выражением (32.2), принимает значения на интервале $[0,\log_2 N]$. Минимальное значение соответствует случаю, когда вероятность одного из состояний равна единице, а остальных — нулю, максимальное же значение — равномерному распределению, когда для всех $n=\overline{1,N}$ вероятности $p_n = 1/N$.

Р.Г. МакАртур [MacArthur, 1955] использовал статистический аналог формулы Шеннона как меру биологического разнообразия экологических сообществ:

$$H_x = -\sum_{i=1}^{I} \frac{N_i}{N} \ln\frac{N_i}{N}\ , \tag{32.3}$$

где N_i — численность *i*-й популяции в сообществе из I видов, $N=\sum_{i=1}^{I} N_i$ — суммарная численность рассматриваемых особей.

Для характеристики степени хаотичности процессов на выходе динамических систем используется *K-энтропия* (*энтропия Колмогорова—Синая* или *энтропия Крылова—Колмогорова*):

$$h = \lim_{\substack{d(0)\to 0 \\ t\to\infty}} \frac{\ln\left[d(t)/d(0)\right]}{t},$$

где $d(0)$ — расстояние в фазовом пространстве между двумя близлежащими точками $x_1(0)$, $x_2(0)$ в первоначальный момент времени $t = 0$; $d(t)$ — расстояние между траекториями $x_1(t)$, $x_2(t)$, проходящими через точки $x_1(0)$, $x_2(0)$: $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$.

Известны и другие определения понятия энтропии.

В информатике, телекоммуникации и связи при описании случайных величин, принимающих дискретные значения, обычно используют шенноновское определение энтропии (32.2). Для описания случайной величины X с непрерывной плотностью распределения $f(x)$ используется энтропия, определяемая для безразмерной плотности распределения как [Корн, Корн, 1977]

$$H_x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log_2 f(x)\,dx = -\mathrm{M}\left[\log_2 f(X)\right] \qquad (32.4)$$

(*дифференциальная энтропия*), или для необязательно безразмерной плотности распределения как [Пугачев, 1962]

$$H_x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log_2\{l_x f(x)\}\,dx = -\mathrm{M}\left[\log_2\{l_x f(X)\}\right], \qquad (32.5)$$

где l_x — размерный коэффициент $(l_x \geq 0)$, определяющий положение нуля на шкале энтропии.

Заметим, что формула (32.5) описывает энтропию не только непрерывных, но и дискретных случайных величин (случайных событий). Для перехода к выражению (32.2) достаточно представить плотность распределения дискретной величины, принимающей значения x_n с вероятностью p_n $(n = \overline{1, N})$, выражением

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n \delta(x - x_n)$$

и положить $l_x\delta(0) = 1$ [Пугачев, 1962], где $\delta(\cdot)$ — δ-функция Дирака.

В отличие от энтропии дискретной случайной величины энтропия непрерывной случайной величины может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для случайной величины с ограниченной плотностью распределения $f(x) < A$ энтропия положительна, если $l_x < 1/A$.

Обратим внимание, что энтропии, рассчитанные по формулам (32.4), (32.5), совпадают между собой с точностью до постоянного сдвига на величину $-\log_2 l_x$. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением дифференциальной энтропии, рассчитываемой по формуле (32.4).

В ряде случаев энтропия H_x связана с среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_x случайной величины X логарифмической зависимостью. Например, для экспоненциального распределения $H_x = \log_2(e\sigma_x)$, для распределения Лапласа $H_x = \log_2(\sqrt{2}e\sigma_x)$, для гауссовского распределения

$$H_x = \log_2(\sqrt{2\pi e}\sigma_x), \tag{32.6}$$

а для равномерного распределения

$$H_x = \log_2(2\sqrt{3}\sigma_x). \tag{32.7}$$

Это создает иллюзию того, что энтропия, подобно СКО и дисперсии, характеризует разброс значений случайной величины. Но это не совсем так. В отличие от СКО и дисперсии, она *характеризует не столько разброс, как разнообразие значений случайной величины с высоким уровнем вероятности*: чем больше значений она принимает с высокой степенью вероятности, тем больше энтропия. При этом *расстояние между значениями случайной величины не играет существенной роли.*

Если интервал изменения случайной величины ограничен, то максимум энтропии достигается при равномерном законе распределения, если же не ограничен, то — при гауссовском законе.

Из приведенного краткого обзора следует, что в общефизической постановке понятие энтропии не связано с наличием вероятностной меры. Однако во многих случаях, в частности, в статистической термодинамике, информатике и смежных областях (см. выражения (32.1), (32.2), (32.4), (32.5)) энтропия определена лишь для случайных событий и величин, т. е. объектов, которые имеют вероятностную меру. При этом для событий и величин, не имеющих вероятностной меры, к примеру, *для интервальной величины, гиперслучайного события или гиперслучайной величины, понятие информационной энтропии* (*шенноновской энтропии*) *не применимо.* Для таких событий и величин не применимы и другие понятия, связанные с энтропией, в частности, понятие количества информации.

Распространим понятие энтропии на события и величины, не имеющие вероятностной меры.

32.2. ЭНТРОПИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим выборку $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ объема n неопределенной величины X, принимающей значения из интервала $[a, b]$. Разделим интервал значений $[a, b]$ на R непересекающихся интервалов (разрядов) длительностью Δx_r $(r = \overline{1, R})$ и введем вспомогательную функцию:

$$\varphi(\Delta x_r) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{LIM}} \left[\frac{n_r}{n} \log_2 \frac{n_r}{n} \right], \tag{32.8}$$

где n_r — количество значений выборки $\vec{x}$, попавших в r-й разряд.

Определение 1. Назовем *энтропией неопределенной величины* X величину

$$H_x = -\underset{\max \Delta x_r \to 0}{\mathrm{LIM}} \sum_{r=1}^{R} \varphi(\Delta x_r). \tag{32.9}$$

В общем случае вспомогательная функция $\varphi(\Delta x_r)$ — многозначная функция, а энтропия H_x — многозначная величина. Как любая многозначная величина, энтропия характеризуется спектром предельных точек $\tilde{S}_{H_x}$ и соответствующей функцией распределения $\tilde{F}(h_x)$.

Если спектр $\tilde{S}_{H_x}$ состоит из одного числа H_{x0}, то функция распределения $\tilde{F}(h_x) = F(h_x)$ представляет собой функцию единичного скачка в точке $h_x = H_{x0}$: $F(h_x) = \mathrm{sign}\left[h_x - H_{x0}\right]$, если этот спектр представляет собой многозначную величину случайного типа, то функция распределения $\tilde{F}(h_x)$ — однозначная функция $(\tilde{F}(h_x) = F(h_x))$, если же он представляет собой многозначную величину гиперслучайного типа, то $\tilde{F}(h_x)$ — многозначная функция.

В общем случае диапазон предполагаемых значений энтропии можно описать двойным неравенством (рис. 32.1):

$$m_{Sh_x} - k\sigma_{Sh_x} \le h_x \le m_{Ih_x} + k\sigma_{Ih_x}\,, \tag{32.10}$$

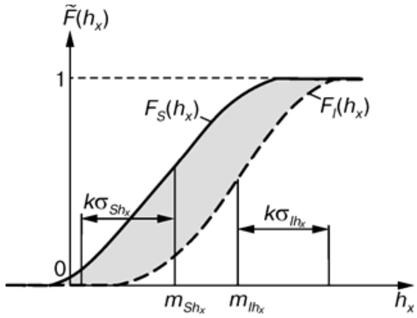


Рис. 32.1. Функция распределения энтропии $\tilde{F}(h_x)$ неопределенной величины x

где m_{Sh_x} и σ_{Sh_x} — соответственно математическое ожидание и СКО верхней границы $F_S(h_x)$ распределения энтропии $\tilde{F}(h_x)$, m_{Ih_x} и σ_{Ih_x} — соответственно математическое ожидание и СКО нижней границы $F_I(h_x)$ распределения энтропии $\tilde{F}(h_x)$, k — константа, определяющая степень доверия.

Под *диапазоном предполагаемых значений многозначной величины* (в данном случае энтропии) подразумевается диапазон ее значений, вне которого верхняя граница вероятности пребывания рассматриваемой величины пренебрежимо мала.

Указанная верхняя граница определяется константой k. При ее увеличении степень доверия возрастает. Для гауссовских законов распределения границ $F_S(h_x)$ и $F_I(h_x)$ при $k = 1$, как для любых гауссовских распределений, обеспечивается степень доверия на уровне $68{,}3\,\%$, при $k = 2$ — на уровне $96\,\%$, а при $k = 3$ — на уровне $99{,}7\,\%$.

Описанный подход не предполагает наличия у величины X вероятностной меры и потому применим, как для случайных, так и *произвольных неслучайных величин.* К сожалению, реализовать его на практике в большинстве случаев не представляется возможным, поскольку для получения достоверных оценок границ функции распределения $F_S(h_x)$, $F_I(h_x)$ необходимо располагать непомерно большим объемом данных.

Однако задача может быть существенно упрощена при установлении связи между случайной величиной и неопределенными величинами, не имеющими вероятностной меры, в частности, гиперслучайной и интервальной величинами.

32.3. ЭНТРОПИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ И ИНТЕРВАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИН

Пусть имеется гиперслучайная величина $X = \{X_g,\ g \in G\}$ с функцией распределения $\tilde{F}(x)$, границами функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$, математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} и СКО границ σ_{Sx}, σ_{Ix}, а также случайная величина X_e с функцией распределения $F_e(x)$ (рис. 32.2).

Определение 2. *Случайную величину* X_e будем называть *эквивалентной гиперслучайной величине X*, если ее математическое ожидание m_{x_e} совпадает с серединой интервала (32.10), а ее СКО σ_{x_e}, увеличенное в k раз, равно полуширине этого интервала.

Тогда (см. рис. 32.2)

$$m_{x_e} = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{1}{2}\left[(m_{Ix} + k\sigma_{Ix}) + (m_{Sx} - k\sigma_{Sx})\right],$$

$$\sigma_{x_e} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{1}{2k}\left[(m_{Ix} + k\sigma_{Ix}) - (m_{Sx} - k\sigma_{Sx})\right]. \qquad (32.11)$$

Определение 3. Под *энтропией* H_x *гиперслучайной величины* X будем понимать энтропию H_{x_e} эквивалентной случайной величины X_e.

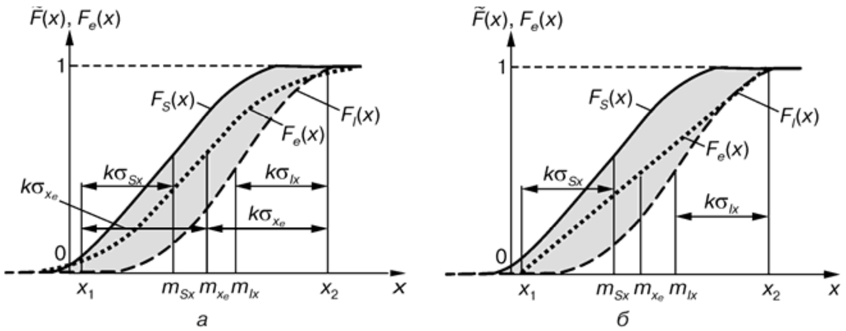


Рис. 32.2. Функции распределения $\tilde{F}(x)$ и $F_e(x)$ соответственно гиперслучайной величины X и эквивалентной случайной величины X_e с гауссовским (*а*) и равномерным (*б*) законами распределения

Поскольку энтропия случайной величины зависит от закона распределения, то рассчитываемая таким образом энтропия H_x гиперслучайной величины зависит от закона распределения эквивалентной случайной величины. Кроме того, она зависит от константы k.

