ГОРБАНЬ
ИГОРЬ ИЛЬИЧ
доктор технических наук
профессор

Научные интересы:
- гидроакустика и радиолокация
- пространственно-временная обработка сигналов
- теория вероятностей и математическая статистика

НАУКОВА ДУМКА

ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ: ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

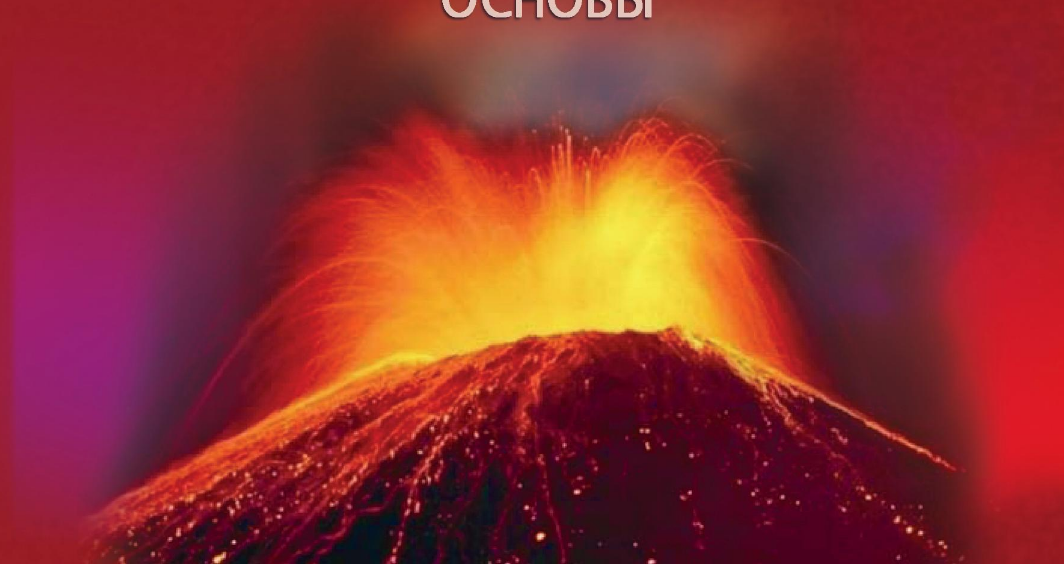
И. И. ГОРБАНЬ

Проект Наукова Книга

И. И. ГОРБАНЬ

ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ:

ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ



Created with novaPDF Printer (www.novaPDF.com)

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН И СИСТЕМ

И. И. ГОРБАНЬ

ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ: ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ПРОЕКТ
«НАУКОВА КНИГА»

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 2011

УДК 519.2: 530.1: 600.1

Монография посвящена физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей физические события, величины, процессы и поля в условиях нарушения статистической устойчивости.

Для читателей с разным уровнем математической подготовки: тех, кто лишь поверхностно знаком с теорией вероятностей и хотел бы познакомиться с методами учета нарушений статистической устойчивости реальных физических явлений, а также для инженеров, широко использующих статистические методы, математиков, специализирующихся в области теории вероятностей, и физиков, стремящихся постичь основы мироздания.

Монографія присвячена фізико-математичній теорії гіпервипадкових явищ, що описує фізичні події, величини, процеси і поля в статистично нестійких умовах.

Для читачів з різним рівнем математичної підготовки: тих, хто має лише загальне уявлення про теорію ймовірностей і бажає познайомитись з методами врахування порушень статистичної стійкості реальних фізичних явищ, а також для інженерів, які широко використовують статистичні методи, математиків, які спеціалізуються у галузі теорії ймовірностей, та фізиків, які намагаються осягнути основи всесвіту.

The monograph is dedicated to the physico-mathematical theory which describes physical events, variables, processes, and fields in non-constant statistical conditions.

The book is oriented to different readers: ones that have only some images about probability theory and want to obtain information about modern statistical methods taking into consideration statistical instability of real physical phenomena, engineers that widely use statistical methods, mathematicians working in probability theory area, and physicists looking for the basis of universe.

Р е ц е н з е н т ы:
чл.-кор. НАН Украины, д-р техн. наук *Н.Ю. Кузнецов*,
д-р физ.-мат. наук, профессор *П.С. Кнопов*,
д-р техн. наук *А.М. Резник*

Рекомендована к изданию ученым советом
Института проблем математических машин и систем НАН Украины
(протокол № 9 от 08.09.2010 г.)

Видання здійснене за державним контрактом
на випуск наукової друкованої продукції

Научно-издательский отдел
физико-математической и технической литературы

Редактор *В.В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1093-2

© И.И. Горбань, 2011
© НПП «Издательство "Наукова думка" НАН Украины», дизайн, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

— Как устроен наш мир?

Окружающий мир подчиняется определенным физическим законам, среди которых особое место занимает статистическая устойчивость массовых явлений — удивительный физический феномен, фиксируемый во многих экспериментальных исследованиях.

Современная физико-математическая теория вероятностей (включающая в широком понимании и математическую статистику) изучает законы массовых явлений, описывая их с помощью случайных (вероятностно-случайных или, иначе, стохастических) математических моделей, характеризуемых вероятностной мерой.

В основе построения таких моделей лежит физическая гипотеза абсолютной (идеальной) статистической устойчивости частоты событий, из которой следует абсолютная статистическая устойчивость (статистическая прогнозируемость) параметров и характеристик любых физических явлений — реальных событий, величин, процессов и полей. Тем самым признается концепция устройства мира по случайному принципу.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости считалась незыблемой, хотя некоторые ученые допускали, что в реальном мире она справедлива лишь с определенными оговорками.

Экспериментальные исследования различных физических величин и процессов на больших интервалах наблюдения показали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости не подтверждается. В реальной жизни всегда происходят более или менее значимые нарушения статистической устойчивости. Связаны они с тем, что окружающий мир — открытая система. Характеристики и параметры реальных объектов и условия их наблюдения постоянно меняются. Изменения происходят на всех уровнях, в том числе статистическом.

Статистические оценки, формируемые на относительно небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения, обладают тем свойством, что при возрастании объема статистических данных уровень флуктуаций их значений уменьшается, что создает иллюзию идеальной статистической устойчивости. Но, начиная с некоторого критического объема, при увеличении количества данных уровень флуктуаций не только не уменьшается, а, наоборот, возрастает.

Исследования нарушений статистической устойчивости явлений и разработка эффективных средств адекватного описания мира с учетом таких нарушений привели к построению новой физико-математической теории — теории гиперслучайных явлений.

В теории вероятностей базовыми математическими объектами (моделями) являются случайные событие, величина и функция; в теории гиперслучайных явлений в таком качестве выступают гиперслучайные событие, величина и функция, представляющие собой множества несвязанных между собой случайных событий, величин и функций.

Математическая составляющая теории гиперслучайных явлений базируется на классических аксиомах теории вероятностей А.Н. Колмогорова, физическая — на гиперслучайных гипотезах: гипотезе ограниченной статистической устойчивости реальных событий, величин, процессов и полей и на гипотезе адекватного описания этих физических явлений гиперслучайными моделями.

Предположение, что гиперслучайные гипотезы справедливы для широкого круга массовых физических явлений, приводит к новой концепции устройства мира на гиперслучайных принципах. Основополагающая роль в ней отводится не абсолютной, как в концепции устройства мира на случайных принципах, а ограниченной статистической устойчивости.

С точки зрения математики теория гиперслучайных явлений — ветвь теории вероятностей; с точки зрения физики — новая теория, основанная на новых представлениях об окружающем мире.

* * *

Монография написана на основе оригинальных теоретических и экспериментальных исследований автора, результаты которых опубликованы в научных журналах [Горбань, 2005—2010, Gorban, 2008—2010] и монографии [Горбань, 2007]. Основополагающие идеи книги формировались в ходе выполнения работ, которые автор проводил в области гидроакустики, начиная с конца 70-х годов (их результаты обобщены в курсе лекций [Gorban, 1998] и монографиях [Горбань, 2008, Gorban, 2008]).

Предлагаемая книга существенно отличается от монографии 2007 г., как по объему, так и содержанию. Особое внимание уделено в ней физической стороне теории и экспериментальному подтверждению основных ее положений. Кроме того, математическая часть значительно расширена и уточнена за счет новых результатов, полученных в последнее время.

Данная монография может представлять интерес для студентов старших курсов университетов технического, физического и математического профилей, аспирантов, ученых и специалистов, занимающихся разработкой математических методов описания физических явлений, построением новых физических и математических моделей, развитием теоретической базы проведения измерений, разработкой методов оценки параметров и обнаружения сигналов, а также для всех, кто задумывается над вопросом устройства окружающего мира.

Материал изложен с ориентацией на читателей с разным уровнем математической подготовки:

• тех, кто лишь поверхностно знаком с теорией вероятностей и математической статистики и хотел бы познакомиться с современными методами учета нарушений статистической устойчивости реальных физических явлений,

• инженеров, широко использующих статистические методы в своей повседневной деятельности,

• математиков, специализирующихся в области теории вероятностей, и физиков, стремящихся постичь основы мироздания.

Первую категорию читателей могут заинтересовать введение, главы 1, 2, 4, 14 и послесловие.

Инженерам к тому же могут быть интересны главы 3, 5, 6 и 8, а также главы 11, 13, 15 — 20.

Автор надеется, что физиков и специалистов в области теории вероятностей заинтересуют и другие главы, причем настолько, что они прочитают книгу целиком.

* * *

Теория гиперслучайных явлений лежит на стыке физики, математики и технических приложений. Поэтому к рецензированию были привлечены ученые разных специальностей.

Автор признателен всем, кто прочитал рукопись, высказал свои критические замечания и принял участие в конструктивном обсуждении книги.

Особую благодарность автор хотел бы выразить официальным рецензентам: чл.-кор. НАН Украины Кузнецову Н.Ю., д.ф.-м.н., проф. Кнопову П.С., д.т.н. Featureснику А.М., а также акад. РАН Шокину Ю.И., д.ф.-м.н., проф. Тутубалину В.Н., д.т.н., проф. Павлову А.А., д.ф.-м.н. Ярощуку И.О., д.ф.-м.н. Клюшину Д.А., д.т.н. Кононову А.А., д.ф.-м.н., проф. Шарому С.П., ознакомившимся с рукописью и высказавшим ряд критических замечаний, способствовавших улучшению книги.

Автор благодарен акад. НАН Украины Коваленко И.Н., чл.-кор. АН Молдавии Гаиндрику К.В., чл.-кор. НАН Украины Томчуку П.М., д.ф.-м.н., проф. Сарбею О.Г., д.т.н., проф. Иваненко В.И. и д.т.н., проф. Шлезингеру М.И. за предоставленные возможности выступить на руководимых ими семинарах, а также всем участникам этих семинаров за плодотворное обсуждение материалов монографии.

Автор признателен акад. РАН Акуличеву В.А., акад. РАН Нигматулину Р.И., акад. НАН Украины Гринченко В.Т., чл.-кор. НАН Украины Лысенко В.С., д.т.н., проф. Зиньковскому Ю.Ф., д.т.н., проф. Сивову Н.С., д.т.н., проф. Жуку С.Я., д.т.н., проф. Попову М.А., д.т.н., проф.

Литвинову В.В., д.т.н., проф. Казимиру В.В., д.т.н., проф. Стрельникову В.П., д.т.н., проф. Харченко А.В., к.т.н. Вишневскому В.В., к.т.н. Крисилову А.Д. и многим другим, проявляющим устойчивый интерес к проводимым им работам, в частности в области теории гиперслучайных явлений.

Автор благодарен директору ИПММС НАН Украины чл.-кор. НАН Украины Морозову А.А. и заместителю директора по научной работе д.ф.-м.н., проф. Клименко В.П. за поддержку исследований в области теории гиперслучайных явлений и помощь, оказанную ими при подготовке данной монографии.

С чувством особой благодарности автор вспоминает людей, которых уже нет в живых, но без которых этой книги не было бы. Прежде всего, родителей, бабушку и тетю, воспитавших его и с детства прививших любовь к науке, своих учителей — проф. Яремчука Ф.П., раскрывшего перед ним красоту математики, и проф. Гаткина Н.Г., сыгравшего важную роль в формировании его научных интересов и взглядов, а также близкого друга — талантливого конструктора и ученого, Главного конструктора гидроакустической станции Божка Ю.Д., общение с которым способствовало развитию у автора критического отношения к устоявшимся истинам и мнениям.

Автор благодарен коллегам по экспертному совету ВАК Украины и специализированным советам по защите диссертаций, с которыми ему посчастливилось сотрудничать на протяжении многих лет, а также коллегам по работе за их доброжелательное отношение и поддержку.

Автор искренне благодарен своей жене за ее чуткость, терпение, заботу и любовь.

* * *

Замечания и рекомендации можно направлять автору по адресу:
Институт проблем математических машин и систем
НАН Украины
пр. Глушкова, 42, Киев, 03187, Украина,
адрес электронной почты: igor.gorban@yahoo.com.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем познания является адекватное представление окружающего мира. Физические и математические модели, используемые для описания реальных явлений, постоянно совершенствуются. С получением новых данных и развитием представлений о мире старые модели отходят на второй план, заменяются новыми, более совершенными.

Если до середины средневековья мир виделся неизменным и описывался преимущественно детерминированными моделями, то в настоящее время он рассматривается как динамично меняющаяся структура. Чрезвычайно важную роль сыграло установление *факта статистической устойчивости массовых явлений*, породившего теорию вероятностей и математическую статистику.

Одним из основных средств описания мира стали *случайные* (*вероятностно-случайные* или, иначе, *стохастические* [Колмогоров, 1956]) математические модели. В этих моделях в качестве абстрактных математических объектов выступают случайные явления — случайные события, величины и функции, характеризуемые вероятностной мерой.

В стохастических моделях детерминизм не изжит полностью. Он присутствует в них и играет важную роль. С уровня детерминированного описания явлений он перешел на уровень детерминированного описания вероятностных характеристик и параметров — вероятностей, функций распределения, моментов, кумулянтов и пр.

В этих моделях главную роль играет функция распределения вероятностей — детерминированная характеристика, дающая исчерпывающее описание любого случайного явления.

Последние экспериментальные исследования показывают, что факт статистической устойчивости массовых явлений не такой уж неоспоримый, как казался ранее. По всей видимости, имеет место не абсолютная, а *ограниченная статистическая устойчивость явлений*.

Исследования нарушений статистической устойчивости явлений и разработка эффективных средств адекватного описания мира с учетом этих нарушений привели к построению новой физико-математической теории — теории гиперслучайных явлений.

В гиперслучайных моделях, о которых пойдет речь далее, неопределенная составляющая усилена, а детерминированная — ослаблена. Достигнуто это введением дополнительной степени свободы. За счет усиления неопределенной составляющей стало возможным описывать реальные явления более адекватно с учетом присущих им элементов статистической непредсказуемости (непрогнозируемости).

Во всех теориях важную роль играет точность формулировок исходных понятий. Поэтому прежде, чем излагать суть теории гиперслучайных явлений, кратко остановимся на некоторых ее базовых понятиях.

Уместно заметить, что понятие случайного явления, широко используемое в теории вероятностей и многочисленных ее приложениях, до сих пор не имеет однозначного толкования, причем даже среди математиков. Используемая в данной монографии математическая трактовка случайного явления соответствует теоретико-множественному подходу, разработанному А.Н. Колмогоровым [Колмогоров, 1936].

Понятие случайного явления. *Случайное событие* описывается с помощью вероятностного пространства, задаваемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — борелевское поле (σ-алгебра подмножеств событий) и P — вероятностная мера (вероятность) подмножеств событий. Именно таким образом формализовано понятие случайного события в новом международном стандарте ISO [International standard, 2006].

Под *случайной величиной* понимается измеримая функция, определенная на пространстве Ω элементарных случайных событий ω, а под *случайной функцией* — функция независимого аргумента, значение которой при фиксированном его значении представляет собой случайную величину.

Под *случайным явлением* понимается математический объект (случайное событие, величина или функция), который исчерпывающе характеризуется определенным, вполне конкретным законом распределения вероятностей.

В дальнейшем *явление или математическая модель, не описываемая конкретным законом распределения, случайным не считается*. Это чрезвычайно важное положение, на которое следует обратить особое внимание.

Понятие вероятности. В теории вероятностей ключевым является понятие вероятности события. В приведенном выше определении оно не имеет физической трактовки.

При более наглядном статистическом определении вероятности (по Р. фон Мизесу [Mises, 1919, 1928, 1964, Мизес, 1930]) вероятность $P(A)$ случайного события A представляется как предел частоты $p_N(A)$ его наблюдения при проведении опытов в одинаковых статистических условиях и устремлении количества опытов N к бесконечности: $P(A) = \lim\limits_{N \to \infty} p_N(A)$.