Если эквивалентная случайная величина подчиняется гауссовскому закону распределения, то согласно выражениям (32.6) и (32.11) (рис. 32.2, *а*)

$$H_x = \log_2\left(\sqrt{\frac{\pi e}{2}}\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}+(\sigma_{Ix}+\sigma_{Sx})\right]\right) \approx$$

$$\approx \log_2\left(\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}+(\sigma_{Ix}+\sigma_{Sx})\right]\right)+1, \qquad (32.12)$$

а если — равномерному закону, то согласно выражениям (32.7) и (32.11) (рис. 32.2, *б*)

$$H_x = \log_2\left(\sqrt{3}\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}+(\sigma_{Ix}+\sigma_{Sx})\right]\right) \approx$$

$$\approx \log_2\left(\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}+(\sigma_{Ix}+\sigma_{Sx})\right]\right)+0,8. \qquad (32.13)$$

Для *интервальной величины* формулы (32.12) и (32.13) приобретают следующий вид:

$$H_x = \log_2\left(\sqrt{\frac{\pi e}{2}}\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}\right]\right) \approx \log_2\left(\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}\right]\right)+1,$$

$$H_x = \log_2\left(\sqrt{3}\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}\right]\right) \approx \log_2\left(\left[\frac{(m_{Ix}-m_{Sx})}{k}\right]\right)+0,8.$$

Приняв гипотезу адекватного описания исследуемой физической величины гиперслучайной моделью, можно воспользоваться разработанной методикой получения оценок математических ожиданий m^*_{Sx}, m^*_{Ix} и СКО σ^*_{Sx}, σ^*_{Ix} границ $F_S(x)$, $F_I(x)$ функции распределения $\tilde{F}(x)$ гиперслучайной величины *X*. По этим оценкам с использованием формул (32.12), (32.13) нетрудно рассчитать оценку H^*_x энтропии H_x этой величины.

Особенно просто решается задача, когда статистические условия изменяются достаточно медленно, так что за время пребывания в произвольных фиксированных условиях $g \in G$ удается сформировать эмпирическую функцию распределения $F^*(x/g)$ (оценку функции распределения $F(x/g)$) случайной величины X_g приемлемого качества. Методика расчета такой функции распределения изложена в параграфе 21.3.

В этом случае объем данных *N*, необходимый для решения задачи, во много раз меньше, чем при использовании универсального подхода. Если положить, что для построения каждой условной функции распределения $F^*(x/g)$ достаточно несколько сот отсчетов, то при числе различных условий порядка десяти объем выборки *N*, достаточный для расчета энтропии, лежит в районе 10^4 отсчетов.

* * *

Обратим внимание, что идея замещения неопределенной величины, не имеющей вероятностной меры, эквивалентной в некотором смысле случайной величиной, имеющей такую меру, может быть использована не только для распространения понятия энтропии на любые неопределенные величины, но также для распространения на любые неопределенные величины других понятий, определяемых с использованием вероятностных характеристик.

ФОРМИРОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Исследованы пути формирования неопределенности. Выяснено, что неопределенность возникает в результате определенного типа нелинейных преобразований и в процессе усреднения детерминированных величин при отсутствии сходимости. Дано теоретическое обоснование тому, что интервальные, мультиинтервальные и гиперслучайные модели способны адекватно отражать реалии окружающего мира, а случайные модели могут обеспечивать лишь приближенное их описание.

В конце параграфа 3.1 был поставлен вопрос о причинах, по которым используются различные типы неопределенных моделей, и об адекватности описания с их помощью реальных физических явлений.

Приведенные в предыдущих главах результаты исследований позволяют приступить к рассмотрению вопроса о существовании и путях образования физических величин, адекватно описываемых моделями, имеющими различный характер неопределенности.

33.1. ФОРМИРОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Напомним, что в данном случае под *адекватным описанием* понимается *полное соответствие модели моделируемому объекту по свойствам неопределенности и детерминизма* (см. параграф 3.2).

Заметим, что наличие такого рода адекватности позволяет при исследовании свойств неопределенности физических величин не делать различий между реальными физическими величинами и их адекватными моделями.

Будем исходить из трех следующих предположений:

1. Существуют физические величины, адекватно описываемые однозначными детерминированными величинами (числами).

2. Феномен статистической устойчивости объективно существует и носит неидеальный характер, что проявляется в наруше-

нии сходимости выборочных средних любых физических процессов.

3. Реальные физические величины формируются путем объединения (усреднения) бесчисленного множества различных физических величин и поэтому любую физическую величину [1] можно рассматривать как предел некоторой последовательности выборочных средних.

Обратим внимание, что в первом пункте не выдвигается требование знания детерминированных величин (чисел). Фиксируется лишь факт принципиальной возможности адекватного описания физических величин конкретными числами.

Возможность адекватного описания физических величин числами не столь очевидно, как может показаться на первый взгляд. Это было отмечено, в частности, в параграфе 28.2. Вся физика, за исключением квантовой механики, основана на парадигме однозначности. Но однозначен ли мир в действительности? Вопрос, на который нет ответа. Принимая первый пункт предположений, мы следуем общепринятым взглядам, понимая при этом, что вопрос до конца не решен и требует тщательного изучения.

Первый пункт предположений можно рассматривать как *физико-математическую гипотезу*, устанавливающую связь между реальным физическим миром и абстрактной математической моделью. Два других пункта представляют собой *физические гипотезы*, подтверждаемые результатами экспериментальных исследований.

Исходя из перечисленных гипотез, докажем существование физических величин, адекватно описываемых интервальными и гиперслучайными величинами, и проследим путь их образования.

Из принимаемых гипотез следует, что существуют реальные физические величины, адекватно описываемые спектром предельных точек детерминированной последовательности $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots,\ x_N$ ($N \to \infty$).

Спектр этой последовательности $\tilde{S}_x = \operatorname*{LIM}_{N \to \infty} x_N$ теоретически может представлять собой детерминированную величину (число), случайную величину, интервальную величину, мультиинтервальную величину или гиперслучайную величину. Этот список следует рассматривать как перечень возможных претендентов.

[1] За исключением, возможно, мировых констант, таких как скорость света, постоянная Планка и небольшого числа других констант, принимаемых в качестве постоянных по договоренности.

Если спектр представляет собой конечное число, то рассматриваемая последовательность сходится. Ввиду не соответствия второй гипотезе такой вариант следует исключить из числа претендентов.

Если спектр представлен одной бесконечной величиной, то теоретически такой вариант не противоречит предположениям. Однако существование бесконечно больших физических величин представляется спорным. Поэтому этот претендент тоже подлежит исключению из рассмотрения.

В параграфе 2.6 показано, что вероятность — абстрактное математическое понятие, измерить которое точно, в принципе, невозможно (из-за ограниченного характера феномена статистической устойчивости). Поэтому случайная величина также подлежит исключению из списка возможных претендентов как не соответствующая реалиям и второй гипотезе.

Если спектр — невырожденная гиперслучайная, интервальная или мультиинтервальная величина, то функция распределения $\tilde{F}(x)$ — многозначная величина (типа изображенных на рис. 26.1, *в*, *г* и рис. 26.2, *в*).

В параграфе 23.1 доказана теорема 1, из которой следует (см. следствие 2), что если функция распределения $\tilde{F}_y(x)$, описывающая спектр последовательности средних, — многозначная, то соответствующая зона неопределенности непрерывная. На этом основании из списка возможных претендентов следует исключить мультиинтервальную величину.

В итоге в списке остаются *интервальная величина и гиперслучайная величина, имеющая непрерывную зону неопределенности.*

Полученный результат можно интерпретировать как *теоретическое обоснование* того, что:

• *в реальном мире существуют физические величины, адекватно описываемые неопределенными величинами, причем только двух типов: интервальными величинами и гиперслучайными величинами с непрерывными зонами неопределенности*;

• *эти физические величины формируются из последовательностей физических величин, адекватно описываемых детерминированными величинами;*

• *формирование таких физических величин происходит в результате нарушения сходимости* (*неидеального характера феномена статистической устойчивости*).

33.2. ФОРМИРОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим возможность образования неопределенности из последовательности гиперслучайных величин.

Будем исходить из трех следующих предположений:

1. Существуют физические величины, адекватно описываемые гиперслучайными величинами.

2. Феномен статистической устойчивости объективно существует и носит неидеальный характер (предположение, идентичное второму предположению параграфа 33.1).

3. Реальные физические величины формируются путем объединения (усреднения) бесчисленного множества различных физических величин (предположение, идентичное третьему предположению параграфа 33.1).

Следуя методике доказательства, изложенной в параграфе 33.1 для последовательности детерминированных величин, можно прийти к выводу, что из бесконечной последовательности физических величин, адекватно описываемых гиперслучайными величинами, может формироваться физическая величина, адекватно описываемая *интервальной величиной, мультиинтервальной величиной или гиперслучайной величиной.* Заметим, что *зона неопределенности функции распределения гиперслучайной величины может быть разрывной.*

В главах 7 и 8 установлена связь между статистической устойчивостью процесса и его спектральной плотностью мощности. Показано, что нарушения статистической устойчивости могут возникать в результате особого типа низкочастотной фильтрации широкополосного процесса.

Усреднение является разновидностью такой фильтрации. Поэтому полученные в настоящем и предыдущем параграфах результаты в части образования при усреднении реальных данных физических величин, адекватно описываемых гиперслучайными величинами, подтверждают выводы указанных глав.

33.3. ОБРАЗОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Нарушение сходимости — не единственная причина образования недетерминированных величин. При некоторых *нелинейных преобразованиях* возникает многозначность, являющаяся разновидностью неопределенности [Горбань, 2014]. Зона неопределенности функции распределения $\tilde{F}(x)$ в этом случае может быть разрывной.

В качестве примеров можно привести нелинейные преобразования, описываемые выражениями $x = \pm\sqrt{a}$ и

$$x = \text{Arcsin}\, a = (-1)^n \arcsin a + \pi n\,, \tag{33.1}$$

где $\sqrt{a}$ — арифметический корень, a — вещественное число, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В первом случае спектр значений описывается двумя условными функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках $x = -\sqrt{a}$ и $x = \sqrt{a}$, а во втором — счетным множеством функций распределения в виде функций единичного скачка в точках, описываемых выражением (33.1). В обоих случаях зона неопределенности оказывается дискретной, а, следовательно, разрывной.

33.4. ПРОБЛЕМА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Во многих случаях неопределенность — нежелательное свойство. Естественно, возникает вопрос: можно ли как-то устранить неопределенность и тем самым избежать проблем, связанных с ней? На первый взгляд задача представляется разрешимой: путем нелинейного преобразования неоднозначные величины всегда можно преобразовать в однозначные.

Однако при этом, к сожалению, избежать связанных с неопределенностью проблем не удается.

Рассмотрим, например, нелинейное преобразование, превращающее случайную величину, не имеющую моментов, в случайную величину, имеющую их. Известно, что при нелинейном преобразовании закон распределения случайной величины изменяется. Применительно к скалярной случайной величине правила преобразования закона распределения определяются следующими известными теоремами (см., например, [Левин, 1974, Горбань, 2003]).

Теорема 1. Пусть случайная величина X с плотностью распределения $f_x(x)$ подвергается преобразованию $y = \varphi(x)$, имеющему *однозначную* дифференцируемую обратную функцию $x = \eta(y)$.

В этом случае плотность распределения $f_y(y)$ случайной величины Y описывается соотношением

$$f_y(y) = f_x(\eta(y))\left|\frac{d\eta(y)}{dy}\right|. \qquad (33.2)$$

Теорема 2. Пусть случайная величина X с плотностью распределения $f_x(x)$ подвергается преобразованию $y = \varphi(x)$, обратная функция которого имеет Q ветвей, описываемых дифференцируемыми функциями $x = \eta_q(y)$, $q = \overline{1,Q}$. В этом случае плотность распределения $f_y(y)$ случайной величины Y выражается через плотность распределения $f_x(x)$ случайной величины X следующим образом:

$$f_y(y) = \sum_{q=1}^{Q} f_x(\eta_q(y))\left|\frac{d\eta_q(y)}{dy}\right|. \qquad (33.3)$$

В обоих случаях математическое ожидание описывается выражением

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_x(x)dx . \qquad (33.4)$$

Из выражений (33.2) и (33.3) следует, что при специальном подборе вида преобразования распределение, не имеющее моментов, в частности математического ожидания, после нелинейного преобразования может их иметь.

Создается иллюзия, что таким путем можно избежать неприятностей, связанных с отсутствием моментов, в частности обеспечить сходимость оценок моментов. Но дело в том, что обеспечивается сходимость не оценок моментов исходной случайной величины X, а сходимость оценок моментов новой случайной величины Y, полученной в результате преобразования. При возврате к исходной величине неопределенность возникает снова.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть исходная случайная величина X подчиняется закону распределения Коши, не имеющего математического ожидания. Плотность распределения $f_x(x)$ этого распределения описывается правой частью выражения (4.2).

В результате преобразования $y = \varphi(x) = x f_z(x) / f_x(x)$, где $f_z(x)$ — плотность вспомогательного (например, гауссовского) распределения с математическим ожиданием m_z, получается новая случайная величина Y.

Согласно выражению (33.4) ее математическое ожидание описывается выражением $m_y = \int_{-\infty}^{\infty} x f_z(x) dx$, т. е. совпадает с математическим ожиданием m_z.

Поскольку существует математическое ожидание случайной величины Y, должна существовать ее оценка, сходящаяся к этому математическому ожиданию. Проблема, вроде бы, решена.

Однако, обратное преобразование $x = \eta(y)$ трансформирует случайную величину Y в случайную величину X, которая не имеет математического ожидания, а следовательно, ее оценки не обладают свойством сходимости.

Приведем еще один пример, демонстрирующий невозможность путем нелинейных преобразований решить проблему неопределенности.

Пример 2. Корень квадратный из числа x представляет собой неопределенную величину, равную $\pm\sqrt{x}$. Возведение в квадрат этой величины устраняет неопределенность, но при возврате к исходной величине путем извлечения квадратного корня неопределенность опять возникает.

Результаты исследований, изложенные в параграфах 4.1, 4.2, 13.5, главах 29—31 и настоящей главе, приводят к выводу: *неопределенность, не имеющая меры и описываемая интервальными и гиперслучайными моделями, — объективная реальность.* Проявляется она в нарушении статистической устойчивости. Из-за этого точность измерений и возможности познания окружающего мира статистическими методами ограничены.

33.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Проведенные исследования указывают на то, что интервальные, мультиинтервальные и гиперслучайные модели могут адекватно отражать недетерминированные свойства окружающего мира. Случайные же модели делают это лишь приближенно.

Указанное обстоятельство, однако, не означает, что стохастические и другие упрощенные модели бесполезны. Безусловно, это не так. Неполное соответствие этих моделей моделируемым объектам проявляется лишь при больших объемах выборки.

Зачастую же объемы выборок невелики. Тогда погрешность описания реальных объектов стохастическими и другими упрощенными моделями пренебрежимо мала. Они проще, чем интервальные и гиперслучайные модели, и поэтому во многих случаях являются *предпочтительными*.

Необходимость в более сложных *интервальных* и *гиперслучайных моделях* возникает тогда, когда *проявляется ограниченный характер феномена статистической устойчивости* — обычно при больших интервалах наблюдения и больших объемах выборки.

УЧЕНЫЕ О ФЕНОМЕНЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В физическом мире нет места идеальным явлениям так же, как в идеальном мире математических абстракций — реальным явлениям. Это осознавали еще мыслители древности [Пенроуз, 2007]. Физический мир и математический мир — разные миры. В них могут присутствовать похожие элементы, но не идентичные.

Физический феномен статистической устойчивости не является исключением. Используемое в теории вероятностей понятие статистической устойчивости частоты, под которым понимается абсолютная статистическая устойчивость — сходимость частоты к определенному пределу (вероятности), описывает физический феномен лишь приближенно.

Ниже приведены высказывания известных ученых, касающиеся статистической устойчивости, в которых прослеживается мысль об отсутствии в реальном мире абсолютной статистической устойчивости или не столь категоричное утверждение, что в реальном мире может не быть абсолютной статистической устойчивости.

1. Авторы известного справочника по математике [Корн, Корн, 1977, с. 607] пишут: «Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом. Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема выборки (физический закон больших чисел)».

2. А.А. Марков отмечает [Марков, 1924, с. 67]: «Из теоремы Бернулли обыкновенно заключают, что при беспредельном возрастании числа испытаний отношение числа появлений события к числу испытаний приближается к вероятности события при отдельных испытаниях. Подобное заключение нельзя, однако, признать безусловно правильным не только для тех случаев, когда условия теоремы Бернулли не выполнимы, но и для тех случаев, к которым эта теорема вполне применима. Условия теоремы Бернулли состоят в независимости испытаний и в постоян-

стве величины вероятности события. При этих условиях теорема Бернулли обнаруживает невероятность значительных отклонений отношения m/n от p при больших n. Но она не устраняет окончательно возможности таких отклонений; и эти невероятные отклонения могут оказаться действительными».

3. Основоположник современной аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоров в статье 1983 г. пишет [Колмогоров, 1986]: «Говоря о случайности в обыденном смысле этого слова, мы имеем ввиду те явления, в которых мы не обнаруживаем закономерностей, позволяющих нам предсказывать их поведение. Вообще нет причин предполагать, что случайные в этом смысле явления подчиняются каким-то вероятностным законам. Следовательно, нужно различать случайность в этом широком смысле и стохастическую случайность (которая является предметом теории вероятностей)».

4. В работе [Математика, ее содержание, методы и значение, 1956, с. 274, 275] А.Н. Колмогоров отмечает: «Допущение о вероятном характере испытаний, т. е. о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о «случайности» какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу $\frac{\mu}{n} \to p$ не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией».

5. А.Н. Колмогоров в своей фундаментальной работе «Основные понятия теории вероятностей» [Колмогоров, 1974, с. 12—14] пишет: «При известных условиях, в которые мы здесь не будем глубже вдаваться, можно предположить, что некоторым событиям A, которые могут наступить или же не наступить после осуществления условий σ, поставлены в соответствие определенные действительные числа $P(A)$, обладающие следующими свойствами:

А. Можно быть практически уверенным, что если комплекс условий σ будет повторяться большое число n раз и если через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий σ событие A не будет иметь места...

Примечание 1. Из практической достоверности двух утверждений следует практическая достоверность утверждения об их одновременной правильности, хотя степень достоверности при этом несколько понижается. Если, однако, число утверждений очень велико, то из практической достоверности каждого отдельного из этих утверждений вообще нельзя вывести никаких заключений относительно одновременной правильности всех этих утверждений. Поэтому из принципа А никоим образом не следует, что при очень большом числе серий по n испытаний в каждой серии отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $P(A)$».

6. Эмиль Борель [Борель, 1961, с. 28, 29] так объясняет возможность нарушения статистической устойчивости частоты: «Если при очень большом числе испытаний эта частота не стремится к пределу, а более или менее колеблется между различными пределами, то надо утверждать, что вероятность p не остается постоянной, а изменяется в ходе испытаний. Это имеет место, например, для людской смертности в течение веков, так как успехи медицины и гигиены имеют своим следствием увеличение средней продолжительности жизни. Стало быть, вероятность p для родившегося ребенка достичь возраста 60 лет имеет тенденцию к росту. Эта эмпирическая точка зрения вполне приемлема для статистика, изучающего демографические явления, так как здесь мы должны, за неимением других научных средств для предвидения, ограничиться использованием бесчисленных наблюдений».

7. А.В. Скороход в предисловии к монографии [Иваненко, Лабковский, 1990] пишет: «Наиболее полно разработано понятие неопределенности, использующее вероятностную случайность... Замечу, что предположение, что некоторая последовательность, скажем чисел, получена независимыми наблюдениями некоторой случайной величины (неважно, известно или нет ее распределение), накладывает на эту последовательность весьма жесткие ограничения, которые вряд ли выполняются во многих реальных явлениях».

8. В.Н. Тутубалин в своей книге [Тутубалин (2), 1972, с. 6, 7] отмечает: «Научная добросовестность требует от каждого иссле-

дователя применения доступных методов проверки статистической устойчивости, но наличие ее редко можно вполне гарантировать». Далее он очерчивает область применения классической теории вероятностей: «Все мыслимые эксперименты можно разделить на три группы. К первой группе относятся хорошие эксперименты, в которых обеспечивается полная устойчивость исхода опытов. Ко второй группе относятся эксперименты похуже, где полной устойчивости нет, но есть статистическая устойчивость. К третьей группе относятся совсем плохие эксперименты, когда нет и статистической устойчивости. В первой группе все понятно без теории вероятностей, в третьей группе она бесполезна. Вторая группа составляет настоящую сферу применения теории вероятностей, но мы вряд ли когда-нибудь можем быть вполне уверены, что интересующий нас эксперимент относится ко второй, а не к третьей группе».

9. Андре Анго в книге для электро- и радиоинженеров [Анго, 1967, с. 620] обращает внимание читателей на проблему ограниченной точности измерений, тесно связанной с проблемой статистической устойчивости, и дает следующие рекомендации: «Казалось бы, что, увеличивая число измерений, можно до бесконечности увеличивать точность. Однако, если теоретически можно получить еще одну значащую цифру, перейдя от одного единственного измерения к 100 измерениям, или от группы в 10 измерений к 1000 измерениям, то практически получение такого выигрыша весьма сомнительно. Действительно, следует опасаться, что при тысячном измерении измеряемая физическая величина будет уже не совсем та, что вначале. Другими словами, в условиях опыта могут иметь место небольшие изменения, которые воздействуют на результат неслучайным образом (так называемое «сползание центра рассеивания»). Это более чем вероятно, так как серия в 1000 измерений должна продолжаться значительное время. Поэтому не принято делать большие серии измерений и число n редко бывает больше 10. Все изложенное хорошо согласуется с простым здравым смыслом. Лучше усовершенствовать экспериментальный метод, чем увеличивать число измерений; 10 хороших измерений полезнее, чем 1000 посредственных».

10. В монографии [Майстров, 1967, с. 88, 89], посвященной истории развития теории вероятностей, автор, рассказывая о законе больших чисел, обращает внимание на то, что «теорема Бернулли совсем не утверждает, что при бесконечном увеличе-

нии числа испытаний n частота m/n стремится к числу p, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$; она утверждает, что вероятность больших отклонений частоты m/n от вероятности p мала, если только n достаточно велико» [1].

Далее, рассуждая об области применения теории вероятностей и математической статистики, он пишет (с. 249): «Наличие устойчивой частоты типично для случайных массовых явлений. Но не всякое случайное событие имеет устойчивую частоту [2]. Предположение, что при данных условиях для данного случайного события имеется устойчивая частота должно быть каждый раз специально проверено и обосновано».