При небольших значениях N частота $p_N(A)$ сильно флуктуирует, однако по мере увеличения N постепенно стабилизируется и при $N \to \infty$ стремится к определенному пределу $P(A)$.

Важным звеном, связывающим два разных определения вероятности, служит закон больших чисел, определяющий сходимость частоты случайного события к его вероятности.

Аксиомы и гипотезы теории вероятностей. Все теории основываются на *недоказуемых* аксиомах, постулатах и положениях-гипотезах. Любая физико-математическая теория базируется на математических аксиомах и постулатах, образующих основу ее математической части, а также физических гипотезах, обеспечивающих интерпретацию реального физического мира с помощью ее физических и математических моделей.

Современная теория вероятностей с многочисленными ее прикладными разделами представляет собой физико-математическую теорию. Основой ее математической части служат аксиомы А.Н. Колмогорова.

Корректное использование теории вероятностей на практике обеспечивается принятием *физической гипотезы статистической устойчивости частоты* реальных событий или эквивалентной ей *физической гипотезе статистической устойчивости* (*статистической прогнозируемости*) *параметров и характеристик* физических явлений — реальных событий, величин, процессов и полей.

Обычно полагается, что гипотеза статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений. Иными словами, принимается *концепция устройства мира на случайных принципах.*

Одним из основных требований к научным физическим гипотезам является их согласованность с опытными данными. Многие экспериментальные исследования подтверждают справедливость гипотезы статистической устойчивости. Однако оказывается, что она справедлива не всегда.

Рассмотрим классический пример с подбрасыванием монеты.

Пример игры в орлянку [1]. Считается, что при подбрасывании монеты исходы опытов носят случайный характер и вероятность $P_{\text{о}}$ выпадения орла равна вероятности $P_{\text{р}}$ выпадения решки: $P_{\text{о}} = P_{\text{р}} = 0,5$.

На первый взгляд, нет оснований сомневаться в адекватности описанной модели. Тем более, что факт равенства вероятностей подтверждается рядом экспериментальных исследований. Например, Бюффон подбрасывал монету 4 040 раз. Орел выпал 2 048 раз. К. Пирсон провел две серии опытов: с подбрасыванием монеты 12 000 и 24 000 раз. В первой серии орел выпал 6 019 раз, во второй — 12 012 раз. Подобные эксперименты проводили и другие ученые. Результаты этих исследований подтверждают, что частота выпадения орла и решки примерно одинаковы.

Однако, если разобраться в задаче детально, то станет ясно, что основания для сомнений в адекватности модели все же есть. И сомнения достаточно обоснованные.

Вероятности $P_{\text{о}}$, $P_{\text{р}}$ зависят от условий проведения эксперимента (так называемых статистических условий). В фиксированных условиях при устремлении числа опытов N к бесконечности частоты выпадения орла и решки стремятся к определенным вероятностям $P_{\text{о}}$ и $P_{\text{р}}$ (в частности они могут быть равными).

Но на практике не приходится рассчитывать на идеальную стабильность статистических условий. Если эти условия меняются, причем *без какой-либо статистической закономерности*, утверждать, что при $N \to \infty$ частоты выпадения орла и решки стремятся к конкретным вероятностям, нельзя. В этом случае вероятности событий не существуют.

---

[1] Далеко не на всех монетах изображен орел. Поэтому название игры в орлянку нельзя признать удачным. Однако в русскоязычной литературе это название укоренилось.

Как подойти к построению модели, адекватно описывающей игру? Можно исходить из того, что существуют определенные вероятности $P_о$, $P_р$ для *различных условий* проведения эксперимента. Если эти вероятности известны, то можно рассчитать интервалы вероятностей, в которых будут находиться частоты при $N \to \infty$.

Модель, корректно учитывающая возможные колебания частот выпадения орла и решки в определенных интервалах вероятности, очевидно, более адекватно описывает реальную ситуацию, чем модель случайного типа, необоснованно предполагающая, что при увеличении числа опытов эти частоты стремятся к фиксированным вероятностям.

Рассмотрим другой пример.

Оценка кучности стрельбы. Пусть необходимо экспериментальным путем оценить кучность стрельбы оружия, например, автомата определенного типа. Конкретизировать эту задачу можно по-разному.

Если представляет интерес кучность стрельбы конкретного образца оружия, то задача достаточно легко решается методами классической теории вероятностей и математической статистики. Проведя серию выстрелов по мишени, можно оценить дисперсию или среднеквадратическое отклонение. Если количество выстрелов достаточно велико, то можно получить эмпирическую функцию распределения. При неограниченном увеличении количества выстрелов эти оценки стремятся к соответствующим дисперсии, среднеквадратическому отклонению и функции распределения.

Постановка задачи и ее решение, однако, выглядят совершенно иначе, если представляет интерес кучность стрельбы автоматов, поставляемых на оружейный склад с разных оружейных заводов. Кучность стрельбы каждого из автоматов может быть охарактеризована определенной функцией распределения. Для разных образцов оружия функция распределения разная. Корректное решение задачи требует учета различия этих распределений и расчета некоторых характеристик и параметров, дающих интегральное представление о качестве находящейся на складе продукции.

Задача еще более усложняется, если принять во внимание, что оборудование, на котором изготавливаются автоматы, меняется, и меняются заводы, поставляющие продукцию. Эти статистически непредсказуемые обстоятельства приводят к *статисти-*

чески непрогнозируемым изменениям характеристик и параметров качества автоматов.

В данной ситуации никакое даже очень длительное экспериментальное изучение кучности стрельбы не может гарантировать получение статистически устойчивых оценок дисперсии или функции распределения. Максимум, на что можно рассчитывать, — получение статистически устойчивых оценок *границ дисперсии, границ среднеквадратических отклонений или границ функции распределения.*

Изменчивость мира. Анализ подобных задач приводит к осознанию, что окружающий мир по своей природе изменчив. Практически все характеристики и параметры реальных объектов и условия их наблюдения меняются. Исключение могут составлять, возможно, лишь фундаментальные физические константы, такие как скорость света, гравитационная постоянная и пр.[2] Изменения происходят на разных уровнях, в том числе, как показывают результаты экспериментальных исследований, и на *статистическом уровне.*

Проблема описания явлений на больших интервалах наблюдения. Обычно на небольших временных, пространственных или пространственно-временных интервалах наблюдения статистические характеристики реальных явлений мало меняются (практически стабильны) и потому стохастические модели хорошо описывают физические явления.

На больших же интервалах наблюдения неустойчивость статистических характеристик проявляется сильнее. Она обнаруживается повсеместно при исследовании различных физических явлений.

Существенно, что изменения статистических характеристик носят *непредсказуемый* (*непрогнозируемый*) *характер.* Они не описываются какими-то законами распределения. Поэтому классические стохастические модели оказываются малопригодными.

Для адекватного описания окружающего мира требуются модели другого типа, позволяющие учитывать как статистическую неустойчивость характеристик исследуемых явлений, так и неустойчивость статистических условий наблюдения этих явлений.

Нарушения статистической устойчивости в реальном мире являются проявлениями неопределенности.

[2] Экспериментально доказать постоянство этих величин не представляется возможным из-за ограниченной точности реальных измерений.

Неопределенность и способы ее учета. Неопределенность — широкое понятие, не имеющее однозначного толкования среди ученых. Существуют разные его трактовки и классификации. В этих классификациях случайным явлениям, как правило, отводится небольшое место [Бочарников, 2001].

Для учета неопределенности реальных событий, процессов и полей используют различные подходы. Часто применяют многопараметрические стохастические модели, описываемые многомерными характеристиками.

Один из наиболее распространенных подходов — использование случайных нестационарных процессов и неоднородных полей. Другой подход — введение в модель дополнительных элементов неопределенности неслучайного типа [Леман, 1971, Королюк и др., 1985, Левин, 1976, Теория обнаружения сигналов, 1984, Ван Трис, 1972, 1975, 1977, Хьюбер, 1984, Кнопов, 1981, Кравцов, 2003 и др.].

Эти и другие подходы дают неплохие результаты при решении ряда задач, однако не решают проблему в целом.

Стремление найти универсальные и эффективные средства учета статистической неустойчивости и неопределенности играло, по всей видимости, не последнюю роль при формировании ряда относительно новых теорий, таких как теория нечетких множеств [Заде, 1976, Zadeh L.A., Kacprzyk, 1992, Дюбуа, Прад, 1990, Кофман, 1982, Орловский, 1981, Бочарников, 2001], теория интервального анализа [Канторович, 1962, Шокин, 1981, Шарый, 2010, Алефельд, Херцбергер, 1987, Moore, 1966, Sunaga, 1958, Neumaier, 1990], различные теории неопределенности, субъективных и интервальных вероятностей, интервальной статистики [Иваненко, Лабковский, 1990, Kyburg, 1998 — 2000, Walley, 1991, Кунцевич, 2006, Орлов, 2002, 2006, Вощинин, Сотиров, 1989, Kreinovich, 2005, Кузнецов, 1991 и др.], теория динамического хаоса [Crownover, 1995, Sharkovsky, Romanenko, 2005, Пригожин, Стенгерс, 2009, Гринченко и др., 2005], бутстреп-анализа [Эфрон, 1988] и пр.[3]

[3] Среди перечисленных теорий особо хотелось бы отметить практически неизвестную широкой научной общественности интервально-статистическую теорию В.П. Кузнецова [Кузнецов, 1991]. Эта теория, альтернативная классической теории вероятностей и математической статистики, базируется на оригинальной системе аксиом средних и использует в качестве исходных структурных элементов интервальные статистические средние множества числовых признаков.

К числу таких теорий можно отнести и физико-математическую теорию гиперслучайных явлений.

Гиперслучайные явления. Под *гиперслучайным явлением* подразумевается семейство случайных событий, величин или функций, зависящих от параметра $g \in G$, который рассматривается как независимая переменная и ассоциируется со статистическими условиями наблюдения (или условиями формирования) рассматриваемого математического объекта.

Гиперслучайное событие можно описать с помощью тетрады $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — борелевское поле, G — множество условий $g \in G$, P_g — вероятностная мера подмножеств событий, зависящая от условия g. Таким образом, вероятностная мера задается для всех подмножеств событий и всех возможных условий $g \in G$. Мера же для условий $g \in G$ остается не определенной.

Используя статистический подход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N не стабилизируется и при $N \to \infty$ не имеет предела. В данном случае свойством статистической устойчивости обладает не частота события, а *границы диапазона ее изменения.*

Гиперслучайное явление — это обобщение понятия случайного явления. Поэтому случайные события, величины и функции могут рассматриваться как вырожденные гиперслучайные явления.

Случайное явление исчерпывающе описывается вероятностным распределением, а гиперслучайное явление — множеством условных вероятностных распределений.

Случайная величина X, например, полностью характеризуется функцией распределения $F(x)$, а гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ — множеством условных функций распределения $F(x / g)$, $g \in G$.

Случайная величина может быть представлена своими моментами или другими параметрами. В общем случае они неоднозначно определяют функцию распределения. Однако, несмотря на это, при использовании этих параметров всегда предполагают, что хотя закон распределения рассматриваемой случайной величины полностью неизвестен, он все же существует.

Гиперслучайная величина может быть представлена не только множеством условных функций распределения, но и другими характеристиками и параметрами, в частности верхней $F_S(x) = \sup_{g \in G} F(x/g)$ и нижней $F_I(x) = \inf_{g \in G} F(x/g)$ границами функции распределения, центральными и нецентральными моментами этих границ, границами моментов и др. Эти характеристики и параметры неоднозначно описывают гиперслучайную величину. Однако, несмотря на это, при рассмотрении гиперслучайной величины всегда исходят из того, что существует множество условных функций распределений, описывающих рассматриваемую гиперслучайную величину, и это множество фиксировано.

Заметим, что случайную величину можно интерпретировать как гиперслучайную величину, у которой границы функции распределения совпадают: $F_S(x) = F_I(x) = F(x)$.

Детерминированную величину x_0 приближенно можно рассматривать как вырожденный случай случайной (или гиперслучайной) величины с функцией распределения $F(x)$, имеющей единичный скачок в точке x_0.

Интервальная величина, характеризуемая границами интервала x_1, x_2, может быть представлена гиперслучайной величиной, у которой границы функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$ имеют единичные скачки соответственно в точках x_1 и x_2.

При устремлении точки x_1 к минус бесконечности, а x_2 — к плюс бесконечности интервальная величина $[x_1, x_2]$ стремится к полностью неопределенной величине, которую можно рассматривать как «хаотическую».

Таким образом, гиперслучайная величина является обобщением понятий детерминированной, случайной и интервальной величин. Благодаря такой универсальности с помощью гиперслучайных моделей можно моделировать разнообразные физические явления, обладающие разной степенью неопределенности.

Уместно будет обратить внимание еще на одно важное обстоятельство: в теории гиперслучайных явлений, как и в теории вероятностей, детерминизм полностью не изжит. Сдав прежние позиции, которые занимал в классической теории вероятностей, он переместился на уровень условных функций распределения, границ функций распределения, границ моментов и других характеристик и величин, рассматриваемых в рамках теории гиперслучайных величин как детерминированные.

Общая характеристика теории гиперслучайных явлений. Объект исследования теории гиперслучайных явлений составляют реальные физические явления — события, величины, процессы и поля, а предмет исследования — *нарушения статистической устойчивости их характеристик и параметров*.

Теория гиперслучайных явлений имеет математическую и физическую составляющие. Математическая часть базируется на классических аксиомах теории вероятностей, физическая — на *гиперслучайных гипотезах*: *гипотезе ограниченной статистической устойчивости* реальных событий, величин, процессов и полей и *гипотезе адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями*.

Предполагается, что гиперслучайные гипотезы справедливы для широкого круга массовых физических явлений. Тем самым принимается *концепция устройства мира на гиперслучайных принципах*. Основополагающая роль в ней отводится не идеальной, как в концепции устройства мира на случайных принципах, а *ограниченной статистической устойчивости*.

Главными структурными элементами математической части новой теории являются не абсолютно статистически устойчивые объекты — случайные события, величины и функции, используемые в классической теории вероятностей и математической статистике, а *объекты с ограниченной статистической устойчивостью* — гиперслучайные события, величины и функции.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений сформирована по классической схеме построения теории вероятностей и математической статистики. Схема построения физической части теории гиперслучайных явлений более специфична.

Поскольку теория гиперслучайных явлений использует систему математических аксиом теории вероятностей, с математической точки зрения она представляет собой ветвь теории вероятностей. С физической точки зрения теория гиперслучайных явлений — новая физическая теория, базирующаяся на новых физических гипотезах, позволяющих взглянуть на окружающий мир под новым углом зрения и обеспечивающая новую его трактовку.

Поэтому в целом теория гиперслучайных явлений — новая физико-математическая теория, предоставляющая новые возможности познания мира.

Потенциальные возможности теории гиперслучайных явлений. Не следует как переоценивать, так и недооценивать возможности этой теории.

Большинство теорий, в особенности математических, формируются конструктивно на основе других теорий с сохранением исходной аксиоматической базы путем введения новых обобщающих объектов и установления правил работы с ними. Таковыми являются, например, теория случайных функций, теория матриц, тензорного исчисления, операторных методов и многие другие. К их числу относится и математическая часть теории гиперслучайных явлений, базирующаяся на классической теории вероятностей.

Особенностью этих теорий является то, что решения любой задачи, полученные с их помощью и с помощью порождающих их теорий, эквивалентны. Поэтому от математической части теории гиперслучайных явлений нельзя ожидать каких-либо результатов, которые потенциально не могут быть получены в рамках классической теории вероятностей.

Ценность теорий, построенных конструктивным путем (в том числе теории гиперслучайных явлений), состоит в том, что они, благодаря использованию обобщающих понятий, позволяют взглянуть на решаемые задачи с более общих позиций и уловить закономерности и особенности исследуемых явлений, которые на уровне порождающих теорий были скрыты громоздкостью рассуждений и выкладок. В результате процедура решения некоторых задач существенно упрощается, а само решение удается представить в компактном виде.

Эффективность применения таких теорий на практике определяется степенью адекватности описания явлений реального мира с помощью их структурных элементов. Впечатляющие успехи теории матриц или, например, математического анализа обусловлены в первую очередь тем, что многие реальные физические явления адекватно представляются матричными и непрерывными моделями.

Теория гиперслучайных явлений учитывает с помощью гиперслучайных моделей одну из основных особенностей реального физического мира, игнорируемую классической теорией вероятностей, — ограниченность статистической устойчивости. Это делает новую теорию эффективным инструментом решения задач, в которых нарушения статистической устойчивости играют существенную роль.

Для иллюстрации открывающихся возможностей рассмотрим проблему измерения физических величин.

Проблема измерения физических величин. При построении физических моделей измерений, как правило, предполагают, что величины, подлежащие измерению, носят детерминированный, а их оценки — случайный характер. Поэтому для математического описания измеряемых величин обычно используют детерминированные математические модели, а для описания их оценок — случайные (стохастические) модели с определенными законами распределения. На этом построена вся современная теория измерений, являющаяся теоретической базой прикладной метрологии.

Допущения о детерминированном характере измеряемой величины и случайном характере оценки зачастую вполне обоснованы, но не всегда.

Представление реальных явлений гиперслучайными моделями. Принимаемые в теории гиперслучайных явлений гипотезы гиперслучайности касаются различных реальных явлений, в том числе величин, функций и полей, подлежащих измерению, действующих помех, а также погрешностей измерения.

В обеих широко распространенных в настоящее время теориях измерений (основанных на концепции погрешности [Тюрин, 1973] и концепции неопределенности [Руководство по выражению неопределенности измерений, 1999]) предполагается, что отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины носит исключительно случайный характер.

В рамках концепции погрешности рассматриваются две составляющие: систематическая и случайная, введенные еще Галилео Галилеем [Галилей, 1948].

Под систематической составляющей подразумевается часть погрешности, не меняющаяся от измерения к измерению или изменяющаяся по известному закону. Под случайной составляющей понимается изменяемая часть погрешности, имеющая случайный характер и описываемая определенным законом распределения. При устремлении объема выборки к бесконечности случайная составляющая стремится к нулю и в целом погрешность стремится к систематической составляющей.

В рамках гиперслучайной парадигмы погрешность носит гиперслучайный характер и описывается гиперслучайной величиной.

В общем случае выделить в гиперслучайной погрешности отдельные составляющие не удается. В одном из простейших случаев, когда границы функции распределения гиперслучайной погрешности отличаются друг от друга только математическими ожиданиями границ, погрешность можно разделить на систематическую, случайную *и неопределенную* (*непрогнозируемую*). Неопределенная составляющая, подобно случайной, изменяется от опыта к опыту, но при этом, в отличие от последней, не подчиняется какому-либо закону распределения. Эту составляющую можно описать интервальной величиной.

В общем случае при устремлении объема выборки к бесконечности гиперслучайная погрешность стремится не к определенной систематической погрешности, а к сумме систематической и интервальной погрешностей.

Гиперслучайным характером погрешности можно объяснить многие известные, но долгое время остававшиеся непонятными факты, в частности, почему точность любых физических измерений ограничена, почему при использовании большого числа экспериментальных данных точность не зависит от объема данных и др.

Глобальным вопросом является вопрос о наличии предела познания мира. Из теории гиперслучайных явлений следует, что существует горизонт познания. Он определяется границами непредсказуемого (статистически непрогнозируемого) изменения физических явлений и условий их наблюдения. Ограничение в познании можно объяснить тем, что реальный мир — открытая система.

* * *

Структура монографии. Книга состоит из трех частей. Первая часть (с первой по четвертую главы) посвящена истокам теории гиперслучайных явлений, вторая (с пятой по тринадцатую главы) — математическим основам новой теории, третья (начиная с четырнадцатой главы) — ее физическим основам.

Ниже приведены аннотации глав.

Глава 1. Рассмотрены общие принципы построения научных теорий, формирования знаний и мировоззрения. Исследованы процессы мышления и познания мира. Обращено внимание на то, что все научные теории базируются на недоказуемых аксиомах, постулатах и гипотезах и важную роль в познании играет измерение. Проанализирована проблема построения адекватных оценок и моделей. Рассмотрена специфика физико-математических теорий. Акцентировано внимание на том, что каждая такая теория состоит из математической части, базирующейся на системе математических аксиом, и физической части, основанной на физических положениях-гипотезах.

Глава 2. Проанализированы физические и математические основы теории вероятностей. Показано, что математическая часть современной теории вероятностей базируется на общепризнанной колмогоровской теоретико-множественной аксиоматике, а физическая часть — на гипотезе статистической устойчивости частоты реальных событий или эквивалентной ей гипотезе адекватного описания физических явлений (событий, величин, процессов и полей) случайными (стохастическими) моделями. В рамках теории вероятностей полагается, что гипотеза статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений, т.е. принимается концепция устройства мира на случайных принципах. Кратко изложена история исследования феномена статистической устойчивости. Обсуждены условия, при которых возможны нарушения статистической устойчивости.

Глава 3. Формализовано понятие статистической устойчивости для последовательности случайных величин и случайного процесса. Установлено, что нарушение статистической устойчивости не противоречит закону больших чисел. При нарушении статистической устойчивости выборочное среднее и среднее математических ожиданий не имеют пределов. Однако разность между выборочным средним и средним математических ожиданий стремится к нулю при неограниченном увеличении объема выборки. Выяснено, что статистически неустойчивые процессы — особый класс нестационарных процессов. На основе аналитических исследований и компьютерного моделирования выдвинута гипотеза, что причиной нарушения статистической устойчивости физических процессов на ограниченном интервале наблюдения являются сверхнизкочастотные колебания среднего [4]. Предложены параметры, характеризующие нарушения статистической устойчивости случайного процесса на конечном интервале наблюдения.

Глава 4. Проведены экспериментальные исследования ряда физических процессов и величин на предмет их статистической устойчивости, в том числе исследования динамики изменения спектров собственных шумов усилителя, спектров гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют. Установлено, что на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости не обнаруживаются, однако на больших интервалах наблюдения все они оказываются статистически неустойчивыми. Тот факт, что исследования статистической устойчивости совершенно разных физических явлений приводят к одному и тому же выводу, позволяет предположить, что нарушение статистической устойчивости присуще многим, если не всем, реальным физическим явлениям.

Глава 5. Введено понятие гиперслучайного события. Для описания гиперслучайного события использованы условные вероятности и границы вероятностей. Исследованы свойства этих параметров.

Глава 6. Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие исчерпывающее описание гиперслучайной величины), границы функции распределения и их моменты, а также границы моментов. Исследованы свойства этих характеристик и параметров.

Глава 7. Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Методы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Исследованы свойства характеристик и параметров векторных гиперслучайных величин.

Глава 8. Определено понятие скалярной гиперслучайной функции. Рассмотрены различные способы ее представления.

[4] Недавние исследования [Горбань, 2011] показали, что нарушение статистической устойчивости вызывают и другие причины.

Для описания использованы условные функции распределения (дающие наиболее полную характеристику гиперслучайной функции), а также границы функции распределения, плотности распределения границ, моменты границ и границы моментов.

Глава 9. Введены понятия векторной гиперслучайной функции, гиперслучайного функционала и гиперслучайного оператора. Рассмотрены различные способы описания этих математических объектов. Исследованы свойства их характеристик и параметров.

Глава 10. Введены понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

Глава 11. Формализованы понятия стационарности и эргодичности гиперслучайных функций. Рассмотрены спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций. Исследованы свойства стационарных и эргодических гиперслучайных функций.

Глава 12. Понятие марковского случайного процесса обобщено на случай гиперслучайного процесса. Для гиперслучайного марковского процесса получены уравнения, аналогичные известным уравнениям Колмогорова для случайного марковского процесса. В качестве примеров рассмотрены винеровский и гауссовский гиперслучайные марковские процессы.

Глава 13. Проанализированы известные способы представления гиперслучайных величин и процессов на предмет целесообразности их применения при описании различных типов преобразований. Получены соотношения, связывающие характеристики и параметры преобразованных и исходных гиперслучайных величин и процессов. Даны рекомендации по использованию различных способов описания гиперслучайных величин при линейных и нелинейных преобразованиях, а также гиперслучайных процессов при безынерционных и инерционных преобразованиях.

Глава 14. Сформулированы основные физические гипотезы теории гиперслучайных явлений, обеспечивающие корректное ее использование на практике: гипотеза ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений и гипотеза адекватного описания физических явлений гиперслучайными моделями. Рассмотрена концепция гиперслучайного устройства мира. Сопоставлены гиперслучайные и случайные модели. Очерчены области их практического применения.

Глава 15. Формализовано понятие гиперслучайной выборки и определены ее свойства. Описана методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины. Исследована сходимость гиперслучайных оценок к соответствующим точным характеристикам.

Глава 16. Сформулирован закон больших чисел для гиперслучайных величин, определяющий условия сходимости границ выборочного среднего гиперслучайной величины. Доказана для гиперслучайных событий теорема, аналогичная теореме Бернулли для случайных событий.

Глава 17. Доказана центральная предельная теорема для гиперслучайных величин, аналогичная центральной предельной теореме для случайных величин.

Глава 18. Описаны различные модели измерения физических величин. Исследована детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок — понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Показано, что из-за неконтролируемой изменчивости условий наблюдения гиперслучайные оценки детерминированных величин не состоятельны, а точность измерения — ограничена.

Глава 19. Рассмотрена гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем и частных случаях. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

Глава 20. Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

Глава 21. Результаты, полученные для гиперслучайных оценок детерминированных и гиперслучайных величин, обобщены на случай гиперслучайных оценок гиперслучайных функций. Обосновано предположение, что все реальные оценки физических процессов не состоятельны, а точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена.

В **Приложение** вынесены высказывания известных ученых по поводу феномена статистической устойчивости.

В **список литературы** включены работы отечественных и зарубежных авторов, использованные при написании монографии.

ЧАСТЬ I

ИСТОКИ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Глава 1

ПРИНЦИПЫ ПОЗНАНИЯ МИРА

Рассмотрены общие принципы построения научных теорий, формирования знаний и мировоззрения. Исследованы процессы мышления и познания мира. Обращено внимание на то, что все научные теории базируются на недоказуемых аксиомах, постулатах и гипотезах и важную роль в познании играет измерение. Проанализирована проблема построения адекватных оценок и моделей. Рассмотрена специфика физико-математических теорий. Акцентировано внимание на том, что каждая такая теория состоит из математической части, базирующейся на системе математических аксиом, и физической части, основанной на физических положениях-гипотезах.

1.1. ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ТЕОРИЙ

Вопросы о том, как устроен наш мир, как человек познает его, что представляет собой процесс познания, существуют ли границы познания, волновали человечество издавна. Найти исчерпывающие ответы на эти вопросы, скорее всего, никогда не удастся. Здесь мы сталкиваемся с известной в философии проблемой принципиальной недоказуемости справедливости любой теории естествознания.

В основе всех естественных наук лежат хорошо согласующиеся с экспериментальными данными положения, которые невозможно ни доказать, ни объяснить. Эти положения принимаются на веру и возводятся в ранг абсолютных истин, остающихся таковыми до тех пор, пока не произойдет их переоценка. По терминологии, принятой в философии науки, они носят название фундаментальных абстрактных объектов [Степин, 1999].

Примером таких положений служат законы классической механики Ньютона, долгое время считавшиеся абсолютными истинами, точно описывающими реальный мир. Но обнаруженные на рубеже XIX—XX веков несоответствия результатов ряда опытов этим положениям поколебали существующие представления и привели к формированию новых законов, составивших основу квантовой механики и теории относительности Эйнштейна.

Недоказуемые положения лежат в основе не только естественных наук. Даже математика, претендующая на абсолютную строгость, содержит недоказуемые элементы — аксиомы и постулаты.

Использование постулатов систематизирует знания и облегчает формирование строгих умозаключений. «Метод постулирования, — с юмором отмечал Бертран Рассел [Литлвуд, 1962, с. 67], — имеет много преимуществ, совпадающих с теми, которые присущи воровству по сравнению с честным трудом».

Как ни странно кажется на первый взгляд, основой познания мира служат согласующиеся с опытными данными, но недоказуемые и принимаемые на веру положения-гипотезы. Они образуют аксиоматический базис теорий.

Здесь уместно напомнить слова Макса Планка: «Но не следует думать, что можно даже с самой точной из всех естественных наук продвинуться вперед без всякого миросозерцания, т.е. без недоказуемых гипотез. Для физики также имеет силу изречение, что нет спасения без веры, по крайней мере, без веры в некоторую реальность. Только эта твердая вера и указывает путь творческому стремлению, только она дает точку опоры продвигающейся ощупью фантазии, только она в состоянии всякий раз ободрить мысль, усталую от неудач, и снова воодушевить ее. Исследователь, который не руководится в своих работах какой-либо гипотезой, хотя бы осторожной и предварительной, тем самым заранее отказывается от более глубокого понимания своих собственных результатов» [Планк, 1966, с. 82, 83].

К системе базисных гипотез предъявляются те же требования, что и к системам аксиом, используемым в математике, — непротиворечивость и взаимная независимость. От гипотез естествознания требуется, кроме того, согласованность с опытными данными.

Об этом Макс Планк говорил так: «Правда, одной веры недостаточно. Как показывает история науки, она часто может быть причиной заблуждений, ограниченности и фанатизма. Для того чтобы она оставалась надежным путеводителем, ее необходимо постоянно проверять законами мышления и опытом» [Планк, 1966, с. 83].

Гипотезы естествознания могут быть общего характера, например, что в основе устройства мироздания лежат случайные принципы и поэтому мир хорошо описывается случайными моделями (в настоящее время эта гипотеза широко распространена), или более конкретными, например, что мир описывается законами Ньютона или Эйнштейна.

Замена реальных объектов, отношений и операций определенными моделями, основанными на принимаемых гипотезах, существенно упрощает процесс познания и обеспечивает стабильную платформу для изучения мира, но, вместе с тем, создает непреодолимые (в рамках принятой системы гипотез) препятствия для проникновения в суть физических явлений. Отбрасывание несущественных, как нам представляется, нюансов реальности ведет к потере понимания сущности мира.

Складывается парадоксальная ситуация: без систем базовых гипотез невозможно познание, но наличие таких систем сдерживает понимание основ мироздания.

Ограничивая свои воззрения на мир определенными гипотезами, которые считаем справедливыми, мы отметаем все, что не вписывается в установленные рамки. Однако рано или поздно приходим к пониманию, что принятые гипотезы имеют ограниченную область применения и нуждаются в пересмотре. Мир значительно сложнее, чем мы пытаемся его представить. Наши гипотезы — лишь предположения, позволяющие построить упрощенные модели, приближенно описывающие реальный мир.

Множество результатов исследований реального явления на базе независимых систем базовых гипотез можно рассматривать как совокупность его проекций на разные абстрактные плоскости. Чем больше систем гипотез и построенных на их основе теорий, тем больше проекций, тем глубже возможно познание мира. Появление новых теорий, позволяющих взглянуть на известные факты под новым углом зрения, обеспечивает развитие науки.

В рамках фиксированного набора гипотез наука развивается экстенсивно. Для интенсивного ее развития необходима разработка новых альтернативных гипотез и теорий. Без них прогресс человечества немыслим.

Основой любой теории являются модели.

1.2. МОДЕЛИ

1.2.1. Неформализованные модели

Окружающий мир представляет собой сложную систему, содержащую бесчисленное множество взаимосвязанных элементов — объектов. Каждый объект характеризуется бесконечным числом свойств, определяющих его особенности. Отдельные свойства разных объектов могут совпадать или быть близкими по определенному критерию. Объекты с одинаковыми или близкими свойствами группируются в нашем сознании в классы *подобных объектов*.

Каждый объект может входить в состав нескольких классов. Классы могут входить в состав других классов. Свойства, присущие подобным объектам класса, рассматриваются как *закономерности*.

Закономерности тоже являются объектами. Как и другие объекты, они могут образовывать классы. Закономерности определяют специфические особенности связей объектов, входящих в класс, с объектами этого же класса и с объектами других классов.

Классами, например, являются множество всех физических объектов, подчиняющихся законам классической механики, все законы механики, предметы, размер которых меньше или больше определенной величины, растения или животные определенного вида, люди определенной национальности, веры, расы или возрастной категории, жители одной страны и т.д.

Систематизация (формирование системы взаимосвязанных классов объектов) и *классификация* (распределение объектов по классам) — краеугольные камни познания мира. Они включают выявление новых объектов, исследование и описание их свойств, пополнение известных классов новыми объектами, образование новых классов и изъятие из системы устаревших классов.

В результате систематизации и классификации в сознании человека формируются *неформализованные модели*, дающие интегральное представление о классах подобных объектов.

Неформализованные модели не идентичны рассматриваемым объектам, так как несут информацию о множестве подобных объектов, входящих в классы, и являются их осредненными образами.