[1] Из контекста не совсем понятно, предполагает ли автор, что величина p может не являться детерминированной величиной (числом). Судя по всему, не допускает. Но, даже если и не допускает, этот тезис близок к рассматриваемому в рамках теории гиперслучайных явлений.

[2] Это верно, если к случайным событиям относить не только те события, которые имеют вероятностную меру (как принято в теории вероятностей), а любые события, которые могут произойти.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

П2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Интервалом (интервальной величиной), принадлежащим множеству вещественных интервалов $I(\mathbb{R})$, называется многозначная величина $A = [a_1, a_2]$, представляющая собой множество чисел числовой оси $\mathbb{R}$, принадлежащих интервалу $[a_1, a_2]$, где a_1, a_2 — нижняя и верхняя границы интервала, $a_1 \le a_2$.

Определение 2. Интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ считаются равными, если равны их нижние и верхние границы: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 3. Пусть $*$ — арифметическая операция сложения, вычитания, умножения или деления над числами. Тогда для интервалов A и B можно определить соответствующие арифметические операции следующим образом:

$$A * B = \{a * b \mid a \in A,\ \ b \in B\},$$

где в случае деления $0 \notin B$.

В явном виде операции сложения (+), вычитания (–), умножения ($\cdot$) и деления (:) описываются следующими выражениями:

$$A + B = [a_1 + b_1,\, a_2 + b_2],$$
$$A - B = [a_1 - b_2,\, a_2 - b_1] = A + [-1, -1] \cdot B,$$
$$A \cdot B = [\min\{a_1b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2\},\ \ \max\{a_1b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2\}],$$
$$A : B = [a_1,\, a_2] \cdot [1/b_2,\, 1/b_1].$$

Определение 4. Если $f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то $f(X) = [\min\limits_{x \in X} f(x),\, \max\limits_{x \in X} f(x)]$ определяет функцию на $I(\mathbb{R})$.

П2.2. СВОЙСТВА

Пусть $A, B, C \in I(\mathbb{R})$. Тогда

1) операции сложения и умножения коммутативны:

$$A + B = B + A, \; A \cdot B = B \cdot A,$$

2) операции сложения и умножения ассоциативны:

$$(A + B) + C = A + (B + C), \; (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

3) $X = [0, 0]$ и $Y = [1, 1]$ — единственные нейтральные элементы соответственно сложения и умножения. Для всех $A \in I(\mathbb{R})$

$$A = A + X = X + A, \; A = A \cdot Y = Y \cdot A,$$

4) $I(\mathbb{R})$ не имеет делителя нуля,

5) произвольный интервал $A = [a_1, a_2]$ с несовпадающими границами ($a_1 \neq a_2$) не имеет ни противоположного (по сложению) элемента, ни обратного (по умножению) элемента, однако $0 \in A - A$, $1 \in A : A$,

6) имеет место субдистрибутивность: в общем случае

$$A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C,$$

но для все $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $a(B + C) = aB + aC$, и, кроме того, если для всех $b \in B$ и $c \in C$ справедливо неравенство $bc \geq 0$, то $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

7) решение X уравнения $A \cdot X = B$ удовлетворяет выражению $X \subseteq B : A$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ, КАСАЮЩИЕСЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ

1. Исследование статистической устойчивости процессов имеет своей целью выяснение *области обоснованного применения классических вероятностных методов их описания*, вне которой необходимо использовать другие методы, в частности методы теории гиперслучайных явлений.

Область обоснованного использования стохастических методов определяется *интервалом статистической устойчивости* τ_s — максимальным интервалом, на котором нарушения статистических закономерностей остаются еще пренебрежимо малыми (см. п. 5.4).

Этот интервал может быть *разным для разных статистик*, в частности, для выборочного среднего и выборочного СКО. Ограничиваясь рассмотрением двух первых моментов, интервал статистической устойчивости в широком смысле можно определить как максимальный интервал наблюдения, на котором статистические закономерности остаются настолько сильно выраженными, что возможен корректный расчет оценки математического ожидания и оценки СКО.

2. *Критерием нарушения статистической устойчивости* может служить выход за установленную *верхнюю границу коридора* (γ_{0N}^{+}, μ_{0N}^{+}, h_{0N}^{+} или l_{0N}^{+}) оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему (γ_N^*, μ_N^*, h_N^* или l_N^*) и оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО (Γ_N^*, M_N^*, H_N^* или L_N^*) (см. п. 5.4).

Поскольку параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему γ_N, μ_N, h_N и l_N однозначно связаны между собой (см. п. 5.1, 5.2) и параметры статистической неустойчивости по отношению к СКО Γ_N, M_N, H_N и L_N также однозначно связаны между собой (см. п. 5.4), то для анализа нарушения статистической устойчивости достаточно использовать один из параметров γ_N^*, μ_N^*, h_N^*, l_N^* и один из параметров Γ_N^*, M_N^*, H_N^*, L_N^*.

Верхняя граница коридора $\gamma_{0N}^{+} = \gamma_{0N} + k\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ зависит от коэффициента k, характеризующего степень доверия (см. п. 5.2), где γ_{0N} — параметр статистической неустойчивости, рассчитанный для статистически устойчивой эталонной выборки, а $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ — СКО для нее.

Параметры статистической неустойчивости большинства процессов быстро принимают значения, существенно превосходящие значения, соответствующие верхней границе коридора при $k = 3$. Поэтому выбор конкретного значения коэффициента k не критичен. В тех же очень редких случаях, когда процесс обладает высоким уровнем статистической устойчивости, значение коэффициента k имеет смысл выбирать от 1 до 3.

3. Параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему однозначно связаны со спектральной плотностью мощности процесса (см. п. 7.4, 8.1). Информация о нарушении статистической устойчивости сосредоточена в низкочастотной части. Признаком нарушения статистической устойчивости может служить быстрое (быстрее $1/f$) нарастание уровня спектральной плотности мощности с понижением частоты f (см. п. 7.5, 8.2). Поэтому, исследуя статистическую устойчивость процесса, имеет смысл всегда контролировать его спектральную плотность мощности.

4. Корректный анализ динамики изменения функции распределения возможен, если функция распределения изменяется не очень быстро, так, что за время взятия выборки (объемом, достаточным для формирования приемлемой оценки функции распределения) закон распределения практически не изменяется. Приемлемой оценкой функции распределения можно считать оценку, получаемую при объеме выборки N, содержащей не менее сотни независимых отсчетов.

5. Расчет оценки функции распределения $F^*(x)$ удобно проводить путем ранжирования элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и построения оценки $F^*(x)$ в виде ступенчатой с шагом $1/N$ функции от ранжированной выборки $w_1, w_2, \ldots, w_N$.

6. Важным вопросом является *корректное использование исходных данных.* Параметры статистической неустойчивости характеризуют *динамику изменения статистических зависимостей во времени* (*или пространстве*). Поэтому перетасовывать данные нельзя.

В связи с указанной спецификой параметров статистической неустойчивости существуют определенные ограничения на их использование для анализа данных. *Если данные не представляют собой процесс, развивающийся во времени или пространстве, бессмысленно проводить оценку их статистической устойчивости.* Это касается, например, данных переписи населения.

7. Результаты оценок статистической устойчивости носят ориентировочный характер. Они могут изменяться в достаточно широких пределах при изменении условий. Поэтому для обоснованного использования в каждом конкретном случае тех или иных статистических методов обработки данных (особенно при больших объемах выборки) необходимо проводить исследования их статистической устойчивости.

ИСТОРИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Исследования, приведшие к построению теории гиперслучайных явлений, начались на рубеже 70—80-х годов прошлого столетия, когда автор настоящей монографии, работавший в то время в Киевском НИИ гидроприборов (НПО «Славутич»), принимал участие в проектировании сложной гидроакустической техники, занимался оптимизацией пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях и проводил экспериментальные исследования статистических свойств гидроакустических сигналов в Тихом и Северном Ледовитом океанах.

Одним из вопросов, который он пытался прояснить, был вопрос о потенциальной точности измерений. Теория вероятностей не накладывает ограничений на точность измерений. Согласно этой теории потенциальная точность зависит от характеристик помех и объема выборки. При неограниченном увеличении объема выборки точность измерений теоретически может расти до бесконечности. Однако, как известно, добиться на практике неограниченной точности не удается.

На этом начальном этапе исследований полностью разобраться в причинах противоречия между теорией и практикой не удалось, однако было собрано много экспериментальных данных, касающихся нарушений статистической устойчивости гидроакустических сигналов, и на их основе началось зарождение будущей теории.

Основные результаты первого этапа исследований отражены в монографиях [Горбань, 2008 (1), Gorban, 1998 (1), 2008 (1)] и целом ряде НИР и ОКР: «Момент-МСП», «Поле», «Ритм», «Вектор», «Стугна», «Звезда», «Поляна-Н», «Кентавр», «Эверест», «Орбита», «Фокус», «Кентавр-СК», «Вятка-К», «Скорпена», «Луч», «Луч-3», «Акустика», «Акустическая техника», «Анализ-93-1.7», проводимых в Киевском НИИ гидроприборов.

Второй этап исследований охватывает 90-е годы прошлого столетия и связан с проводимыми в Институте проблем математических машин и систем (ИПММС) НАН Украины НИР «ІГФ-1УА», «Атлант-А», «Атлант-Д», «Цербер» и «Модель». В рамках этих тем были проведены исследования статистических особенностей разнообразных физических сигналов, в частности речевых, гидроакустических и радиолокационных, и разработаны новые методы обработки сигналов.

Третий, основной, этап исследований начался на рубеже столетий и выполнялся в ИПММС НАН Украины в рамках НИР «Диагностика», «Поиск», «Модель-2», «Мова», «Потенциал» и ОКР «МР-244-2М». Именно на этом этапе возникло понятие гиперслучайного явления и теория гиперслучайных явлений приобрела современный вид.

Публикации. Исследованию нарушений статистической устойчивости физических явлений и их описанию с помощью гиперслучайных моделей посвящено немало работ.

Первая монография по теории гиперслучайных явлений вышла в 2007 г. [Горбань, 2007 (1)], вторая — в 2011 г. [Горбань, 2011 (1)].

Прикладным вопросам новой теории посвящены монографии, написанные сотрудниками Национального технического университета Украины «КПИ» Ю.Ф. Зиньковским и Б.М. Уваровым [Уваров, Зіньковський, 2011 (1—3)].

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Гипотеза абсолютной (идеальной) статистической устойчивости физических явлений, породившая в свое время классическую теорию вероятностей и математическую статистику, не находит экспериментального подтверждения. Исследования показывают, что *вероятность — математическая абстракция*, не имеющая физической интерпретации, и *в реальном мире имеет место не абсолютная, а ограниченная статистическая устойчивость*, проявляющаяся *в отсутствии сходимости статистик* (*их несостоятельности*).

Поиск адекватных средств описания реальных физических событий, величин, процессов и полей с учетом нарушений статистической устойчивости привел к появлению новой физико-математической теории гиперслучайных явлений, предлагающей новый взгляд на окружающий мир и новые пути его познания.

Теория гиперслучайных явлений не перечеркивает достижения классической теории вероятностей и математической статистики, а дополняет их, распространяя положения этих дисциплин на случай, ими не рассматриваемый: отсутствие сходимости статистик.