Каждый новый объект человек пытается отнести, как правило, подсознательно к разным неформализованным моделям. Модели, к которым этот объект наиболее подходит, ассоциируются с объектом и, наоборот, объект ассоциируется с этими моделями. В результате формируется множество неформализованных моделей, совокупность которых воспринимается человеком как некий интегральный образ объекта. Множество таких образов разных объектов создает субъективное представление человека о мире.

Окружающий мир постоянно меняется, изменяются объекты и их модели. Изменение моделей обусловлено не только изменением самих объектов, но и изменением критериев классификации. Существенную роль при выборе критерия играют приобретенный ранее опыт, окружающая среда и многие другие факторы.

Люди различаются между собой и различаются условия их жизни. Поэтому для разных людей разными оказываются неформализованные модели одних и тех же объектов и представления о мире.

Реальные объекты воспринимаются человеком с помощью органов чувств в форме оценок, которые тоже можно рассматривать как объекты.

Оценка зависит от множества субъективных и объективных факторов (условий). Оценка отличается от реального объекта. Отличие вызвано, во-первых, несовершенством наших органов чувств и средств наблюдения, а во-вторых, наличием различных помех. При изменении условий (например, ухудшении зрения, использовании более или менее совершенных средств наблюдения, изменении характеристик помехи и др.) оценка меняется.

Модель и оценка — разные понятия. Если модель объекта — обобщенное представление о совокупности подобных объектов, то оценка — более или менее искаженное представление об одном объекте.

По совокупности оценок строится усредненная оценка и модель оценки.

Множество разных оценок, относящихся к одному и тому же объекту или различным объектам определенного класса, порождает в сознании человека *неформализованную модель оценки*. Эта модель, как и модель объекта, постоянно меняется. Изменения вызываются изменением объектов, оценок и критериев классификации объектов и их оценок.

Неформализованные модели оценок являются базой для формирования неформализованных моделей объектов.

Неформализованные модели объектов и неформализованные модели оценок — разные категории. Однако в сознании людей они обычно отождествляются.

1.2.2. Физические и математические модели

Неформализованные модели объектов и оценок можно формализовать с помощью *физических моделей*, учитывающих наиболее существенные их особенности, и описать *математическими моделями*.

Для каждой совокупности реальных объектов и совокупности оценок можно построить множество разных физических моделей. Каждая физическая модель может быть описана по-разному множеством разных математических моделей.

На этапе формализации часть объектов, входящих в рассматриваемый класс объектов, может не описываться физической моделью. Вместе с тем в нее могут быть включены объекты, не входящие в рассматриваемый класс. При построении математической модели, как правило, все объекты рассматриваемого класса, попавшие в физическую модель, описываются математической моделью.

На рис. 1.1 схематично изображены подобные объекты одного класса, их оценки, рассматриваемый объект x, его оценка x^*, модели объекта (неформализованная N_x, физическая P_x и математическая M_x), а также модели оценки (неформализованная N_{x^*}, физическая P_{x^*} и математическая M_{x^*}).

Существует множество критериев классификации математических моделей. Часто прибегают к формальной классификации, основанной на классификации используемых математических средств, например, различают модели линейные и нелинейные, сосредоточенные и распределенные, детерминированные и стохастические, дискретные и непрерывные и т.д. [Математическое моделирование].

Используют также классификацию по способу представления объекта, выделяя при этом структурные и функциональные модели [Мышкис А.Д., 2007]. Первые представляют изучаемый объект в виде системы, имеющей определенную структуру и алгоритм работы, а вторые — в виде «черного ящика», для которого важны лишь внешние параметры и характеристики.

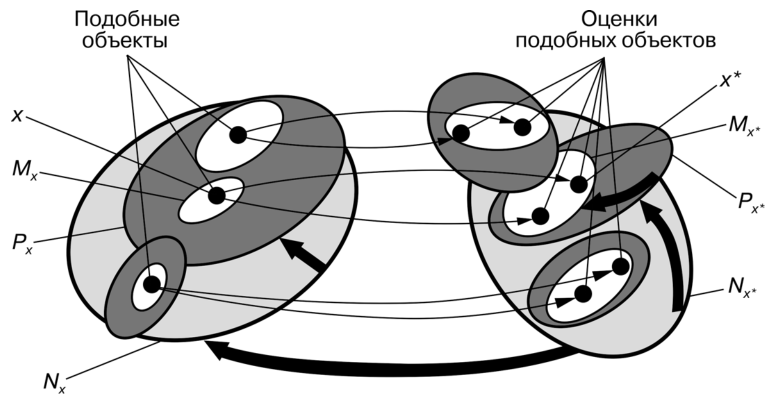


Рис. 1.1. Схема формирования моделей и оценок

Интересна содержательная классификация Р. Пайерлса, выделяющая следующие семь типов моделей [Пайерлс Р.Э., 1983]:

1. Гипотеза (такое могло бы быть).
2. Феноменологическая модель (ведем себя так, как если бы...).
3. Приближение (что-то считаем очень малым или очень большим).
4. Упрощение (опустим для ясности некоторые детали).
5. Эвристическая модель (количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела).
6. Аналогия (учтем только некоторые особенности).
7. Мысленный эксперимент (главное состоит в опровержении возможности).

1.3. ФОРМИРОВАНИЕ ЗНАНИЙ

Знание — совокупность сведений в какой-нибудь области [Ожегов, 1960].

За прошедшие тысячелетия развития цивилизации человечеством накоплен колоссальный объем знаний об окружающем мире. Темп поступления новой информации постоянно возрастает. Ориентироваться в ее потоке становится все более и более трудно. На помощь приходит отработанный природой механизм систематизации, классификации и обобщения данных о подобных объектах.

Знания человека — не просто совокупность разрозненных сведений, а система взаимосвязанных систематизированных, классифицированных и обобщенных данных — моделей.

Возможности человека по восприятию и переработке информации ограничены. Механизм познания мира с помощью моделей защищает человеческий организм от информационной перегрузки.

Знания человечества формируются на основе знаний отдельных личностей путем коллективной систематизации, классификации и обобщения знаний отдельных индивидуумов.

Знания личности и человечества состоят из формализованных и неформализованных моделей. Модели в области точных наук в основном формализованы, а касающиеся гуманитарной области — неформализованные.

1.4. МИРОВОЗЗРЕНИЕ И МЫШЛЕНИЕ

Представления человека об окружающем мире, его *мировоззрение* — ни что иное, как совокупность моделей, образующих знания, и личная (субъективная) оценка этих моделей по множеству критериев (опасности, достоверности, важности, новизны, соответствия определенным нормам и пр.).

Заметим, что *оценки моделей* и *модели оценок* совершенно разные категории. Если критерии зависимы, то оценки по разным критериям взаимосвязаны. Знания и субъективные оценки разных людей в определенной предметной области, несмотря на индивидуальность личности, могут быть схожими. Люди с одинаковыми взглядами на жизнь, общими интересами, одной религии, принадлежащие одному этносу, получившие одинаковое образование — все это люди с подобными моделями и схожими субъективными оценками моделей по множеству разных критериев. Оценки моделей отдельных субъектов служат основой формирования коллективных оценок.

Модели и оценки (субъективные и коллективные) — относительно устойчивые формирования, медленно изменяющиеся во времени под воздействием внешних факторов. Поэтому мировоззрение можно рассматривать как систему относительно устойчивых моделей с относительно устойчивыми оценками.

Модели имеют разный уровень обобщения. На основе имеющихся моделей низкого уровня возможно создание производных моделей более высокого уровня.

Модели можно разделить на два класса: модели структурных элементов и связи между ними. Последние представляют модели реальных закономерностей природы.

Синтез новых моделей структурных элементов, установление новых связей, формирование новых оценок и их пересмотр составляют суть мышления.

Как ни парадоксально кажется на первый взгляд, именно благодаря устойчивости моделей структурных элементов, связей между ними и их оценок оказывается возможным создание производных моделей структурных элементов, установление новых связей, формирование новых оценок и их пересмотр.

Процесс мышления зависит от степени устойчивости исходных знаний: чем она выше, тем большее количество уровней производных моделей структурных элементов, связей и оценок может быть сформировано.

Судя по результатам целого ряда биологических исследований, человек существенно уступает многим животным по способности восприятия, переработки информации и оперативного запоминания (т.е. по способности формировать исходные модели), однако благодаря определенному «консерватизму» (инерционности мышления) значительно превосходит их по способности устанавливать связи между моделями структурных элементов и синтезировать производные модели.

Со временем под воздействием различных факторов модели структурных элементов, связи между ними и оценки изменяются. Создаются новые модели структурных элементов, новые связи и новые критерии их оценки. Происходит уточнение и исключение устаревших и невостребованных элементов, замена старых элементов на новые, формирование оценок и их пересмотр.

1.5. ПОЗНАНИЕ МИРА

Познание — процесс приобретения знаний и постижения закономерностей объективного мира [Ожегов, 1960]. Познание мира (личностью и человечеством) можно разделить на два этапа:

- формирование исходных знаний (исходной совокупности моделей) и оценок,
- актуализация (обновление, уточнение) имеющихся знаний и оценок.

Рис. 1.2. Схема формирования знаний

На первоначальном этапе особую роль играют неформализованные модели, в дальнейшем — как неформализованные, так и формализованные. По мере развития личности и человечества все более и более значимую роль, по всей видимости, приобретают формализованные модели.

Оба этапа познания мира представляют собой обучение. Обучение личности может проходить без посторонней или с посторонней помощью. Способы передачи знаний от субъекта к субъекту разные: путем прямого общения субъектов или опосредственно с использованием вспомогательных средств (книг, видеотехники и компьютеров, Интернета и пр.), обеспечивающих запись, хранение, иногда переработку и воспроизведение информации. Описанная модель формирования знаний схематично приведена на рис. 1.2.

Познание — сложный многоплановый процесс, требующий формирования оценок, построения моделей, сравнения, сопоставления, систематизации, классификации, обнаружения и целого ряда других действий, в основе которых лежит процедура измерения.

1.6. ИЗМЕРЕНИЕ

1.6.1. Метрические пространства

Все неформализованные, физические и математические модели объектов и оценок представляют собой объекты. Для количественной характеристики расстояния между объектами необходимо введение *метрического пространства* — множества S, для произвольных элементов x, y которого определена вещественная функция $\mu(x, y)$ (*метрика* или *расстояние*), удовлетворяющая следующим постулатам: $\mu(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; $\mu(x, y) \le \mu(z, x) + \mu(z, y)$ (неравенство треугольника), где x, y, z — произвольные элементы множества S. Метрика — неотрицательная величина и $\mu(x, y) = \mu(y, x)$.

Известно, что не для любого множества можно построить метрическое пространство. Например, для множества действительных функций, определенных на конечном интервале, построение метрического пространства невозможно. Поэтому нельзя построить метрическое пространство, включающее модель реального объекта и модели всех потенциально возможных его оценок. Сузив класс рассматриваемых функций, например, до непрерывных действительных функций, можно построить метрическое пространство. В этом случае для всех математических объектов, описываемых такими функциями, можно определить расстояние.

На одном и том же множестве S разные метрики порождают разные метрические пространства. Вариационный ряд расстояний между конкретными элементами $x, y, z, \ldots$ зависит от метрики. Поэтому в двух разных метрических пространствах, построенных на одном и том же множестве, включающем модель реального объекта и модели его оценок, к модели реального объекта наиболее близко расположенными могут оказаться разные модели оценок.

Возможно существование целого класса метрических пространств, заданных на одном и том же множестве, для которых наиболее близкой оказывается одна и та же модель оценки. Вве-

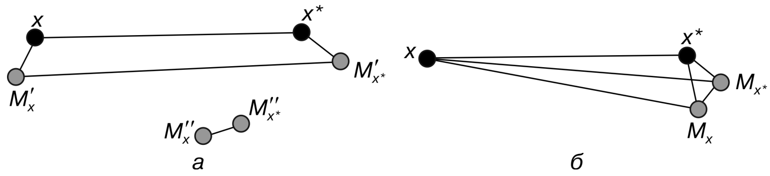


Рис. 1.3. Взаимное расположение объекта, оценки и их моделей

дением метрики устанавливается эталонная величина (некая условная единица), с которой сравнивается расстояние. В метрологии используется, обычно, евклидова метрика.

1.6.2. Расстояние

Близость моделей M'_x, M'_{x^*} к соответствующим объектам ($\mu(x, M'_x) \sim 0$, $\mu(x^*, M'_{x^*}) \sim 0$) так же, как и близость модели оценки M''_{x^*} к модели реального объекта M''_x ($\mu(M''_x, M''_{x^*}) \sim 0$), не гарантирует, что оценка и ее модель близки к реальному объекту (рис. 1.3, *а*). Оценка x^*, модель оценки M_{x^*} и модель объекта M_x могут находиться на небольшом расстоянии друг от друга, однако вдали от самого объекта x (рис. 1.3, *б*).

На практике для подтверждения адекватности теории часто прибегают к проверке близости теоретических результатов к экспериментальным данным. Следует обратить внимание на то, что малое различие результатов, обычно рассматриваемое как неоспоримый довод верности теории, в действительности не является таковым. Экспериментальный результат представляет собой оценку, а теоретический результат — модель другой оценки. Близость этих результатов свидетельствует лишь о том, что они мало различаются между собой, но не о близости их к реальному объекту. Вопрос об адекватности модели остается открытым до тех пор, пока не установлен факт близости экспериментального результата к исследуемому объекту.

1.6.3. Проблема построения адекватных оценок и моделей

Истинная (неискаженная) информация о реальном объекте x недоступна. Поэтому невозможно установить степень близости к объекту ни оценки x^*, ни модели оценки M_{x^*}, ни модели объекта M_x.

Вследствие этого задача построения адекватных оценок и моделей не имеет точного решения. В дальнейшем под *адекватными* подразумеваются *оценки* и *модели*, находящиеся в окрестности рассматриваемого объекта.

Совпадение оценки, модели оценки или модели объекта с соответствующим реальным объектом практически невозможно. Причин тому много. Среди наиболее существенных можно отметить следующие:

- учет при формировании физических моделей не всех факторов, определяющих состояние реального объекта и оценки;
- формирование модели объекта на основе модели оценки;
- несогласованное изменение состояния реального объекта и оценки;
- «отставание» физических моделей от текущего состояния объекта и оценки;
- «отставание» математических моделей от физических моделей;
- статистическая непредсказуемость поведения объекта и оценки;
- воздействие различных мешающих факторов (помех), приводящее к искажению оценки, модели оценки и модели реального объекта;
- статистическая непредсказуемость характеристик помех;
- несовершенство физических и математических моделей и др.

1.6.4. Погрешность измерения

Расстояние между оценкой и объектом (физической величиной, процессом, полем) представляет собой *погрешность измерения*. Погрешность обусловлена неадекватным восприятием исследуемого объекта, а также воздействием помех. Неадекватное восприятие может быть вызвано объективными и субъективными причинами. Помехи, как правило, связаны с объективными факторами.

Разный характер причин, вызывающих отличие оценки от реального объекта, требует разных подходов к учету и компенсации связанных с ними составляющих погрешности. Однако стратегия обычно применяется одна и та же: накопление данных и последующее их усреднение.

Компенсация неадекватного восприятия объекта, вызванного объективными причинами, базируется на формировании ряда оценок, полученных разными способами. Компенсация неадекватного восприятия, обусловленного субъективными причинами, — на многократной оценке объекта разными субъектами, а компенсация воздействия помех в статистически постоянных условиях — на множестве оценок, полученных в одних и тех же статистических условиях.

Результаты многократной оценки объекта разными способами и разными субъектами используются для построения усредненной оценки. Получаемая таким образом усредненная оценка, хотя и оказывается ближе к реальному объекту, чем большая часть исходных оценок, но все же не совпадает с реальным объектом. Обусловлено это не только тем, что объем данных всегда ограничен и способ усреднения, как правило, не оптимален. Главная причина в том, что не удается отследить все изменения характеристик исследуемого объекта и действующих помех.

1.6.5. Современные подходы к оценке точности измерений

Точность измерения — качественная категория, характеризуемая количественно *погрешностью* или *неопределенностью измерения.*

В метрологии для характеристики точности измерения в настоящее время применяются два подхода. Один из них основан на *концепции погрешности* измерения, другой — на *концепции неопределенности* измерения.

В рамках концепции погрешности, предложенной еще Галилео Галилеем [Галилей, 1948], рассматриваются систематическая и случайная погрешности.

Под *систематической* понимают *погрешность*, которая при многократном измерении остается постоянной или изменяется по определенному закону, а под *случайной* — погрешность, которая при повторных измерениях изменяется случайным образом [Тюрин, 1973].

Возникновение случайной погрешности обычно связывают со случайными временными и (или) пространственными изменениями влияющих величин, а систематическую погрешность — с отклонениями параметров или условий измерения от идеальных.