Ограниченность статистической устойчивости проявляется при больших объемах выборки и предельном переходе. Поскольку зачастую объемы выборки невелики, стохастические модели обеспечивают решение многих практических задач с приемлемой точностью. Как правило, эти модели проще, чем гиперслучайные модели и потому при не очень больших объемах выборки оказываются предпочтительными.

Гиперслучайные модели имеют явные преимущества перед стохастическими и другими более простыми моделями в тех случаях, когда проявляется ограниченный характер феномена статистической устойчивости, — обычно при больших интервалах наблюдения и больших объемах выборки.

Поэтому первоочередная область применения гиперслучайных моделей связана со статистической обработкой различных физических процессов (электрических, магнитных, электромагнитных, акустических, гидроакустических, сейсмоакустических, метеорологических и др.) большой длительности, а также с высокоточными измерениями физических величин и прогнозированием физических процессов на основе статистической обработки больших массивов данных.

Гиперслучайные модели целесообразно использовать также при моделировании физических событий, величин, процессов и полей, для которых ввиду чрезвычайной малости объема статистического материала нельзя получить качественные оценки параметров и характеристик, а можно лишь указать границы, в которых они находятся.

Теория гиперслучайных явлений затрагивает малоизученную область *математики*, касающуюся нарушения сходимости и многозначности. Разработанные в рамках настоящей монографии подходы к анализу расходящихся и многозначных функций могут быть использованы для построения *математического анализа расходящихся и многозначных функций*. Область применения такой теории представляется достаточно широкой, далеко выходящей за рамки статистики.

Ограниченный характер статистической устойчивости указывает на необходимость пересмотра положений *физических дисциплин*, в которых понятия вероятности и сходимости играют ключевую роль: это в первую очередь *статистическая механика*, *статистическая физика* и *квантовая механика*. Учет нарушений статистической устойчивости может привести к новым научным результатам, представляющим интерес, как для теории, так и для практики.

СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Операторы

$\mathrm{D}[X]$ — дисперсия случайной величины X

$\mathrm{M}[X]$ — математическое ожидание случайной величины X

$\mathrm{M}_i[X]$, $\mathrm{M}_s[X]$ — нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X

$\mathrm{M}_I[X]$, $\mathrm{M}_S[X]$ — математические ожидания нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X

$\mathrm{M}_0[X]$ — усредненное математическое ожидание границ распределения гиперслучайной величины X

$\bar{\mathrm{M}}_T[X(t)]$ — среднее функции $X(t)$ на интервале T

$\bar{\mathrm{M}}\,[X(t)]$ — среднее функции $X(t)$ на бесконечном интервале t

$P\{A\}$ — вероятность выполнения условия A

$P(A)$ — вероятность события A

$P_I(A)$, $P_S(A)$ — нижняя и верхняя границы вероятности события A

Специальные математические знаки

inf, sup — нижняя и верхняя границы

$\lim\limits_{N\to\infty} X_N$ — обычный предел последовательности случайных величин $X_1,\ldots,X_N$ (сходимость с вероятностью единица (почти наверное))

$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}X_N$ — обычный предел последовательности случайных величин $X_1,\ldots,X_N$ (сходимость в среднеквадратическом)

$\underset{N\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,x_N$ — обобщенный предел последовательности детерминированных величин $x_1,\ldots,x_N$

$\underset{N\to\infty}{\mathrm{LIM}}\,X_N$ — обобщенный предел последовательности случайных или гиперслучайных величин $X_1,\ldots,X_N$ (сходимость с вероятностью единица)

$\underset{N\to\infty}{\mathrm{L.I.M.}}X_N$ — обобщенный предел последовательности случайных или гиперслучайных величин $X_1,\ldots,X_N$ (сходимость в среднеквадратическом)

$\mathrm{sgn}(x)$ — знак числа x

$\mathrm{sign}[x]$ — функция единичного скачка

$\forall$ — для всех

$\bigcup$ — логическое сложение

$\bigcap$ — логическое умножение

$\varnothing$ — пустое множество

$\sim$ — знак пропорциональности

$\{X\}$ — множество X

$\tilde{x}$ — тильда — подчеркивает многозначность величины

θ^* — оценка величины θ

$\overset{*}{\theta}$ — величина, комплексно сопряженная $\dot{\theta}$

$(x_1,\ldots,x_N)$ — вектор с компонентами $x_1,\ldots,x_N$

$\{X_1,\ldots,X_N\}$ — множество или упорядоченное множество с элементами $X_1,\ldots,X_N$

Функции

D_{ix}, D_{sx} — нижняя и верхняя границы дисперсии гиперслучайной величины X

D_{Ix}, D_{Sx} — дисперсии нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X

$f(x)$ — плотность распределения случайной величины X

$f(x/g)$ или $f_{x/g}(x)$ — плотность распределения гиперслучайной величины X в условиях g

$f_I(x)$, $f_S(x)$ — плотности распределения нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X

$f_0(x)$ — среднее плотностей распределения границ гиперслучайной величины X

$F(x)$ — функция распределения величины X

$F_I(x)$, $F_S(x)$ — нижняя и верхняя границы функции распределения гиперслучайной величины X

$F(x/g)$ или $F_{x/g}(x)$ — условная функция распределения гиперслучайной величины X в условиях g

$F(x/m, D)$ — гауссовская функция распределения с математическим ожиданием m и дисперсией D

$\Delta F(x)$ — разность границ функции распределения гиперслучайной величины

$F_0(x)$ — среднее границ функции распределения гиперслучайной величины X

$K_{ix}(t_1,t_2), K_{sx}(t_1,t_2)$ — нижняя и верхняя границы корреляционной функции гиперслучайной функции $X(t)$

$K_{Ix}(t_1,t_2), K_{Sx}(t_1,t_2)$ — корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$

$K_{Ixy}(t_1,t_2), K_{Sxy}(t_1,t_2)$ — взаимные корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$

m_{ix}, m_{sx}	—	нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X
m_{Ix}, m_{Sx}	—	математические ожидания нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$m_{i\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{s\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	нижняя и верхняя границы начального момента порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$m_{I\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{S\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	начальные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$Q(j\omega_x)$	—	характеристическая функция случайной величины X
$Q(j\omega_x / g)$	—	условная характеристическая функция гиперслучайной величины X в условиях g
$Q_I(j\omega_x)$, $Q_S(j\omega_x)$	—	характеристическая функция нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$Q_0(j\omega_x)$	—	среднее характеристических функций распределения границ гиперслучайной величины X
$r_{Ix}(t_1,t_2)$, $r_{Sx}(t_1,t_2)$	—	нормированные ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$R_{Ix}(t_1,t_2)$, $R_{Sx}(t_1,t_2)$	—	ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$S_{ixx}(f)$, $S_{sxx}(f)$	—	нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности гиперслучайной функции $X(t)$
$S_{Ixx}(f)$, $S_{Sxx}(f)$	—	спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$\dot{S}_{Ixy}(f)$, $\dot{S}_{Sxy}(f)$	—	взаимные спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
δ	—	дельта-функция Дирака
$\gamma^2_{ixy}(f)$, $\gamma^2_{sxy}(f)$	—	нижняя и верхняя границы функции частотной когерентности гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
$\gamma^2_{Ixy}(f)$, $\gamma^2_{Sxy}(f)$	—	функции частотной когерентности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
$\mu_{i\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{s\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	нижняя и верхняя границы центральных моментов порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$\mu_{I\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{S\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	центральные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$\Phi(x)$	—	гауссовская функция распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуличев В.А., Безответных В.В., Каменев С.И., Кузьмин Е.В., Моргунов Ю.Н., Нужденко А.В.* Акустическая томография динамических процессов водной среды в шельфовой зоне Японского моря // ДАН. — 2001. — Т. 381, № 2. — С. 243—246.

2. *Акуличев В.А., Безответных В.В., Каменев С.И., Леонтьев А.П., Моргунов Ю.Н.* Акустические дистанционные измерения течений на шельфе Японского моря // Акустический журнал. — 2004. — Т. 50. — С. 581—584.

3. *Акустика* океана / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 318 с.

4. *Акустика* океана / Под ред. Л.М. Бреховских, И.А. Андреевой. — М.: Наука, 1982. — 247 с.

5. *Акустика* океана / Под ред. Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1974. — 693 с.

6. *Акустоэлектронные* устройства обработки и генерации сигналов / Под ред. Ю.В. Гуляева. — М.: Радиотехника, 2012. — 576 с.

7. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 356 с.

8. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. — М.: Знание, 1980. — 64 с.

9. *Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.* Является ли вероятность «нормальной» физической величиной // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162, № 7. — С. 149—182.

10. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967. — 779 с.

11. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175, № 2. — С. 163—179.

12. *Арнольд В.И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // Успехи физических наук. — 1999. — № 12. — С. 1311—1323.

13. *Архив погоды* по городам СНГ. — http://thermo.karelia.ru/weather/w_history.php.

14. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986. — 176 с.

15. *Бернштейн С.Н.* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщения Харьковского математического общества. — 1917. — № 15. — С. 209—274.

16. *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. — М.—Л.: Гос. изд-во, 1927. — 367 с.

17. *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. — М.—Л.: Гостехиздат, 1934, 1946. — 412 с.

18. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

19. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. — М.: Наука, 1961. — 120 с.

20. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 224 с.

21. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 432 с.

22. *Бочарников В.П.* Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике. — СПб.: Наука, 2001. — 328 с.

23. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. — М.: Физматгиз, 1960. — 395 с.

24. *Бриллюэн Л.* Научная неопределенность и информация. — М.: Мир, 1960. — 395 с.

25. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2003. — 399 с.

26. *Бычков А.С., Клюшин Д.А.* Случайность и возможность: современные подходы // Математические машины и системы. — 2012. — № 4. — С. 10—27.

27. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. — М.: Советское радио, 1972. — Т. 1. — 743 с.; 1975. — Т. 2. — 343 с.; 1977. — Т. 3. — 662 с.

28. *Венцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

29. *Вероятность* и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

30. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971. — 320 с.

31. *Википедия* / http://ru.wikipedia.org/wiki/.

32. *Викисловарь* / http://ru.wiktionary.org/wiki/.

33. *Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.* Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. — 1990. — Т. 56, № 7. — С. 76—81.

34. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. — М.: МЭИ — София: Техника, 1989. — 224 с.

35. *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира: птолемеевой и коперниковой. — М.—Л., 1948. — 147 с.

36. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. — М.: Мир, 1984. — С. 188—218.

37. *Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.А.М.* Современная квантовая механика. Три нобелевских доклада. — Л.—М.: Гос. технико-теоретическое изд-во, 1934. — 76 с.

38. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 567 с.

39. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Выща шк., 1979. — 408 с.

40. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.—Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. — 264 с.

41. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. — 406 с.
42. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. — 448 с.
43. *Гнедин Ю.Н.* Небо в рентгеновских и гамма-лучах // Соровский образовательный журнал. — 1997. — Т. 5. — С. 74—79.
44. *Гоббс Т.* Избранные сочинения. — М., Л., 1926.
45. *Гоббс Т.* Сочинения в двух томах. — М.: Мысль, 1991. — Т. 1. — 624 с.; Т. 2. — 732 с.
46. *Горбань И.И.* Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров. — К.: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. — 150 с.
47. *Горбань І.І.* Основи теорії випадкових функцій і математичної статистики. — К.: КІ ВПС МЗС України, 2000. — 245 с.
48. *Горбань І.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. — К.: ІПММС НАН України, 2003. — 245 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html).
49. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления и их описание // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 1—2. — С. 16—27.
50. *Горбань И.И.* Методы описания гиперслучайных величин и функций // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 3. — С. 24—33.
51. *Горбань И.И.* Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2005. — № 3. — С. 41—48.
52. *Горбань И.И.* Гиперслучайные функции и их описание // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. —Т. 49, № 1. — С. 3—15.
53. *Горбань І.І.* Математичний опис фізичних явищ у статистично нестабільних умовах // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2006. — № 6. — С. 26—33.
54. *Горбань И.И.* Оценки характеристик гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 1. — С. 40—48.
55. *Горбань И.И.* Стационарные и эргодические гиперслучайные функции // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. — Т. 49, № 6. — С. 54—70.
56. *Горбань И.И.* Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 2. — С. 3—14.
57. *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений. — К.: ИПММС НАН Украины, 2007. — 184 с. (http://ifsc.ualr.edu/ jdberleant/intprob/, http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html).
58. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления: определение и описание // Proceedings of XIII-th International conference KDS. — Sofia, Bulgaria, 2007. — P. 137—147.
59. *Горбань И.И.* Представление физических явлений гиперслучайными моделями // Математические машины и системы. — 2007. — № 1. — С. 34—41.
60. *Горбань И.И.* Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях. — К.: Наук. думка, 2008. — 272 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

61. *Горбань И.И.* Измерение величин в статистически неопределенных условиях // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2008. — Т. 51, № 7. — С. 3—22.

62. *Горбань И.И.* Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 135—141.

63. *Горбань И.И.* Гиперслучайные марковские модели // Proceedings of XIII-th International conference KDS-2. — Sofia — Uzhgorod, Bulgaria — Ukraine, 2008. — P. 233—242.

64. *Горбань И.И.* Гипотеза гиперслучайного устройства мира и возможности познания // Математические машины и системы. — 2009. — № 3. — С. 44—66.

65. *Горбань И.И.* Закон больших чисел для гиперслучайной выборки // Proceedings of XIV-th International conference KDS-2. Book 15. — Sofia — Kiev, Bulgaria — Ukraine, 2009. — P. 251—257.

66. *Горбань И.И.* Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Труды пятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2009». — К., 2009. — С. 5—9.

67. *Горбань И.И.* Нарушение статистической устойчивости физических процессов // Математические машины и системы. — 2010. — № 1. — С. 171—184.

68. *Горбань И.И.* Исследование нарушений статистической устойчивости курса валют // Труды пятой конференции «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2010». — К., 2010. — С. 84—86.

69. *Горбань И.И.* Преобразования гиперслучайных величин и процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 2. — С. 3—15.

70. *Горбань И.И.* Статистическая неустойчивость магнитного поля Земли // Труды шестой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2010». — К., 2010. — С. 189—192.

71. *Горбань И.И.* Физико-математическая теория гиперслучайных явлений с общесистемных позиций // Математические машины и системы. — 2010. — № 2. — С. 3—9.

72. *Горбань И.И.* Эффект статистической неустойчивости в гидрофизике // Труды десятой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». — СПб.: Наука, 2010. — С. 199—201.

73. *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. — К.: Наук. думка, 2011. — 318 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

74. *Горбань И.И.* Особенности закона больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Радиоэлектроника. Известия вузов. — 2011. — Т. 54, № 7. — С. 31—42.

75. *Горбань И.И.* Статистическая неустойчивость физических процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 9. — С. 40—52.

76. *Горбань И.И.* Марковские гиперслучайные модели // Математические машины и системы. — 2011. — № 2. — С. 92—99.

77. *Горбань И.И.* Статистическая устойчивость колебаний температуры воздуха и осадков в районе Москвы // Математические машины и системы. — 2011. — № 3. — С. 97—104.

78. *Горбань И.И.* Закон больших чисел при нарушениях статистической устойчивости // Математические машины и системы. — 2011. — № 4. — С. 107—115.

79. *Горбань И.И., Горбань Н.И., Новотрясов В.В., Ярощук И.О.* Исследование статистической устойчивости колебаний температуры шельфовой зоны окраинных морей // Труды VII Всероссийского симпозиума «Физика геосфер». — Владивосток, 2011. — С. 542—547.

80. *Горбань И.И., Ярощук И.О.* Исследование статистической устойчивости колебаний температуры и скорости звука в океане // Тезисы доклада на конференции «КОНСОНАНС-2011». — Киев, 2011. — С. 99—104.

81. *Горбань И.И., Коровицкий Ю.Г.* Оценка статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков в Москве и Киеве // Тезисы докладов Шестой науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС '2011». — Киев, 2011. — С. 23—26.

82. *Горбань И.И.* Исследование статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и осадков // Труды седьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2011». — К., 2011. — С. 175—178.

83. *Горбань И.И.* Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2012. — Т. 55, № 3. — С. 3—18.

84. *Горбань И.И.* Расходящиеся последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 1.— С. 106—118.

85. *Горбань И.И.* Статистическая устойчивость излучения астрофизических объектов // Математические машины и системы. — 2012. — № 2. — С. 155—160.

86. *Горбань И.И.* Многозначные величины, последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 3.— С. 147—161.

87. *Горбань И.И.* Критерии и параметры статистической неустойчивости // Математические машины и системы. — 2012. — № 4. — С. 106—114.

88. *Горбань И.И., Ярощук И.О.* О статистической неустойчивости колебаний температуры в Тихом океане // Гидроакустический журнал. — 2012. — № 5.— С. 11—17.

89. *Горбань И.И.* Многозначные детерминированные величины и функции // Труды седьмой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС '2012». — К., 2012. — С. 257—260.

90. *Горбань И.И., Скорбун А.Д.* Исследование нарушений статистической устойчивости колебаний скорости ветра в Чернобыле // Труды восьмой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР '2012». — К., 2012. — С. 39—42.

91. *Горбань И.И.* Проблема аксиоматизации физико-математических теорий // Труды конференции «Современное (электронное) образование MeL2012». — К., 2012. — С. 55—58.

92. *Горбань И.И.* Шестая проблема Гильберта: роль и значение физических гипотез // Математические машины и системы. — 2013. — № 1. — С. 14—20.

93. *Горбань И.И.* Энтропия неопределенности // Математические машины и системы. — 2013. — № 2. — С. 105—117.

94. *Горбань И.И.* Классификация математических моделей // Труды восьмой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС ’2013». — К., 2013. — С. 370—373.

95. *Горбань И.И.* Образование статистически неустойчивых процессов // Труды девятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР ’2013». — К., 2013. — С. 20—23.

96. *Горбань И.И.* Физико-математическая теория гиперслучайных явлений // Труды международной научной конференции «Современная информатика: проблемы, достижения и перспективы развития». — К., 2013. — С. 97—98.

97. *Горбань И.И.* Феномен статистической устойчивости // Журнал технической физики. — 2014. — Т.84, № 3. — С. 22—30.

98. *ГОСТ 16263-70 ГСИ.* Метрология. Термины и определения. — М.: Госстандарт, 1970. — 156 с.

99. *ГОСТ Р 51317.3.3-99* (МЭК 61000-3-3—94). Совместимость технических средств электромагнитная. Колебания напряжения и фликер, вызываемые техническими средствами с потребляемым током не более 16 А (в одной фазе), подключаемыми к низковольтным системам электроснабжения. Нормы и методы испытаний. — М.: Госстандарт России, 1999. — 20 с.

100. *Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. — К.: Наук. думка, 2005. — 263 с.

101. *Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т.* Основи акустики. — К.: Наук. думка, 2007. — 640 с.

102. *Губарев В.В.* Таблицы характеристик случайных величин и векторов. — Новосибирск, Новосибирск. электротехн. ин-т, 1981. — 225 с. (Рук. деп. в ВИНИТИ, № 3146-81).

103. *Гусев В.Г.* Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации. — Л.: Судостроение, 1988. — 264 с.

104. *Данні* Галузевого державного архіву гідрометслужби України за 2000—2010 рр. — Центральна геофізична обсерваторія України.

105. *Данные* о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН. — http://forecast.izmiran.rssi.ru/bankr.htm.

106. *Добронец Б.С.* Интервальная математика. — Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2004. — 219 с.

107. *Донченко В.* Множественные модели неопределенности: эмпирический и математический аспекты // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 127—134.

108. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 287 с.

109. *Дыхне А.М., Снарский А.А., Женировский М.И.* Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC-цепочках // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 1174, № 8. — С. 887—894.

110. *Единая* государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ. Данные Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. — http://ias.ocean.ru/esimo.

111. *Жигальский Г.П.* Неравновесный $1/f^{\gamma}$ -шум в проводящих пленках и контактах / Успехи физических наук. — 2003. — Т. 173, № 5. — С. 465—490.

112. *Жук С.Я.* Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайными параметрами. — К.: НТУУ «КПИ», 2008. — 232 с.

113. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 168 с.

114. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — К.: Наук. думка, 2004. — 588 с.

115. *Зинченко М.В., Зиньковский Ю.Ф.* Особенности измерения степени хаотичности сигнала отклика // Тезисы доклада на 23-й Междунар. крымской конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» 8—13 сентября 2013 г. — Севастополь: Вебер, 2013. — С. 953—954.

116. *Зіньковський Ю.Ф., Уваров Б.М.* Радіоелектронна апаратура як об'єкт теорії гіпервипадкових явищ // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 100—108.

117. *Зиньковский Ю.Ф., Уваров Б.М.* Гиперслучайность алгоритмов моделирования современной радиоэлектронной аппаратуры // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 39—46.

118. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решения. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с.

119. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ.— М.: Изд-во московского ун-та. — 1985. — Т. 1. — 660 с.

120. *Ильичев В.И., Калюжный А.Я., Красный Л.Г., Лапий В.Ю.* Статистическая теория обнаружения гидроакустических сигналов. — М.: Наука, 1992. — 415 с.

121. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 222 с.

122. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработки наблюдений // Сибирский матем. журнал. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701—709.

123. *Карнап Р.* Философские основания физики. Введение в философию науки. — П.: Прогресс, 1971. — 390 с.

124. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. — М.: Янус-К, 2002. — 284 с.

125. *Клименко В.П., Ляхов О.Л.* Інтелектуалізація розв'язання складних прикладних задач методами комп'ютерної алгебри. — К.: ІПММС НАН України, 2009. — 293 с.

126. *Клюшин Д.А., Петунин Ю.И.* Доказательная медицина. — К.: Диалектика-Вильямс, 2007. — 320 с.

127. *Клячкин В.И.* Вероятностные задачи статистической гидроакустики. Ч. 1. Гранично-контактные задачи. — СПб.: Наука, 2007. — 629 с.

128. *Кнопов П.С., Голодников А.Н., Пепеляев В.А.* Оценивание параметров надежности при наличии неполной первичной информации // Компьютерная математика. — 2003. — № 1. — С. 36—37.

129. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 151 с.

130. *Коваленко И.Н.* Обзор моих научных работ. Учителя и соратники // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 3—25.

131. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М.* Случайные процессы: Справочник. — К.: Наук. думка, 1983. — 366 с.

132. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая шк., 1973. — 368 с.

133. *Коган Ш.М.* Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах // Успехи физических наук. — 1985. — Т. 145, вып. 2. — С. 285—325.

134. *Колмогоров А.Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды коммунистической академии. Математика. — 1929. — С. 8—21.

135. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: ОНТИ, 1936. — 175 с.; 1974. — 119 с.

136. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей // Математика, ее методы и значение. — М., 1956. — Т. 2. — С. 252—284.

137. *Колмогоров А.Н.* О логических основаниях теории вероятностей // Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. — С. 467—471.

138. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — 232 с.

139. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 831 с.

140. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985. — 637 с.

141. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. — К.: Либідь, 1993. — 136 с.

142. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

143. *Кравцов Ю.А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. — 1989. — Т. 158, № 1. — С. 93—122.

144. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

145. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 348 с.

146. *Кузьмичев В.Е.* Законы и формулы физики. Справочник. — К.: Наук. думка, 1989. — 862 с.

147. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. — 292 с.

148. *Кузнецов В.П.* Интервальные статистические модели. — М.: Радио и связь, 1991. — 348 с.

149. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.

150. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 261 с.

151. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. — М.: Мир, 1985. — 519 с.

152. *Лаплас П.С.* Изложение системы мира. — Л.: Наука, 1982. — 374 с.

153. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — Т. 1. — 552 с.; 1976. — Т. 2. — 285 с.

154. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 454 с.

155. *Левин В.И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. — 1998. — № 6. — Эл. версия на Федеральном портале «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. 5 мая 2005. www.techno.edu.ru.

156. *Леман Е.* Проверка статистических гипотез / Пер. с англ. Ю.В. Прохорова. — М.: Наука, 1971. — 375 с.

157. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 150 с.

158. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962. — 720 с.

159. *Луи де Бройль.* Революция в физике. — М.: Атомиздат, 1965. — 231 с.

160. *Майстров Л.Е.* Теория вероятностей. Исторический очерк. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

161. *Майстров Л.Е.* Развитие понятия вероятности. М.: Наука, 1980. — 269 с.

162. *Маликов М.Ф.* Основы метрологии. — М.: Изд-во коммерприбор, 1949. — 479 с.

163. *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. — М., 1924.

164. *Математическое* моделирование. — http://ru.wikipedia.org/wiki/.

165. *Мегаэнциклопедия* Кирилла и Мефодия. — http://megabook.ru/.

166. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1962. — Т. 2. — 832 с.

167. *Мизес Р.* Вероятность и статистика. — М.—Л., 1930. — 250 с.

168. *Мир* философии. Ч. 1. Исходные философские проблемы, понятия и принципы. — М.: Изд-во политической литературы, 1991. — 672 с.

169. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981. — 320 с.

170. *Морозов А.А., Косолапов В.Л.* Інформаційно-аналітичні технології підтримки прийняття рішень на основі регіонального соціально-економічного моніторингу. — К.: Наук. думка, 2002. — 230 с.

171. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.* Вероятность. — М.: Мир, 1969. — 433 с.

172. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с.

173. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1. — 464 с.; Т. 2. — 359 с.

174. *Новицкий П.В., Зограф И.Л., Лабунец В.С.* Динамика погрешностей средств измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 192 с.

175. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 706 с.

176. *Ожегов С.И.* Словарь русского языка. — М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1960. — 900 с.

177. *Ольшевский В.В.* Статистические методы в гидролокации. — Л.: Судостроение, 1973. — 201 с.

178. *Ольшевский В.В.* Статистические свойства морской реверберации. — М.: Наука, 1966. — 202 с.

179. *Орлов А.И.* Эконометрика. — М.: Экзамен, 2002. — 576 с.

180. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 672 с.

181. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 112 с.

182. *Особая* точка (дифференциальные уравнения) — http://ru.wikipedia.org/wiki/.

183. *О теории* вероятностей и математической статистике. Переписка А.А. Маркова и А.А. Чупрова. — М.: Наука, 1977. — 199 с.

184. *Пайерлс Р.* Построение физических моделей // УФН. — 1983. — № 6. — С. 315—332.

185. *Пенроуз Р.* Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Полный путеводитель. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 912 с.

186. *Петровский В.С.* Нестационарные задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1988. — 264 с.

187. *Планк М.* Единство физической картины мира. — М.: Наука, 1966. — 282 с.

188. *Пойа Дж.* Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1953. — 462 с.

189. *Полканов К.И., Лоскутова Г.В.* Пространственно-частотные и частотно-волновые методы описания и обработки гидроакустических полей. — СПб.: Наука, 2007. — 348 с.

190. *Полников В.Г.* Нелинейная теория случайного поля волн на воде. — М.: Изд. группа URSS, 2007. — 408 с.

191. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.

192. *Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М.* Марковские процессы // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. — 1989. — 248 с.

193. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009. — 232 с.

194. *Проблемы* акустики океана / Отв. ред. Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1984. — 222 с.

195. *Проблемы* Гильберта / Сб. под общ. ред. П.С. Александрова. — М.: Наука, 1969. — 238 с.

196. *Пространственно-временная* обработка сигналов / Под ред. И.Я. Кремера. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.

197. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967. — 494 с.

198. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 801 с.

199. *Пуанкаре А.* Теория вероятностей (1912). — Ижевск, 1999. — 282 с.

200. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

201. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 883 с.

202. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979. — 469 с.

203. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, Физматлит, 1980. — 321 с.

204. *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. — М.: Физматлит, 2007. — 464 с.

205. *Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 257 с.

206. *Распространение* звука в флюктуирующем океане / Пер. с англ. под ред. Л.М. Бреховских. — М.: Мир, 1982. — 336 с.

207. *Резник А.М.* О структуре оптимального приемника для обнаружения локального источника сигнала в поле шумовой помехи // Радиотехника и электроника. — 1965. — № 6. — С. 979—986.

208. *Резник А.М.* О шумовом поле внутри сферы конечного радиуса, создаваемом слоем простых источников, расположенных на ее поверхности // Акустический журнал. — 1965. — Т. XI, № 1. — С. 79—83.

209. *Резник А.М.* О природе интеллекта // Математические машины и системы. — 2008. — № 1. — С. 23—45.

210. *Різник О.М.* Загальна модель розвитку // Математичні машини і системи. — 2005. — № 1. — С. 84—98.

211. *Реньи А.* Письма о вероятности. — М.: Мир, 1970. — 52 с.

212. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. — 432 с.

213. *Рожков В.А.* Теория вероятностей случайных событий, величин и функций с гидрометеорологическими примерами. — М.: Прогресс-погода, 1996. — Кн. 1. — 154 с.; — Кн. 2. — 406 с.

214. *Рыжиков А.В., Барсуков Ю.В.* Системы и средства обработки сигналов в гидроакустике. — СПб.: ЛЭТИ, 2007. — 328 с.

215. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2: Случайные поля. — 464 с.

216. *Руководство* по выражению неопределенности измерений. — СПб.: ГП «ВНИИМ» им. Д.И. Менделеева, 1999. — 126 с.

217. *Свешников А.А.* Основы теории ошибок. — Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1972. — 125 с.

218. *Сергеев А.Г., Крохин В.В.* Метрология. — М.: Логос, 2001. — 329 с.

219. *Симметрия.* — http://ru.wikipedia.org/wiki/Симметрия.

220. *Скороход А.В.* Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. — 1989. — № 43. — С. 5—145.

221. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.

222. *Скучик Е.* Основы акустики / Пер. с англ. Под ред. Л.М. Лямшева. — М.: Мир, 1976. — Т. 1. — 520 с.; Т. 2. — 542 с.

223. *Словник* з дистанційного зондування Землі / За ред. В.І. Лялько і М.О. Попова. — К.: СМП «АВЕРС», 2004. — 170 с.

224. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978. — 320 с.

225. *Степин В.С.* Теоретическое знание. — М.: Наука, 1999. — 472 с.

226. *Стрельников В.П., Федухин А.В.* Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. — К.: Логос, 2002. — 486 с.

227. *Теория* обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

228. *Теслер Г.С.* Новая кибернетики. — К.: Логос, 2004. — 404 с.

229. *Технологии* динамико-статистических долгосрочных метеорологических прогнозов: современное состояние и перспективы. — Сайт североевропейского климатического центра. — http://seakc.meteoinfo.ru/training/.

230. *Тимашев С.Ф.* Фликкер-шумовая спектроскопия. Информация в хаотических сигналах. — М.: Физматлит, 2007. — 248 с.

231. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.

232. *Трузделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

233. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей в естествознании. — М.: Знание, 1972. — 48 с.

234. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. — 230 с.

235. *Тутубалин В.Н.* Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента // Успехи физических наук. — 1993. — Т. 163, № 7. — С. 93—109.

236. *Тюрин Н.И.* Введение в метрологию. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 279 с.

237. *Уваров Б.М.* Методы представления характеристик радиоэлектронной аппаратуры на основе теории гиперслучайных явлений // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — № 10. — С. 35—42.

238. *Уваров Б.М.* Гіпервипадкові функціональні характеристики радіоелектронних засобів // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 113—121.

239. *Уваров Б.М.* Проектування та оптимізація РЕЗ з гіпервипадковими макропоказниками // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2010. — № 41. — С. 90—98.

240. *Уваров Б.М.* Методологічні засади проектування радіотехнічних пристроїв з імовірнісними функціональними характеристиками // Дисертаційна робота на здобуття наукового ступеня д.т.н. — К., 2011. — 302 с.

241. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Гіпервипадкові характеристики теплових процесів у пристроях радіоелектронної апаратури // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 41. — С. 103—108.

242. *Уваров Б.М., Зиньковский Ю.Ф.* Проектирование радиоэленктронной аппаратуры с учетом гиперслучайных свойств ее функциональных // Proceedings of International scientific conference UNITECH-2010. — Gabrovo, 2010. — P. 1-171—1-176.

243. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 180 с.

244. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 212 с.

245. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з імовірнісними характеристиками. — К.: «Корнійчук», 2011. — 248 с.

246. *Уваров Б.М.* Гиперслучайные показатели надежности РЭА // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 32—38.

247. *Уваров Б.М., Зиньковский Ю.Ф.* Применение теории гиперслучайных явлений для расчета функциональных характеристик и параметров радиоэлектронных средств // Математические машины и системы. — 2011. — № 3. — С. 121—129.

248. *Успенский В.А., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? // Успехи математических наук. — 1990. — Т. 45, № 1. — С. 105—162.

249. *Фалькович С.Е.* Оценка параметров сигналов. — М.: Сов. радио, 1970. — 336 с.

250. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 260 с.

251. *Фейнман Р.* Характер физических законов. — М.: Наука, 1987. — 160 с.

252. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 498 с.; Т. 2. — 752 с.

253. *Физика* океана. — М.: Наука, 1978. — Т. 2. — 455 с.

254. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.—Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. — Т. 1. — 607 с.; 1959. — Т. 2. — 808 с.

255. *Флатте К.* Распространение звука в флуктуирующем океане / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 336 с.

256. *Фритцш Х.* Фундаментальные физические постоянные // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, № 4. — С. 383—392.

257. *Фундаментальные* физические константы. — http:// physics.nist.gov/constants.

258. *Харкевич А.А.* Линейные и нелинейные системы. — М.: Наука, 1973. — 566 с.

259. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. — 504 с.

260. *Хартли Р.В.Л.* Теория информации и ее приложения. — М.: Физматгиз, 1969. — С. 5—35.

261. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980. — 95 с.

262. *Хинчин А.Я.* Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. — 1929. — № 9. — С. 141—166.

263. *Хинчин А.Я.* Математические основания статистической механики. — М.: Гостехиздат, 1941. — 117 с.

264. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. — 1961, № 1. — С. 91—102; № 2. — С. 77—89.

265. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

266. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984. — 303 с.

267. *Чайковский Ю.В.* О природе случайности. — М.: Центр системных исследований—Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. — 280 с.

268. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975. — 165 с.

269. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. — Изд-во XYZ; Институт вычислительных технологий, 2010. — 597 с. (http://www.nsc.ru/interval).