Случайную погрешность можно уменьшить путем статистической обработки результатов ряда измерений, систематическую ошибку, как правило, — путем учета тех или иных известных зависимостей результата измерений от параметров, влияющих на результат.

Если систематическая погрешность не меняется от измерения к измерению (этот факт, как правило, принимается по умолчанию, если не оговорено противное), то систематическая погрешность совпадает с математическим ожиданием суммарной погрешности. При этом математическое ожидание случайной погрешности оказывается равным нулю.

Погрешность оценки Θ^* измеряемой величины θ обычно характеризуют либо систематической погрешностью ε_0 (математическим ожиданием погрешности) и среднеквадратическим отклонением σ_{θ^*} оценки Θ^*, либо доверительным интервалом $I_\gamma(p) = [\Theta^* - \varepsilon_0 - \varepsilon, \Theta^* - \varepsilon_0 + \varepsilon]$, соответствующим определенной доверительной вероятности $\gamma = P(\left|\theta^* - \varepsilon_0 - \theta\right| \le \varepsilon)$ того, что абсолютное отклонение случайной величины $\Theta^* - \varepsilon_0$ от измеряемой величины θ не больше некоторой заданной величины ε.

В ряде случаев систематическая погрешность частично может быть скомпенсирована путем применения особых способов измерения, которые дают возможность без определения ее величины уменьшить ее влияние на конечный результат. Известен целый ряд таких способов: замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений и др. [Тюрин, 1973].

Идея компенсации систематической погрешности способом противопоставления может быть проиллюстрирована на примере взвешивания груза на равноплечих весах. Этот способ был предложен еще Гауссом.

Реальная длина плеч весов несколько отличается. Поэтому результат взвешивания P_1 не равен истинному весу груза P. Систематическую погрешность, вызванную разной длиной плеч, можно скомпенсировать путем повторного взвешивания груза, поменяв местами груз и гири. Нетрудно показать, что вес груза равен среднегеометрическому результатов двух взвешиваний: $P = \sqrt{P_1 P_2}$, где P_2 — результат повторного взвешивания.

Случайная погрешность может быть уменьшена путем многократного измерения и усреднения полученных данных.

В рамках концепции неопределенности рассматриваются два типа неопределенностей измерения: по типу А и по типу В.

Под *неопределенностью по типу* А подразумевают все составляющие неопределенности, оцениваемые путем применения статистических методов, а под *неопределенностью по типу* В — все составляющие, оцениваемые другими способами [Руководство по выражению неопределенности измерений, 1999].

Неопределенность измерения измеряемой величины θ характеризуется неопределенностью $u_{A\theta}$ по типу А, неопределенностью $u_{B\theta}$ по типу В, суммарной стандартной неопределенностью $u_\theta = \sqrt{u_{A\theta}^2 + u_{B\theta}^2}$ и расширенной неопределенностью $U_\theta = ku_\theta$ (где k — коэффициент охвата), которая в случае отсутствия компоненты $u_{B\theta}$ трактуется как неопределенность, соответствующая доверительной вероятности γ.

Деление погрешностей на случайные и систематические обусловлено природой их возникновения и проявления в ходе измерений, а деление неопределенностей по типам А и В — методами их расчета.

В настоящее время многие метрологи считают, что концепция неопределенности более прогрессивна, чем концепция погрешности. С таким мнением сложно согласиться. Представляется более правильной точка зрения, высказанная Б.В. Гнеденко в комментарии к шестой проблеме Гильберта [Проблемы Гильберта, 1969]: «... каждая естественнонаучная дисциплина имеет свой материальный объект исследования и ее содержание определяется природой тех реальных явлений, которые она изучает. Не метод исследования, а материальный предмет исследования является определяющим для каждой науки о природе».

Важно отметить, что, несмотря на различие подходов, обе концепции опираются на представлении о том, что погрешности измерения могут вызываться лишь детерминированными и случайными факторами. Другие типы факторов во внимание не принимаются. Эта достаточно ортодоксальная позиция нуждается, по всей видимости, в пересмотре. Об этом будет идти речь далее.

1.7. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Особый интерес представляют физико-математические теории. Формирование этих теорий обычно проходит в три этапа:

- накопление разрозненных материалов,
- обобщение накопленного материала,
- формализация теории.

Создание большинства известных физико-математических теорий продиктовано потребностью описания реального мира со все возрастающей точностью.

Так создавались, например, практически все разделы математической физики, теория вероятностей и многие другие теории. Первым шагом на этом пути является принятие физических гипотез, формализующих изучаемую реальность с помощью обобщенной физической модели. Следующий шаг — формализация физической модели математическими средствами с использованием математических аксиом.

Описанная схема формирования физико-математической теории не единственная. Известны теории (например, теория чисел, геометрии Римана и Лобачевского и др.), создаваемые вначале как абстрактные математические теории на базе математических аксиом и лишь потом нашедшие практическое применение.

Надо особо подчеркнуть, что любая математическая теория — абстрактная теория, описывающая некие идеальные (по Платону) сущности [Пенроуз, 2007]. Она остается таковой до тех пор, пока ее не начинают применять для решения практических задач.

Корректное использование математической теории в различных областях физики, техники, социальных науках и пр. возможно лишь при наличии экспериментальных данных, подтверждающих факт адекватного описания исследуемых явлений соответствующими математическими моделями.

В частности, для корректного использования в физике классического математического анализа необходимы данные об адекватном представлении рассматриваемых физических явлений непрерывными дифференцируемыми функциями, а для корректного использования теории вероятностей — данные, подтверждающие адекватность представления исследуемых физических событий, величин, процессов и полей случайными (стохастическими) моделями.

Задача построения математических моделей, полностью адекватных реальным физическим явлениям, не имеет точного решения. Даже если бы такие модели и существовали, строго доказать их адекватность было бы невозможно из-за ограниченной точности любых измерений.

Имея в своем распоряжении ряд опытных данных, можно оценить степень согласованности моделей с реальными объектами исследования. Какая бы ни использовалась при этом методика анализа, получить абсолютно точный ответ об адекватности моделей нельзя. Поэтому при достаточно высоком уровне согласованности моделей реальным данным приходится лишь довольствоваться принятием *гипотезы адекватности моделей*.

Аксиома адекватности — физическая гипотеза, обеспечивающая связь математических моделей с окружающей действительностью. Эта аксиома открывает возможность корректного применения математической теории на практике. Благодаря ей *математическая теория* приобретает новое качество: становится *физико-математической*.

К примеру, математическая теория вероятностей, базирующаяся на теоретико-множественных аксиомах Колмогорова, лишь после принятия дополнительной *гипотезы адекватного описания реальных явлений стохастическими моделями* и математический анализ лишь после принятия *гипотезы об адекватном описании физических явлений непрерывными дифференцируемыми функциями* становятся физико-математическими теориями.

Широкое применение той или иной математической теории на практике свидетельствует о признании, что окружающий мир или значительная его часть построены на принципах соответствующей аксиомы адекватности. В частности, повсеместное применение математического анализа в различных областях естествознания означает принятие гипотезы, что *физический мир* (во всяком случае, макромир) *непрерывен*, а повсеместное применение теории вероятностей — принятие гипотезы, что этот *мир носит случайный* (*стохастический*) *характер*.

Каким бы ни был реальный путь построения физико-математической теории, ее можно излагать, отталкиваясь как от абстрактных математических аксиом, так и от физических гипотез. Оба способа представления материала выглядят на первый взгляд эквивалентными. Однако это не совсем так.

Дело в том, что математическая интерпретация физической модели может быть осуществлена различными способами с использованием разных математических моделей, основанных на разных системах аксиом. Многозначность математических интерпретаций физической модели, зачастую несущественная с практической точки зрения, ставит перед математиками сложную задачу выбора среди возможных вариантов наилучшего.

Физическая же интерпретация математической модели, как правило, однозначна. В этом случае проблема выбора не стоит. Поэтому изложение физико-математических теорий часто начинается с математических основ, несмотря на то, что создавались эти теории в начале как прикладные.

Характерный пример — современная теория вероятностей с многочисленными ее прикладными разделами.

Эта теория формировалась на протяжении нескольких веков, в первую очередь, как инструмент решения практических задач. Физическая основа прослеживается в ней очень четко.

Однако, в настоящее время эта теория подается как математическая теория, имеющая определенную физическую интерпретацию.

Таким образом, как бы ни излагалась (представлялась) та или иная физико-математическая теория, в ее основе лежат как математические аксиомы, так и физические гипотезы.

Глава 2

ФЕНОМЕН СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Проанализированы физические и математические основы теории вероятностей. Показано, что математическая часть современной теории вероятностей базируется на общепризнанной колмогоровской теоретико-множественной аксиоматике, а физическая часть — на гипотезе статистической устойчивости частоты реальных событий или эквивалентной ей гипотезе адекватного описания физических явлений (событий, величин, процессов и полей) случайными (стохастическими) моделями. В рамках теории вероятностей полагается, что гипотеза статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений, т.е. принимается концепция устройства мира на случайных принципах. Кратко изложена история исследования феномена статистической устойчивости. Обсуждены условия, при которых возможны нарушения статистической устойчивости.

2.1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

На протяжении веков теория вероятностей формировалась как прикладная теория, ориентированная на описание реальных событий, величин, процессов и полей. Лишь в начале прошлого столетия в результате строгой формализации ее базовых понятий и систематизации основных положений она приобрела черты математической теории и была признана разделом математики. Современную теорию вероятностей можно рассматривать как физико-математическую теорию, имеющую обширную область практического применения.

Математической основой современной теории вероятностей служит теоретико-множественный подход, разработанный А.Н. Колмогоровым, и предложенная им система аксиом [Колмогоров, 1936]. Именно таким образом формализованы понятия теории вероятностей и математической статистики в новом международном стандарте ISO [International standard, 2006].

Объектами исследования математической части теории вероятностей являются абстрактные математические объекты — *случайные события, величины и функции* (*случайные явления*), представляемые бесконечным множеством своих реализаций и исчерпывающе характеризуемые определенными, вполне конкретными, законами распределения вероятностной меры (функциями распределения).

Заметим, что явление, не описываемое конкретным законом распределения, далее случайным не считается.

Мостом, связывающим реальный мир с абстрактным миром вероятностных понятий, служит математическая статистика, изучающая случайные выборки. Ключевым в математической статистике является закон больших чисел, доказанный Я. Бернулли триста лет назад [Bernoulli, 1713, Бернулли, 1986].

В юбилейной речи, посвященной двухсотлетию закона больших чисел, А.А. Марков сформулировал этот закон следующим образом [Бернулли, 1986, с. 10]: «Если производится неограниченный ряд испытаний и при всех этих испытаниях некоторое событие имеет одну и ту же вероятность, то при достаточно большом числе их можно утверждать с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, что отношение числа появлений события к числу испытаний отклонится от вероятности события менее, чем на данное число, как бы мало оно ни было».

Иными словами, при проведении независимых испытаний в одинаковых условиях, когда некоторое событие имеет одну и ту же вероятность, а число испытаний неограниченно возрастает, частота появления события сходится по вероятности к этой вероятности.

Корректное применение любой математической теории на практике возможно лишь при наличии гипотезы адекватности математической модели физической реальности. Об этом шла речь в параграфе 1.7.

Для использования теории вероятности на практике и, в частности, закона больших чисел необходимо принятие *физической гипотезы статистической устойчивости* (*статистической стабильности*) *частоты* реальных событий.

В данном случае под статистической устойчивостью частоты события понимается существование предела, к которому стремится эта частота при неограниченном увеличении числа испытаний.

Таким образом, гипотеза статистической устойчивости частоты эквивалентна *гипотезе существования предела частоты* реальных событий. Этот предел трактуется физиками и инженерами как вероятность события.

Математическая статистика изучает выборки с помощью *статистик* — функций выборок. Выборки могут быть *однородные* и *неоднородные*.

В простейшем случае однородной выборки полагается, что все элементы выборки имеют один и тот же закон распределения. При этом статистика представляет собой случайную величину, закон распределения которой определяется функцией распределения элементов рассматриваемой выборки.

Основная теорема математической статистики (теорема Гливенко) утверждает [Гнеденко, 1961], что при неограниченном увеличении объема однородной выборки эмпирическая функция распределения, рассчитанная по выборке, сходится (с вероятностью единица) к истинной функции распределения.

Поскольку функция распределения исчерпывающе характеризует случайное явление, сходимость эмпирической функции распределения к истинной функции распределения означает существование различных эмпирических (выборочных) характеристик и параметров (в частности, оценок плотности распределения, моментов, кумулянтов и пр.), сходящихся к соответствующим характеристикам и параметрам истинного распределения (конечно, если таковые существуют).

Тем самым понятие статистической устойчивости частоты реальных событий распространяется на выборочную функцию распределения и другие выборочные характеристики и параметры реальных величин, процессов и полей. Это позволяет говорить о статистической устойчивости самого рассматриваемого физического явления.

Заметим, что гипотеза статистической устойчивости гарантирует теоретически *абсолютно точный статистический прогноз* характеристик и параметров исследуемого явления при неограниченном увеличении объема выборки.

Результаты, полученные для однородной выборки, обобщаются на случай неоднородной выборки, элементы которой описываются разными функциями распределения.

В рамках теории вероятностей рассматривают неоднородные выборки, у которых чередование функций распределения происходит по случайному закону, описываемому определенной функцией распределения.

В этом случае статистика, рассчитанная по выборке, характеризует не только совокупность функций распределения, но также и закон чередования распределений.

Для такой выборки любая нетривиальная статистика представляет собой случайную величину, характеризуемую конкретной функцией распределения. Такая статистика обладает свойством статистической устойчивости.

Из приведенного следует, что понятие статистической устойчивости оказывается эквивалентом случайности (стохастичности) явления. Именно так трактуется это понятие в дальнейшем.

Таким образом, принятие гипотезы статистической устойчивости частоты реальных событий приводит к принятию *гипотезы статистической устойчивости реальных физических явлений*. Следующим шагом является принятие *гипотезы адекватного описания реальных явлений случайными* (*стохастическими*) *моделями*. Без этих гипотез невозможно корректное применение на практике теории вероятностей.

Как отмечалось в главе 1, в рамках теории вероятностей полагается, что гипотеза статистической устойчивости справедлива для широкого круга массовых физических явлений. Иными словами, принимается *концепция устройства мира на случайных принципах.*

2.2. ЭКСКУРС В ИСТОРИЮ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

На феномен статистической устойчивости частоты впервые обратил внимание в 1669 г. торговец сукном Дж. Граунт [Graunt, 1939]. Сохранились отрывочные сведения об исследованиях статистической устойчивости, проводимые в период с конца XVII по конец XIX столетия Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, О. Курно, А. Кетле, Я. Бернулли и др. [Шейнин, www, Чайковский, 2004].

Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX века. Немецкий статистик В. Лексис в 1879 г. впервые попытался связать понятие статистической устойчивости частоты с дисперсией случайной величины. На рубеже столетий и в начале XX века исследованием статистической устойчивости занимались К. Пирсон, А.А. Чупров, В.И. Борткевич, А.А. Марков, Р. фон Мизес и др. [Шейнин, www, Чайковский, 2004].

Известно, например, что частоту выпадения определенной стороны монеты исследовали Лаплас, Бюффон, К. Пирсон и многие другие ученые (см. введение). Описание этих и других подобных исследований приведено в ряде литературных источников, в частности [Гнеденко, 1961, 1988].

Результаты многих экспериментов указывают на правдоподобность гипотезы статистической устойчивости реальных явлений, а это позволяет предположить, как отмечал Б.В. Гнеденко [Гнеденко, 1961, с. 42], «наличие не зависящих от испытателя закономерностей течения явления, проявление которых и заключается в указанном почти постоянстве частоты».

В начале прошлого века встал вопрос о формализации теории вероятностей. На II Международном конгрессе математиков, проходившем в 1900 г., Давидом Гильбертом были сформулированы основные проблемы математики [Проблемы Гильберта, 1969]. Шестой проблемой им было названо математическое изложение аксиом физики. Раскрывая суть этой проблемы, Д. Гильберт акцентировал внимание на аксиоматизации теории вероятностей.

Предлагались различные подходы к решению этой проблемы. Первую не совсем удачную попытку аксиоматизации теории вероятностей предпринял Г. Больцман [Bohlmann, 1908].

В 1918 г. С.Н. Бернштейн предложил систему аксиом [Бернштейн, 1918, 1946], основанную на качественном сравнении случайных событий по их большей или меньшей вероятности. Совокупность событий при этом рассматривалась как булева алгебра.

С позиций естествоиспытателя подошел к проблеме математик и механик Р. фон Мизес [Mises, 1919, 1928, 1964, Мизес, 1930]. Он предложил оригинальную систему аксиом, основанную на статистических представлениях. Ключевую роль в его подходе играла статистическая устойчивость частоты. Вероятность события определена им как предел частоты при устремлении количества опытов к бесконечности.

В 1923 г. А. Ломницкий на базе идей Э. Бореля о связи понятий вероятности и меры [Borel, 1909] предложил свою систему аксиом [Lomnicki, 1923].

В конце 20-х годов А.Н. Колмогоровым была сформулирована ставшая классической система аксиом, основанная на теории множеств и теории меры [Колмогоров, 1929, 1936]. Позднее, в 60-х годах он начал разрабатывать иные, алгоритмические, принципы формализации теории вероятностей.

Общепризнанным в настоящее время считается теоретико-множественный подход А.Н. Колмогорова.

Хотя в результате научных споров статистический подход Р. фон Мизеса был отвергнут большинством математиков, статистическая устойчивость продолжает играть большую роль. Связано это с тем, что статистическая устойчивость является объективной реальностью физического мира.

Успехи в развитии теории вероятностей создают иллюзию, что при описании массовых явлений не должно быть серьезных проблем. Однако оказывается, не все так просто.

Предсказываемая теорией вероятностей возможность теоретически абсолютного точного статистического прогноза характеристик и параметров физических явлений при неограниченном увеличении объема выборки, к сожалению, не находит экспериментального подтверждения. Кроме того, не удается достичь и бесконечно высокой точности измерения, также предсказываемой теорией вероятностей.

Эти и другие противоречия между теорией и практикой указывают на неадекватное описание реальных явлений случайными моделями.

Крупные ученые, говоря о феномене статистической устойчивости, проявляли и проявляют большую осторожность в формулировках, обращая внимание на то, что могут иметь место нарушения статистической устойчивости. Некоторые высказывания по этому поводу приведены в приложении 1.

Проблема нарушения статистической устойчивости достаточно активно обсуждалась и продолжает обсуждаться в научной литературе. Но зачастую математики считают, что вопрос статистической устойчивости не имеет прямого отношения к математике, а физики полагают его сугубо математическим вопросом. В итоге проблема нарушения и учета статистической устойчивости до недавнего времени оставалась малоизученной.

Отсутствие на протяжении многих лет серьезного интереса к проблеме нарушения статистической устойчивости можно объяснить тем, что на относительно небольших временных, пространственных и пространственно-временных интервалах наблюдения статистические характеристики физических явлений обычно мало изменяются и поэтому классические стохастические модели обеспечивают вполне адекватное их представление.

Возрастающая потребность повышения точности измерений привела в последние годы к необходимости значительного увеличения интервалов обработки. На больших интервалах, как показывают экспериментальные исследования, наблюдаются существенные нарушения статистической устойчивости. Все указывает на то, что все реальные физические величины, процессы и поля (за исключением, возможно, лишь некоторых фундаментальных универсальных постоянных, таких как скорость света в вакууме) обладают не абсолютной, а всего лишь ограниченной статистической устойчивостью. Очень существенно, что нарушения устойчивости носят статистически *непредсказуемый* (*непрогнозируемый*) *характер*, не поддающийся вероятностному описанию с помощью каких-либо законов распределения.

2.3. НАРУШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Если выборка однородная, то все ее статистики (функции выборки) обладают свойством статистической устойчивости. Если же выборка неоднородная, то в некоторых случаях статистики оказываются статистически неустойчивыми.

В этой связи на практике по возможности пытаются избегать неоднородных выборок. Для оценки статистической неоднородности полезны методы проверки непараметрических статистических гипотез, основанные на критерии Колмогорова, Пирсона, омега-квадрат и пр. [Большев, Смирнов, 1983, Королюк и др., 1985, Горбань, 2003].

Выборки, соответствующие небольшим интервалам наблюдения, как правило, однородны. При этом проблемы нарушения статистической устойчивости нет.

Выборки же, соответствующие большим интервалам наблюдения, обычно неоднородны. Тогда могут происходить нарушения статистической устойчивости.

В параграфе 2.1 рассматривался вариант чередования в неоднородной выборке функций распределения по случайному закону. Статистики, сформированные по такой выборке, статистически устойчивые.

Однако возможно нерегулярное чередование функций распределения, не описываемое случайным законом распределения.

В этом случае далеко не каждая статистика имеет конкретный закон распределения. Статистика, не описываемая конкретной функцией распределения, не является случайной величиной. Такие статистики не обладают свойством статистической устойчивости.

Отметим, что некоторые статистики и при нерегулярном чередовании функций распределения остаются случайными величинами, для которых имеет место свойство статистической устойчивости.

В качестве примера рассмотрим выборку случайных величин с математическими ожиданиями из интервала $[m_1, m_2]$ при нерегулярном чередовании законов распределения.

В данном случае среднее выборки — неслучайная величина, поскольку она не описывается конкретной функцией распределения. В результате выборочное среднее не имеет математического ожидания.

Однако, даже при произвольном чередовании функций распределения элементов выборки, путем усреднения данных могут быть получены случайные оценки, например, оценки границ среднего, сходящиеся к m_1 и m_2.

Заметим, что при конкретном чередовании законов распределения среднее выборки — случайная величина, для которой существует определенное математическое ожидание среднего. Значение этого математического ожидания находится в интервале $[m_1, m_2]$.

Нарушение статистической устойчивости реальных физических явлений создает серьезные проблемы, поскольку классические подходы теории вероятностей и математической статистики зачастую оказываются малопригодными. Требуются новые подходы и новые модели.

2.4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ МОДЕЛИ

Познание окружающего мира основано на построении неформализованных и формализованных моделей (см. главу 1). Формализованные модели подразделяются на физические и математические.

Среди физических моделей обычно выделяют детерминированные и случайные (или стохастические) модели, допускающие адекватное описание реальных явлений соответственно с помощью детерминированных и случайных математических моделей.

Такая классификация представляется не очень удачной, поскольку при математической формализации понятия случайного явления (события, величины, процесса, функции) с использованием, например, теоретико-множественной аксиоматики А.Н. Колмогорова остается вне рассмотрения класс физических явлений, для которых характерно нарушение статистической устойчивости.

Более конструктивным, на наш взгляд, представляется деление физических и математических моделей на *детерминированные* и *недетерминированные* (или, иначе, *неопределенные*) *модели*.

Существует множество различных способов классификации неопределенных моделей (см., например, [Бочарников, 2001]). Примечательно, что во всех классификациях, как правило, случайные модели занимают лишь небольшую часть. Большинство же составляют неслучайные модели.

Смешанные модели, в которых присутствуют случайные и неслучайные составляющие, будем рассматривать как неслучайные.

Заметим, что при такой классификации гиперслучайные модели, рассматриваемые в этой книге, представляют собой подкласс неопределенных моделей, в состав которого входят случайные модели.

Глава 3

СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОЦЕССЫ

Формализовано понятие статистической устойчивости для последовательности случайных величин и случайного процесса. Установлено, что нарушение статистической устойчивости не противоречит закону больших чисел. При нарушении статистической устойчивости выборочное среднее и среднее математических ожиданий не имеют пределов. Однако разность между выборочным средним и средним математических ожиданий стремится к нулю при неограниченном увеличении объема выборки. Выяснено, что статистически неустойчивые процессы — особый класс нестационарных процессов. На основе аналитических исследований и компьютерного моделирования выдвинута гипотеза, что причиной нарушения статистической устойчивости физических процессов на ограниченном интервале наблюдения являются сверхнизкочастотные колебания среднего[1]*. Предложены параметры, характеризующие нарушения статистической устойчивости случайного процесса на конечном интервале наблюдения.*

3.1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПРОЦЕССОВ

В предыдущей главе было показано, что неоднородная случайная выборка с нерегулярным чередованием функций распределения, не описываемым случайным законом распределения, может иметь статистически неустойчивые статистики.

Рассмотрим условия, при которых выборочное среднее оказывается статистически неустойчивым.

Последовательность $X_1, X_2, \ldots$ случайных величин (случайную выборку) будем называть *статистически устойчивой* (*статистически стабильной*), если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной диспер-

---

[1] См. сноску на с. 21.

сии $\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2$ флуктуации выборочного среднего $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ($n = \overline{1, N}$) стремится к нулю, где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ — выборочное среднее флуктуации среднего. *Последовательности*, не удовлетворяющие этому условию, будем называть *статистически неустойчивыми*.

Аналогично случайный *процесс* $X(t)$ будем называть *статистически устойчивым* (*статистически стабильным*), если при устремлении времени наблюдения T к бесконечности математическое ожидание интеграла $\frac{1}{T}\int_0^T (Y(t) - \bar{m}_{y_T})^2 \mathrm{d}t$ стремится к нулю, где $Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(t_1)\mathrm{d}t_1$ — накопленное среднее, $\bar{m}_{y_T} = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\mathrm{d}t$ — среднее накопленного среднего. *Процессы*, не удовлетворяющие этому условию, будем называть *статистически неустойчивыми*.

В данном случае тип сходимости не столь существен, но для придания определениям необходимой математической строгости будем подразумевать сходимость по вероятности.

Заметим, что приближенно детерминированную величину x_0 можно считать вырожденной случайной величиной, у которой функция распределения имеет вид функции единичного скачка в точке x_0 [Горбань, 2005 (1), 2007 (1)]:

$$F(x) = \mathrm{sign}[x - x_0],$$

а детерминированную функцию $x_0(t)$ — вырожденной случайной функцией, у которой функция распределения

$$F(x;t) = \mathrm{sign}[x - x_0(t)],$$

где $\mathrm{sign}[x] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$

Поэтому понятия статистической устойчивости и неустойчивости применимы также для последовательности детерминированных величин и детерминированных функций.

Степень статистической неустойчивости последовательностей случайных величин и случайных процессов может быть разная. В одном случае при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии флуктуации выборочного среднего стремится к бесконечности, в другом случае — оказывается ограниченным. Верхняя граница C математического ожидания выборочной дисперсии флуктуации характеризует степень неустойчивости.

3.2. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ПРИ НАРУШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Известная *теорема Чебышева*, выражающая закон больших чисел для последовательности $X_1,...,X_N$ попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии и математические ожидания $m_{x_1},\dots,m_{x_N}$, утверждает [Гнеденко, 1988, Горбань, 2003], что при устремлении N к бесконечности выборочное среднее $Y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ стремится по вероятности к среднему $m_{y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ математических ожиданий $m_{x_1},\dots,m_{x_N}$.

Обратим внимание на одну тонкость, ускользающую от многих: эта теорема не говорит о сходимости ни выборочного среднего Y_N, ни среднего математических ожиданий m_{y_N}, а *утверждает сходимость этих величин друг к другу* или, иначе, *утверждает сходимость к нулю их разности*. Это означает, что выборочное среднее Y_N и среднее математических ожиданий m_{y_N} могут не иметь предела. Они могут, например, флуктуировать вокруг константы, но при этом они изменяются синхронно.

Из теоремы Чебышева следует, что при выполнении условий теоремы последовательность случайных величин тогда и только тогда статистически устойчива, когда при устремлении объема выборки N к бесконечности выборочная дисперсия флуктуации среднего математических ожиданий m_{y_N} стремится к нулю.

Для последовательности случайных величин, удовлетворяющих условиям теоремы, это положение может использоваться как определение понятия статистической устойчивости.

Применительно к случайному процессу теорема Чебышева может быть сформулирована следующим образом. Пусть сечения $X(t_1), X(t_2),\dots$ случайного процесса $X(t)$ представляют собой попарно независимые случайные величины, имеющие конечные дисперсии и математические ожидания $m_x(t_1), m_x(t_2), \ldots$. Тогда при устремлении времени наблюдения t к бесконечности среднее процесса $Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(t_1)\mathrm{d}t_1$ стремится по вероятности к среднему $m_y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t m_x(t_1)\mathrm{d}t_1$ математических ожиданий.

Если предел среднего математических ожиданий $m_y(t)$ существует, то при $t \to \infty$ процесс $Y(t)$, затухая, стремится к этому пределу. Если же предел не существует, то при $t \to \infty$ процесс $Y(t)$ и среднее математических ожиданий $m_y(t)$ синхронно флуктуируют, при этом флуктуируют таким образом, что $Y(t) \to m_y(t)$, т.е. значение процесса $Y(t)$ приближается к значению среднего математических ожиданий $m_y(t)$.

3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И ПРОЦЕССАХ

Статистически устойчивыми являются однородная последовательность случайных величин с ограниченными первыми двумя моментами, а также неоднородная последовательность случайных величин с ограниченными первыми двумя моментами при условии, что среднее математических ожиданий этих величин имеет предел. Статистически устойчивым является периодический детерминированный процесс.

Примеры моделей статистически устойчивых процессов приведены на рис. 3.1: *модель белого гауссовского шума* (модель 1) и *модель гармонического колебания* (модель 2).

Если при устремлении объема выборки к бесконечности среднее математических ожиданий случайных величин не имеет предела (например, флуктуирует), то последовательность — статистически неустойчива. Статистически неустойчивым является числовой несходящийся ряд.

Подчеркнем, что для случайных процессов *понятия нестационарности и статистической неустойчивости не тождественны.*

Стационарные эргодические по отношению к математическому ожиданию процессы [Горбань, 2003] статистически устойчивы. Среди нестационарных встречаются как статистически устойчивые, так и статистически неустойчивые процессы.

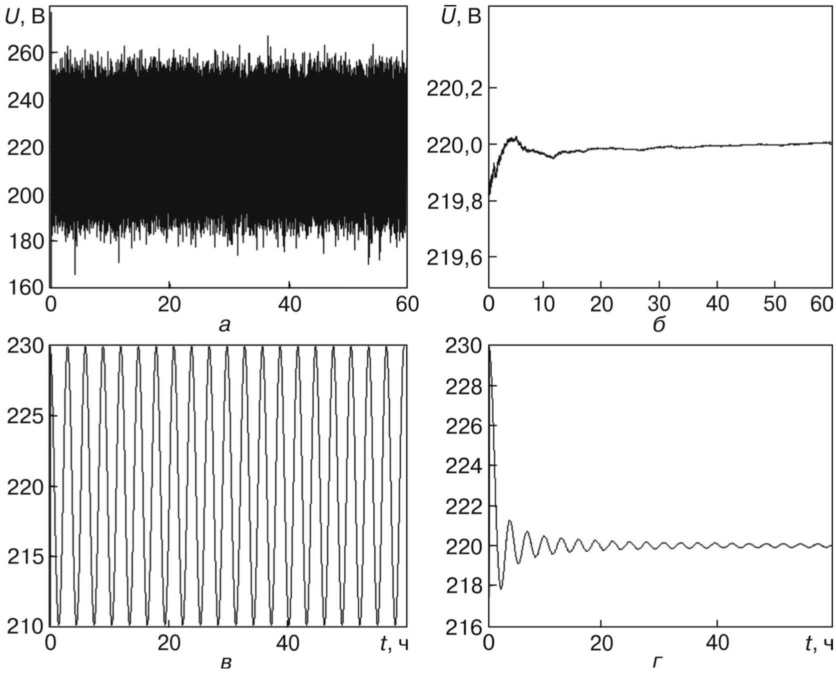


Рис. 3.1. Модель белого гауссовского шума (модель 1) (*а*), модель гармонического колебания (модель 2) (*в*) и соответствующие им накопленные средние (*б*, *г*)

Таким образом, *статистически неустойчивые процессы — особый класс нестационарных процессов.*

3.4. ПРИЧИНЫ НАРУШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Представим нестационарный случайный процесс $X(t)$ в виде суммы его математического ожидания $m_x(t)$ и случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ с нулевым математическим ожиданием:

$$X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t) .$$

Математическое ожидание среднего $m_y(t)$ определяется математическим ожиданием $m_x(t)$:

$$m_y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t m_x(t_1)\,\mathrm{d}t_1 .$$

Поэтому для изучения статистической устойчивости особый интерес представляет математическое ожидание $m_x(t)$.

Рассмотрим случайные процессы с тремя типами изменения математического ожидания $m_x(t)$: периодическим, скачкообразным и апериодическим.

3.4.1. Случайные процессы с периодически изменяющимся математическим ожиданием

Пусть $m_x(t)$ — периодическая функция с периодом T. Тогда ее можно разложить в ряд Фурье:

$$m_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{\mathrm{j}2\pi}{T} kt\right), \tag{3.1}$$

где $\dot{a}_k = a_k \exp(\mathrm{j}\varphi_k)$ — комплексный коэффициент разложения, a_k — амплитуда, φ_k — фаза.