270. *Шейнин О.Б.* Теория вероятностей. Исторический очерк. — http://www.sheynin.de.

271. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972. — 352 с.

272. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — 829 с.

273. *Ширяев А.Н.* Вероятность и концепция случайности: к 75-летию выхода в свет монографии А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». — М., 2009. — 92 с.

274. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты, модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.

275. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 574 с.

276. *Шишлянникова В.Н., Шишлянникова С.Н.* Численные и графические методы. — Рига: РИИГВФ, 1963. — 314 с.

277. *Шлезингер М.И., Главач В.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. — К.: Наук. думка, 2004. — 545 с.

278. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.

279. *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. — М.: Наука, 1976. — 422 с.

280. *Эльясберг П. С.* Измерительная информация. Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? — М.: Наука, 1983. — 207 с.

281. *Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 263 с.

282. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. — М.: Наука, 1968. — 940 с.

283. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1964. — 344 с.

284. *Ярощук И.О., Попов Г.В.* Статистическое моделирование распространения волн во флуктуирующих средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 156 с.

285. *Ярощук И.О., Гулин О.Э.* Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. — Владивосток: Дальнаука, 2002. — 351 с.

286. *All-Sky Monitor* (ASM) team at the Kavli Institute for Astrophysics and Space Research at the Massachusetts Institute of Technology — http://xte.mit.edu/ASM_lc.html.

287. *Batyrshin I., Kacprzyk J., Sheremetov L., Zadeh L.A.* Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance // Studies in Computational Intelligence. — 2007. — Vol. 36. — P. 55—83.

288. *Bernoulli J.* The art of conjecturing. — 1713.

289. *Bohlmann G.* Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung inihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici. — Roma, 6—11 Aprile 1908. — Vol. III, Secione 11b.

290. *Boltzmann L.* Weitere Studien Uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen // Sitzber. Acad. Wiss. Wien. — 1872. — Bd. 66. — S. 275—376.

291. *Borel E.* Sur les probabilities denombrables et leurs applications arithmetiques // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909. — N 26. — P. 247—271.

292. *Clausius R.* Uber verschiedene fur die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Warmetheorie // Ann. Phys. Folge 2. — 1865. — Bd. 125. — S. 353—400.

293. *Crownover R.M.* Introduction to fractals and chaos. — Boston—London: Jones and Bartlett Pub., Inc., 1995. — 195 p.

294. *Ferson S., Kreinovich V., Ginzburg L., Myers D.S., Sentz K.* Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures / SAND report SAND2002-4015. — 2003. — 143 p.

295. *FOREX.* — http://www.forexite.com.

296. *Gagnepain J.J., Uebersfeld J.* — In: Proc. of Symposium on 1/f Fluctuations / Ed. T.Musha. — Tokyo, 1977. — P. 173.

297. *Gibbs J.W.* Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics. — N. Y.: Schribner, 1902. — 159 p.

298. *Gorban I.I.* New approach in optimization of space-time signal processing in hydroacoustics // Course notes to the Tutorial on the conference «Ocean'98». — France, IEEE, 1998. — 69 p.

299. *Gorban I.I.* Space-time signal processing algorithms for moving antenna // IEEE «Ocean'98». Conf. Proc. — 1998. — Vol. 3. — P. 1613—1617.

300. *Gorban I.I.* Space-time signal processing for moving antennae // Elsevier, Advances in Engineering Software. — 2000. — Vol. 31(2). — P. 119—125.

301. *Gorban I.I.* Mobile Sonar Systems: Optimization of Space-Time Signal Processing. — Kiev: Nauk. dumka, 2008. — 240 p.

302. *Gorban I.I.* Hyper-random phenomena: definition and description // Information Theories and Applications. — 2008. — Vol. 15, N 3. — P. 203—211.

303. *Gorban I.I.* Cognition Horizon and the Theory of Hyper-random Phenomena // Intern. J. of Information Theories and Applications. — 2009. — Vol. 16, N 1. — P. 5—24.

304. *Gorban I.I.* Disturbance of statistical stability // Information Models of Knowledge. — Kiev—Sofia: ITHEA, 2010. — P. 398—410.

305. *Gorban I.I.* Disturbance of statistical stability (part II) // International Journal of Information Theories and Applications. — 2011. — Vol. 18, N 4. — P. 321—333.

306. *Gorban I.I.* Divergent and multiple-valued sequences and functions// Problems of Computer Intellectualization. Book 28. — Kiev—Sofia: ITHEA, 2012. — P. 359—374.
307. *Graunt J.* Natural and political observations made upon the bills of mortality (1662). — Baltimore, 1939.
308. *Gray R.M.* Probability, Random Processes and Ergodic Properties. — Springer Verlag, 1987. — 209 p.
309. *Greiner J., Cuby J.G., McCaughrean M.J.* An unusual massive stellar black hole in the Galaxy // Nature. — 2001. — Vol. 414. — P. 522—524.
310. *Hagan M.T., Demuth H.B., Beale M.H.* Neural network design. — Boston, MA: PWS Publishing, 1996. — 345 p.
311. *Halpern J.Y.* Reasoning about uncertainty. — MIT Press, 2003. — 497 p.
312. *Hilbert D.* Axiomatic Thinking // Chicago: Philosophia Mathematica. — 1970. — N 7.
313. *International* standard ISO 3534-1:2006 (E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. — 2006. — 105 p.
314. *Johnson J.B.* // Phys. Rev. — 1925. — Vol. 26. — P. 71.
315. *Keller J.B.* The probability of heads // Am. Math. Monthly. — 1986. — Vol. 93. — P. 191.
316. *Kolmogorov A.N.* On logical foundations of probability // Lect. Notes. Math. — 1983. — N 1021. — P. 1—5.
317. *Kreinovich V.* Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics // Reliable Computing. — 1995. — Vol. 1, N 1. — P. 33—40.
318. *Kreinovich V., Berleant D.J., Ferson S., Lodwick W.A.* Combining interval and probabilistic uncertainty: foundations, algorithms, challenges. — An Overview «Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks, and Genetic Algorithms FNG'05». — Tijuana, Mexico, 2005. — P. 1—10.
319. *Kyburg H.E.* Interval-valued probabilities // Imprecise Probabilities Project. — 1998—2000. — http://ippserv.rug.ac.be/.
320. *Lomnicki A.* Nouveaux fondements du calcul des probabilities // Fund. Math. — 1923. — Vol. 4. — P. 34—71.
321. *MacArthur R.H.* Educations of animal populations and measure of community stability // Ecology. — 1955. — Vol. 36, N 7. — P. 533—536.
322. *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.* Bounding approaches to system identification. — New York: Plenum Press, 1996. — 248 p.
323. *Mises R.* Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. — 1919. — Z. 5. — P. 52—99.
324. *Mises R.* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. — Wien, 1928.
325. *Mises R.* Mathematical theory of probability and statistics / Edited and complemented by H. Geiringer. — N.Y. and London: Acad. Press, 1964. — 232 p.
326. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 393 p.
327. *Moor R.E.* Interval analyses. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966. — 159 p.
328. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 255 p.
329. *Schottky W.* Phys. Rev. — 1926. — Vol. 28, N 7. — P. 74.

330. *Shannon C.E.* A mathematical theory of communications / C.E. Shannon // Bell Systems Tech. J. — 1948. — Vol. 27. — P. 623—656.

331. *Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu.* Turbulence, ideal / Encyclopedia of Nonlinear Science. — N. Y. and London, 2005. — P. 955—957.

332. *Shary S.P.* A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable computing. — 2002. — N 8. — P. 321—418.

333. *Sunaga T.* Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. — 1958. — Vol. 2, Misc. II. — P. 547—564.

334. *Uncertainty of measurement.* Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement // ISO/IEC Guide 98-1:2009 (OIML Guide G 1-104). — 2009. — 30 p.

335. *Vessot R. F. C.* — In: Experimental Gravitation: Proc. of Intern. School of Physics «Enrico Fermi». Course 56. — N. Y.: Academic Press, 1974. — P. 111.

336. *Walley P.* Statistical reasoning with imprecise probabilities. — N. Y.: Chapman and Hall, 1991. — 706 p.

337. *Wornell G.W.* Fractal Signals. In: Digital Signal Processing / Ed. Vijay K. Madisetti and Douglas B. Williams. — Boca Ration: CRC Press LLC, 1999.

338. *Zadeh L.A., Kacprzyk J.* Fuzzy logic for the management of uncertainty. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1992. — 256 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Д

Е

З

Х

Ц

Ч

Ш

Э

Я

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н а у к о в е в и д а н н я

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧНИХ МАШИН І СИСТЕМ

ГОРБАНЬ Ігор Ілліч

ФЕНОМЕН
СТАТИСТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ

(російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2014

Художній редактор *І.Р. Сільман*
Технічний редактор *Т.С. Березяк*
Коректор *О.Є. Челок*
Оператор *В.Г. Каменькович*
Комп’ютерна верстка *О.О. Балюк*

Підп. до друку 21.07.2014. Формат 60 × 90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 27,75. Ум. фарбо-відб. 28,25.
Обл.-вид. арк. 25,0. Тираж 300 прим. Зам. № ДФ 215

НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво “Фенікс”»
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13б

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА

ГОРБАНЬ ИГОРЬ ИЛЬИЧ — доктор технических наук, профессор. Родился 30 августа 1952 г. в г. Киеве. В 1975 г. окончил Киевский политехнический институт по специальности «гидроакустика», а в 1978 г. — аспирантуру по той же специальности.

В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию в ЦНИИ «Морфизприбор», в 1991 г. — докторскую в Институте кибернетики АН УССР. В 1989 г. ему было присвоено ученое звание старшего научного сотрудника, а в 2000 г. — профессора.

До 1993 г. работал в Киевском НИИ гидроприборов, участвовал в проведении ряда опытно-конструкторских и научно-исследовательских работ. Был первым заместителем Главного конструктора гидроакустической станции (ГАС) с гибкой протяженной буксируемой антенной, ответственным за алгоритмическое обеспечение станции, Главным конструктором опытно-конструкторской работы по созданию ГАС на оптической элементной базе, научным руководителем двух тихоокеанских научных экспедиций по изучению гидроакустических сигналов.

С 1993 г. в течение 12 лет работал в Институте проблем математических машин и систем (ИПММС) НАН Украины в должности главного научного сотрудника, затем заместителя директора по научной работе. С 2004 по 2008 гг. работал в УкрНИУЦ Госпотребстандарта Украины в должности заместителя генерального директора по научной работе. В 2009 г. вернулся в ИПММС НАН Украины, где работает по настоящее время.

Занимается научной, научно-педагогической и научно-организационной работой. Был научным руководителем несколь-ких научно-исследовательских работ, преподавал в Киевском институте военно-воздушных сил, на протяжении ряда лет являлся членом экспертного совета ВАК Украины. Руководит научной работой аспирантов, член специализированных советов по защите докторских диссертаций, член редколлегий научных журналов и международных обществ, в том числе Акустического общества Америки (ASA), Института инженеров в области электротехники и электроники (IEEE) и др.

Автор трех теорий: *теории пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях*, *теории быстрой многоканальной обработки гидроакустических сигналов* (их изложению посвящены монографии [Gorban, 1998 (1), Gorban, 2008 (1), Горбань, 2008 (1)]) и *физико-математической теории гиперслучайных явлений* (ее описанию посвящены монографии [Горбань, 2007 (1), 2011 (1)] и настоящая книга).

Результаты исследований опубликованы более чем в 200 научных трудах, в том числе 9 монографиях, и внедрены в ряде гидроакустических станций.