При этом математическое ожидание среднего

$$m_y(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin \pi tk/T}{\pi tk/T} \cos(\pi tk/T + \varphi_k) . \tag{3.2}$$

Из выражения (3.2) следует, что переменная часть математического ожидания среднего описывается гармоническими функциями, затухающими по закону $\sin x / x$. Скорость затухания этих функций определяется величиной периода T: по мере увеличения периода скорость затухания уменьшается, а при $T \to \infty$ она стремится к нулю.

Минимальная скорость затухания — у первого члена ряда (соответствующего $k = 1$). В математическом ожидании среднего (3.2) гармоники высшего порядка, присутствующие в разложении (3.1), оказываются подавленными. Чем выше порядок гармоники, тем сильнее подавление.

Если длительность t интервала наблюдения существенно меньше периода T, изменения математического ожидания среднего $m_y(t)$ незначительны. Это — область выраженной статистической устойчивости. Ситуация, однако, меняется по мере при-

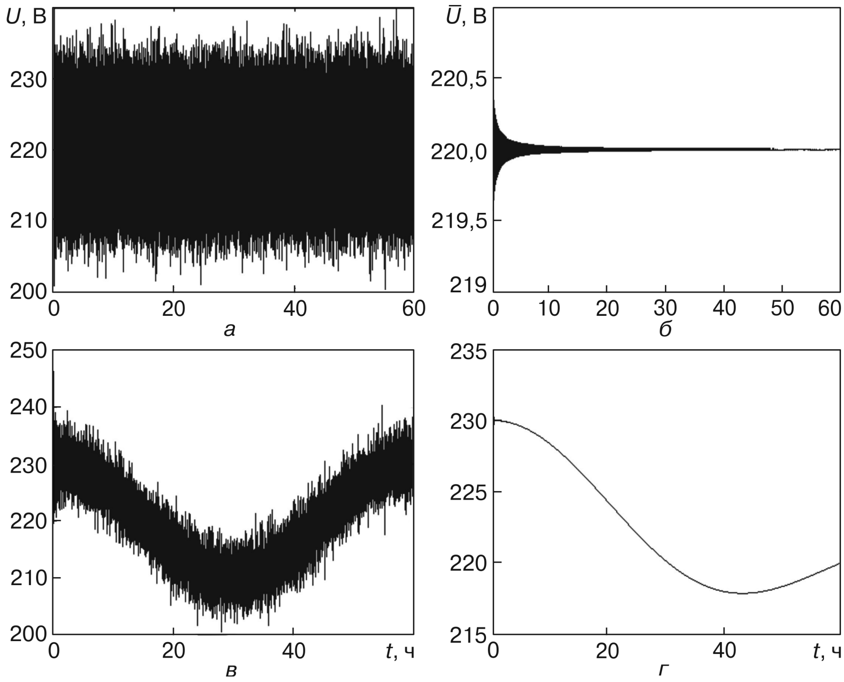


Рис. 3.2. Модели случайного процесса с высокой (модель 3) (*а*) и низкой (модель 4) (*в*) частотой колебания математического ожидания и соответствующие им накопленные средние (*б*, *г*)

ближения длительности t к периоду T. На интервале наблюдения $t \in [0, T]$, как видно из выражения (3.2), происходят значительные изменения математического ожидания, что свидетельствует о выраженной тенденции нарушения статистической устойчивости.

Характеризуя процесс на этом интервале наблюдения, можно считать его статистически неустойчивым.

Заметим, что ощутимые изменения математического ожидания среднего и нарушения статистической устойчивости могут также регистрироваться и на интервалах наблюдения, существенно больших периода T. Это имеет место, когда гармоники высшего порядка достаточно велики, а их номера не очень большие.

Описанные особенности проиллюстрированы рис. 3.2 (модели 3, 4).

При расчетах использовалась последовательность

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f n / N),$$

рассматриваемая как функция времени $t = \Delta t n$ в часах ($n = \overline{1, N}$, $\Delta t = 0,2$ с), с двумя различными значениями частоты f. В модели 3 $f = 400$ (рис. 3.2, *а*, *б*), а в модели 4 — $f = 1$ (рис. 3.2, *в*, *г*). В обеих моделях $a = 220$, $\sigma_1 = 1$, множество отсчетов разбито на L блоков по M отсчетов в каждом ($N = ML$, $M = 64$), n_0^l — соответствующий l-му блоку отсчет гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, n_n — n-й отсчет случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\sigma_2 = 10$.

Из выражения (3.2) следует, что при $t \to \infty$ и конечном T флуктуации математического ожидания среднего $m_y(t)$ стремятся к нулю. Это означает, что, несмотря на нарушения статистической устойчивости на определенном интервале наблюдения, случайный процесс с периодически изменяющимся математическим ожиданием в целом статистически устойчив.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, представляющий собой сумму Q примерно одинаковых по уровню процессов $X_q(t)$ с периодами изменения математического ожидания $T_1, T_2, \ldots, T_Q$. Период T_{q+1} каждого следующего процесса $X_{q+1}(t)$ значительно больше периода T_q предыдущего процесса $X_q(t)$.

На интервале наблюдения от нуля до t, значительно меньшем T_1, флуктуации математических ожиданий практически не проявляются и поэтому процесс $X(t)$ можно считать практически устойчивым. При приближении t к T_1 процесс $X_1(t)$ (а следовательно, и процесс $X(t)$) становится статистически неустойчивым. При дальнейшем увеличении времени наблюдения начинают проявляться статистические свойства процесса $X_1(t)$ и он постепенно приобретает характер устойчивого процесса. При этом процесс $X(t)$ также начинает походить на статистически устойчивый процесс.

При приближении t к T_2 процесс $X_2(t)$ становится статистически неустойчивым. Это приводит к тому, что статистическая устойчивость процесса $X(t)$ нарушается и т.д. При $Q \to \infty$

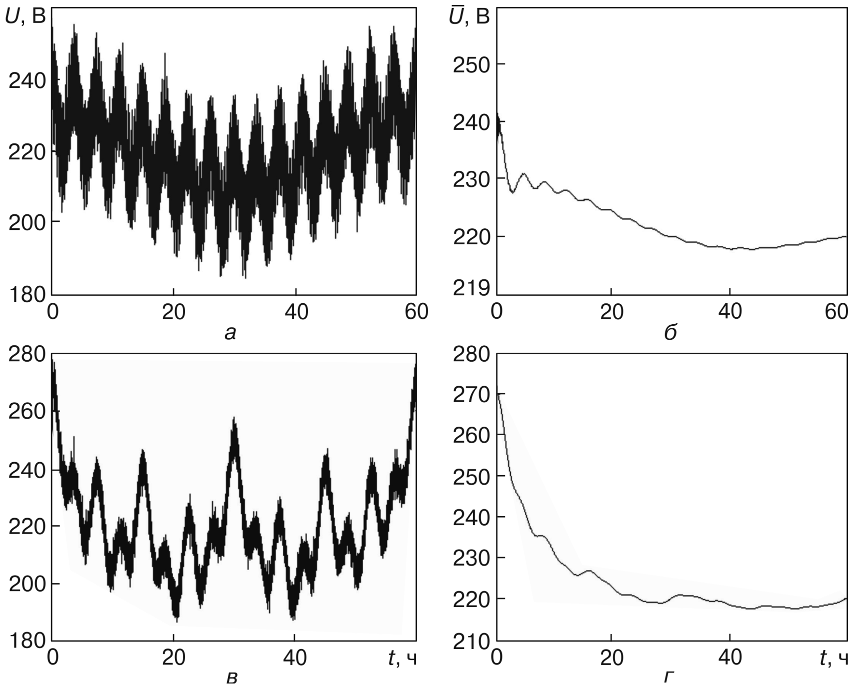


Рис. 3.3. Модели случайного процесса с математическим ожиданием, содержащим три сильно отстоящих друг от друга по частоте гармоники (модель 5) (*а*) и пять близко расположенных по частоте гармоник (модель 6) (*в*), а также соответствующие им накопленные средние (*б*, *г*)

чередование устойчивых и неустойчивых состояний охватывает бесконечный интервал наблюдения и в целом процесс оказывается статистически неустойчивым.

Когда периоды связаны неравенствами $T_{q+1} < 2T_q$, области неустойчивых состояний сливаются между собой и практически на всем интервале $[T_1, T_Q)$ процесс оказывается статистически неустойчивым.

Описанная схема формирования статистически неустойчивых областей проиллюстрирована моделями 5 и 6 (рис. 3.3).

Модель 5 описывается выражением

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{3} \cos(2\pi f_i n / N),$$

где $f_1 = 256$, $f_2 = 16$, $f_3 = 1$, а модель 6 — выражением

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{5} \cos(2\pi f_i n / N),$$

где $f_1 = 16$, $f_2 = 8$, $f_3 = 4$, $f_4 = 2$, $f_5 = 1$.

В обеих моделях неоговоренные параметры такие же, как в модели 3.

Описанная аддитивная модель может использоваться в качестве модели реальных процессов. Наличием в ней случайных составляющих с периодически изменяющимися математическими ожиданиями можно объяснить чередование в реальных процессах статистически устойчивых и неустойчивых состояний.

3.4.2. Случайные процессы со скачкообразно изменяющимся математическим ожиданием

С точки зрения статистической устойчивости случайный процесс со скачкообразно изменяющимся математическим ожиданием не представляет особого интереса, поскольку при наличии сильно выделяющихся отсчетов среднее откликается на воздействие всплесками уровня, но с течением времени они быстро сглаживаются (модель 7, рис. 3.4, *а*, *б*).

В рассматриваемой модели отсчеты входного процесса описываются выражением $x_n = a + \sigma_1 n_{1n} + \sigma_2 \varepsilon_p (1 + | n_{2n} |)$, где $\sigma_2 = 20$, n_{1n}, n_{2n} — гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не кратно } p, \\ 1, & \text{если } n \text{ кратно } p, \end{cases}$$

$p = 4000$, а остальные параметры такие же, как в модели 3.

3.4.3. Случайные процессы с апериодически изменяющимся математическим ожиданием

Заметим, что случайные процессы с периодически изменяющимся математическим ожиданием, рассмотренные в п. 3.4.1, на интервале наблюдения длительностью менее периода T можно интерпретировать как процессы с апериодически изменяющимся математическим ожиданием. Отсюда следует, что такие процессы могут

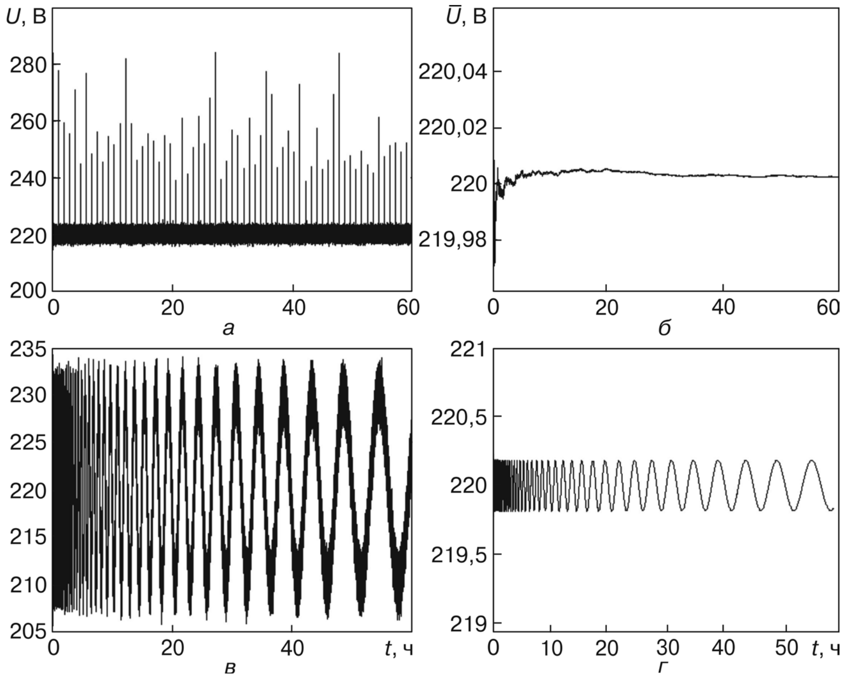


Рис. 3.4. Модель случайного процесса с периодически скачкообразным изменением математического ожидания (модель 7) (*а*), модель случайного процесса с апериодически изменяющимся математическим ожиданием (модель 8) (*в*) и соответствующие им накопленные средние (*б*, *г*)

быть статистически неустойчивыми на определенных интервалах наблюдения.

Пусть $m_x(t)$ допускает разложение в ряд Маклорена:

$$m_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \, . \tag{3.3}$$

Тогда

$$m_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k+1} \, . \tag{3.4}$$

Из выражения (3.4) следует, что изменение математического ожидания $m_x(t)$ по закону t^k приводит к такому же закону изменения математического ожидания среднего $m_y(t)$. Это означает, что если $m_x(t) = t^k$, то случайный процесс статистически неустойчив на любом интервале наблюдения.

Заметим, что из-за наличия в разложении (3.4) дополнительных по сравнению с разложением (3.3) коэффициентов $(k+1)^{-1}$ закон изменения $m_y(t)$ в общем случае не повторяет закон изменения $m_x(t)$, а потому не обязательно процесс с апериодически изменяющимся математическим ожиданием является статистически неустойчивым.

Рассмотрим случайный процесс, у которого математическое ожидание $m_x(t)$ в логарифмическом масштабе изменяется периодически с периодом T. В этом случае математическое ожидание может быть представлено рядом

$$m_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{\mathrm{j}2\pi}{T} k \ln t\right).$$

Интегрирование этого выражения с нормировкой на t дает математическое ожидание среднего $m_y(t)$, которое с помощью несложных аналитических преобразований приводится к виду

$$m_y(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{1 + 4\pi^2 k^2 / T^2}} \times$$

$$\times \sin(2\pi k \ln t/T + \varphi_k + \mathrm{arctg}(T / 2\pi k)).$$

Как видно, для периодической в логарифмическом масштабе функции $m_x(t)$ математическое ожидание среднего $m_y(t)$ описывается рядом *незатухающих гармонических функций*. Это означает, что такой процесс статистически неустойчив на интервале наблюдения $[0, \infty)$.

На рис. 3.4, *в*, *г* приведены результаты расчетов для модели, представляемой функцией

$$x_n = a + \sigma_1 n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f \lg n / \lg N)$$

(модель 8), где $\sigma_2 = 10$, $f = 20$, а остальные параметры и величины такие же, как и в модели 3.

Математические ожидания реальных процессов вряд ли описываются функциями типа t^k или косинус-логарифмической функцией. Основная причина тому — их неинвариантность к сдвигу.

При этом, однако, не следует исключать возможность, что отдельные фрагменты реализаций могут описываться подобными функциями с вытекающими из этого последствиями.

3.5. ОЦЕНКА СТЕПЕНИ НАРУШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Установить на практике факт статистической устойчивости реальной последовательности или реального процесса принципиально невозможно, поскольку интервал наблюдения всегда ограничен. По этой же причине невозможно вычислить границу C математического ожидания выборочной дисперсии флуктуации среднего, характеризующую степень нарушения статистической устойчивости исследуемой последовательности или процесса.

По аналогии формализации широко используемого инженерами понятия интервала стационарности (под которым обычно подразумевается интервал, на котором процесс не только стационарен, но и практически эргодичен) можно формализовать понятие статистической устойчивости на конечном интервале наблюдения.

Основой для формализации может служить выявление при увеличении объема обрабатываемых данных тенденции стабилизации уровня выборочного среднего или математического ожидания среднего. Наличие такой тенденции является качественным показателем статистической устойчивости. Отсутствие такой тенденции свидетельствует о нарушении статистической устойчивости.

Для количественной оценки степени нарушения статистической устойчивости можно использовать параметры, характеризующие флуктуацию выборочного среднего Y_N или флуктуацию среднего математических ожиданий m_{y_N}.

Уровень флуктуации выборочного среднего Y_N представляет выборочная дисперсия $\bar{D}_{Y_N}$ флуктуации выборочного среднего Y_n.

В качестве параметра, характеризующего степень нарушения статистической устойчивости случайной последовательности, может служить *параметр статистической неустойчивости выборочного среднего.* Этот параметр представляет собой математическое ожидание выборочной дисперсии $\bar{D}_{Y_N}$, нормированное на дисперсию выборочного среднего $D_{y_N} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}$ и объем выборки N: $\gamma_{1N} = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]}{N D_{y_N}}$, где $\mathrm{M}[\cdot]$ — оператор математического ожидания, D_{x_n} — дисперсия случайной величины X_n.

Уровень флуктуации среднего математических ожиданий m_{y_N} представляет дисперсия флуктуации математического ожидания выборочного среднего $\bar{D}_{m_{y_N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(m_{y_n} - \bar{m}_{m_{y_N}})^2$, где $\bar{m}_{m_{y_N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{y_n}$ — среднее флуктуаций математического ожидания m_{y_n} выборочного среднего.

Поэтому параметром, характеризующим степень нарушения статистической устойчивости случайной последовательности, может служить также *параметр статистической неустойчивости среднего математических ожиданий* $\gamma_{2N} = \frac{\bar{D}_{m_{y_N}}}{N D_{y_N}}$, представляющий собой дисперсию флуктуации математического ожидания выборочного среднего $\bar{D}_{m_{y_N}}$, нормированную на дисперсию выборочного среднего D_{y_N} и объем выборки N.

Нетрудно убедиться, что параметр статистической неустойчивости выборочного среднего и параметр статистической неустойчивости среднего математических ожиданий описываются соответственно выражениями

$$\gamma_{1N} = \frac{\mathrm{M}\left[\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2\right]}{\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}}, \qquad \gamma_{2N} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(m_{y_n} - \bar{m}_{m_{y_N}})^2}{\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}}.$$

На основании теоремы Чебышева при $N \to \infty$ параметр статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1N} стремится к параметру статистической неустойчивости среднего математических ожиданий γ_{2N}, причем как в случае статистически устойчивых, так и в случае статистически неустойчивых последовательностей.

Для статистически устойчивой последовательности их предельные значения равны нулю (так как $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right] \to 0$, а ND_{y_N} — конечная величина), а для статистически неустойчивой последовательности эти величины могут принимать некоторое положительное значение, флуктуировать или стремиться к бесконечности.

Величины параметров статистической неустойчивости γ_{1N}, γ_{2N} зависят как от величины математического ожидания выборочной дисперсии $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]$ флуктуации выборочного среднего и дисперсии флуктуации математического ожидания $\bar{D}_{m_{y_N}}$ выборочного среднего, так и от дисперсии выборочного среднего D_{y_N}: при уменьшении параметров флуктуации $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]$ и $\bar{D}_{m_{y_N}}$ параметры статистической неустойчивости γ_{1N}, γ_{2N} уменьшаются, а при уменьшении дисперсии выборочного среднего D_{y_N} — возрастают.

Для оценки статистической устойчивости иногда могут быть более удобными другие *параметры статистической неустойчивости* — параметры μ_{1N}, μ_{2N}, связанные с параметрами γ_{1N}, γ_{2N} соотношениями $\mu_{1N} = \sqrt{\gamma_{1N} / (1 + \gamma_{1N})}$, $\mu_{2N} = \sqrt{\gamma_{2N} / (1 + \gamma_{2N})}$.

В отличие от параметров γ_{1N}, γ_{2N}, ограниченных лишь снизу нулевым значением, параметры μ_{1N}, μ_{2N} ограничены как снизу, так и сверху: минимально возможное значение этих параметров равно нулю, а максимально возможное — единице.

Чем меньше значения параметров μ_{1N}, μ_{2N}, тем более устойчива последовательность. Значения параметров μ_{1N}, μ_{2N}, близкие к нулю при больших объемах выборки N, свидетельствуют о высокой статистической устойчивости последовательности, большие же значения — о ее статистической неустойчивости.

Реальные процессы содержат как статистически прогнозируемую, так и статистически непрогнозируемую составляющие. Хотя все рассмотренные параметры статистической неустойчивости — относительные (безразмерные) величины, между ними существует принципиальное различие. Параметры γ_{1N}, γ_{2N} характеризуют абсолютный уровень неустойчивости, а μ_{1N}, μ_{2N} — относительный уровень.

Глава 4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Проведены экспериментальные исследования ряда физических процессов и величин на предмет их статистической устойчивости, в том числе исследования динамики изменения спектров собственных шумов усилителя, спектров гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют. Установлено, что на небольших интервалах наблюдения нарушения статистической устойчивости не обнаруживаются, однако на больших интервалах наблюдения все они оказываются статистически неустойчивыми. Тот факт, что исследования статистической устойчивости совершенно разных физических явлений приводят к одному и тому же результату, позволяет предположить, что нарушение статистической устойчивости присуще многим, если не всем, реальным физическим явлениям.

4.1. ПРИМЕРЫ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЯВЛЕНИЙ

Долго искать примеры статистически неустойчивых явлений не приходится. При длительном наблюдении практически любой величины или процесса [1] происходит нарушение статистической устойчивости.

На рис. 4.1, *а — з* приведены спектры собственных шумов низкокачественного усилителя при разном количестве усреднений [2].

По мере увеличения числа усреднений при относительно небольшом их количестве (в данном случае до сотни реализаций мгновенного спектра) наблюдается уменьшение уровня флуктуа-

[1] Исключение могут составлять лишь мировые константы.

[2] Для исследования преднамеренно был выбран низкокачественный усилитель, так как нарушение статистической устойчивости начинает проявляться в нем уже на небольшом интервале наблюдения.

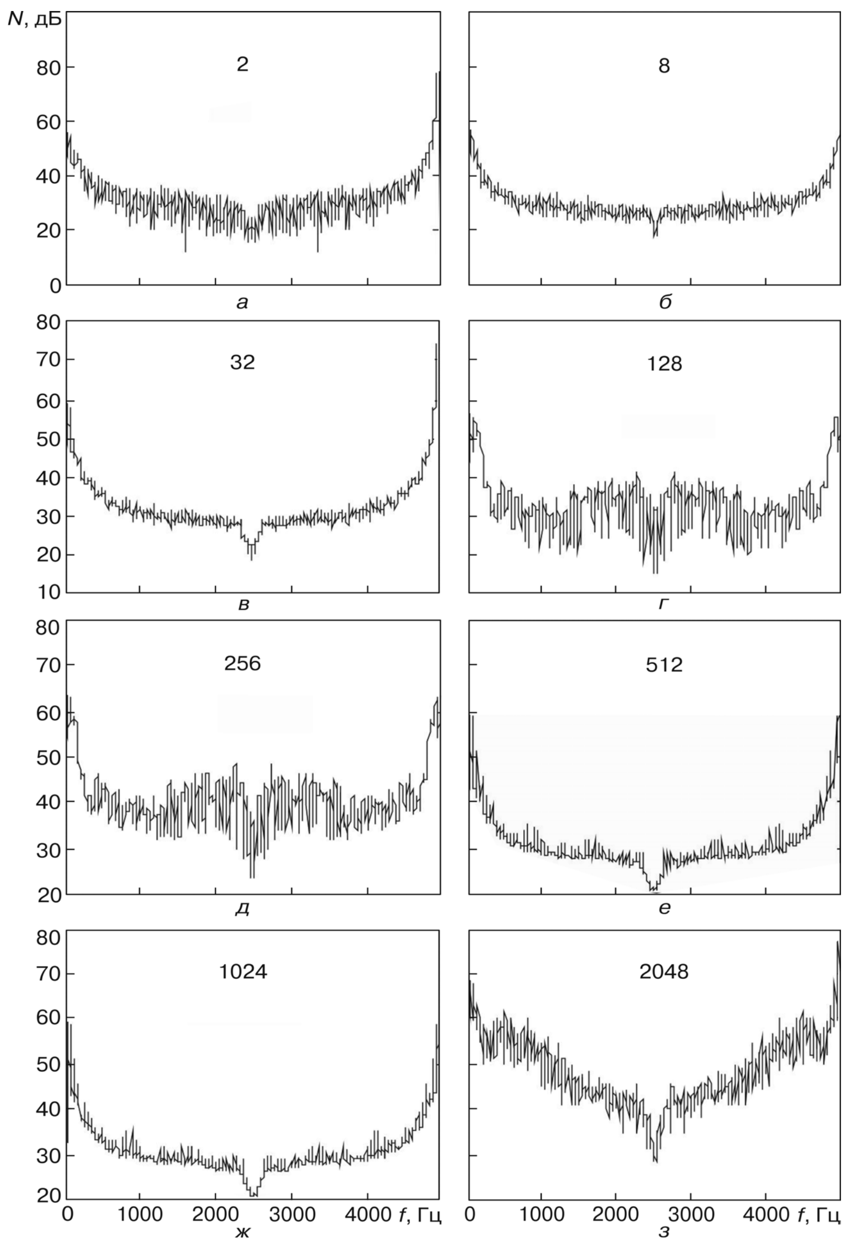


Рис. 4.1. Спектры собственных шумов усилителя при 2, 8, 32, 128, 256, 512, 1024 и 2048 усреднениях мгновенных спектров (соответственно *а — з*)

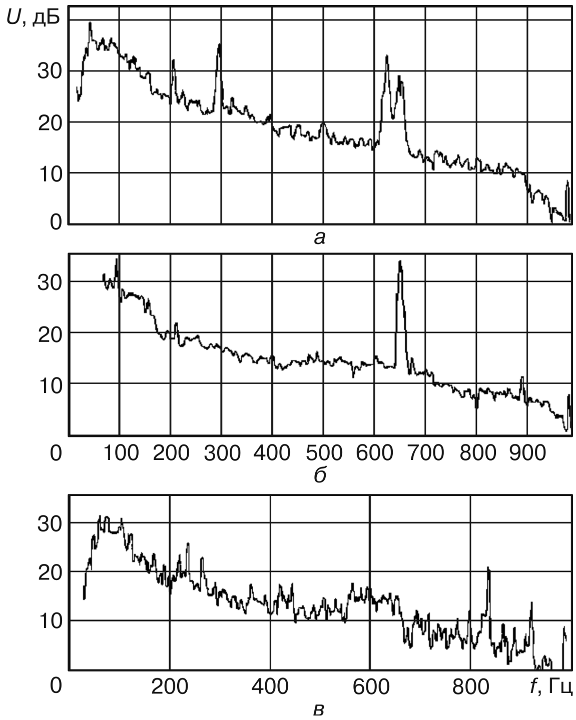


Рис. 4.2. Спектры шумов одного и того же судна в разные периоды наблюдения

ций, однако далее флуктуации возрастают. При дальнейшем накоплении спектров (в данном случае до тысячи реализаций мгновенного спектра) происходит уменьшение уровня флуктуаций, а далее — опять их всплеск.

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что длительное накопление данных не всегда приводит к желаемому подавлению шумов [3].

Другой пример касается гидроакустики. На рис. 4.2 приведены спектры шумов морского судна, полученные автором в одной из

[3] Приведенные спектры были получены и исследованы автором недавно. В.И. Иваненко, давно и плодотворно занимающийся проблемой неопределенности (см., например, [Иваненко, Лабковский, 1990]), сообщил автору в частной беседе, что аналогичные исследования он проводил еще в 60-х годах и пришел к тем же выводам.

Тихоокеанских экспедиций 80-х годов [4] (см. [Горбань, 2008, Gorban, 2008]). Спектры сняты в среднечастотном диапазоне в моменты времени, отстоящие друг от друга примерно на 10 минут.

Как видно, они существенно различаются между собой. Дискретные составляющие на частотах 200 и 300 Гц, присутствующие в спектре, представленном на рис. 4.2, *а*, отсутствуют в спектрах, изображенных на рис. 4.2, *б*, *в*. Дискретные составляющие на частотах 625 и 650 Гц вначале трансформируются в дискретную составляющую на частоте 650 Гц, а затем исчезают. Зато появляются другие дискретные составляющие, в частности на частотах 225, 250, 830, 925 Гц.

Спектры шумоизлучения судов и кораблей на более низких частотах (до 100 Гц) значительно более изрезаны. Исследование динамики изменения низкочастотных спектров показывает, что они тоже меняются, хотя и не так быстро.

Изменения спектров шумоизлучения связаны со многими причинами, в частности с изменением режимов работы судовых устройств и механизмов. Очень важную роль, как выясняется [Горбань, 2008, Gorban, 2008], играет движение источника звука относительно приемника.

Гидроакустическая среда распространения колебаний существенно неоднородна, в особенности по глубине. В результате этого возникают *эффекты многолучевого* (на высоких и средних частотах) и *многомодового* (на низких частотах) *распространения* колебаний.

Параметры лучей или мод, приходящих в точку приема, определяются гидрологическими условиями распространения колебаний, их частотой, а также расстоянием между источником звука и приемником. При взаимном перемещении источника и приемника расстояние меняется, что вызывает статистически непрогнозируемые нарушения когерентности сигнала и, как следствие, нарушение статистической устойчивости спектра принимаемых колебаний.

Поэтому в условиях движения спектр принимаемого колебания значительно отличается от спектра излученного колебания. Интервал времени, в течение которого спектр мало меняется, существенно зависит от направления и скорости взаимного пе-

[4] Исследования проводились на научно-исследовательских судах «Академик А.П. Виноградов» и «Академик М.А. Лаврентьев» по приглашению Тихоокеанского океанологического института ДВНЦ АН СССР (ныне ДВО РАН).

ремещения источника звука и приемника, а также от частоты колебаний. Чем быстрее меняется расстояние, тем меньше этот интервал, причем для высоких частот он меньше, чем для низких частот.

При отсутствии взаимного перемещения источника звука и приемника эффект нарушения статистической устойчивости также наблюдается. В этом случае он вызван динамикой изменения среды. Поскольку изменения среды протекают достаточно медленно, интервал времени, на котором спектры мало изменяются, существенно больше.

Изменчивость спектров принимаемых колебаний ограничивает допустимую длительность их накопления.

Приведенные результаты исследований динамики изменения спектра собственных шумов усилителя и спектра шумов судна свидетельствуют о их статистической неустойчивости.

В этих исследованиях степень нарушения устойчивости количественно не оценивалась. Рассмотрим результаты других исследований, в которых проводились расчеты параметров статистической неустойчивости.

4.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ ГОРОДСКОЙ ЭЛЕКТРОСЕТИ

Параметры электросети, в том числе и напряжение, меняются. Существует стандарт [ГОСТ Р 51317.3.3—99, 1999], определяющий допустимые отклонения напряжения от номинального значения, вызываемые техническими средствами. Согласно этому стандарту максимальное относительное изменение напряжения не должно превышать $1{,}33 \cdot 4\,\% = 5{,}32\,\%$, если эти изменения «вызваны ручными переключениями или частота их повторения меньше 1/ч».

Для изучения статистической устойчивости медленных колебаний напряжения электросети был изготовлен макет, включающий понижающий трансформатор, согласующее устройство (делитель напряжения) и компьютер.

Ввод сигнала осуществлялся с частотой дискретизации 5 кГц. По каждым 1024 отсчетам вычислялись действующие (эффективные) значения напряжения, записываемые в память компьютера с 16 разрядной звуковой картой. Запись велась сеансами на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней.

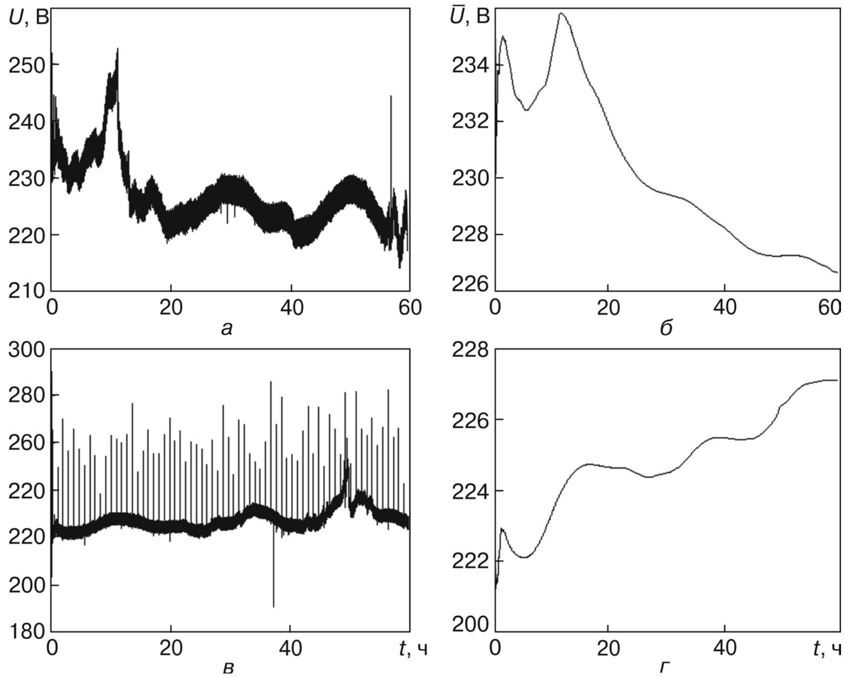


Рис. 4.3. Изменение во времени напряжения электросети на протяжении двух сеансов записи (*а*, *в*) и соответствующие накопленные средние (*б*, *г*)

Продолжительность каждого сеанса составляла около 60 часов. За время сеанса записывалось $N = 2^{20} \approx 1$ млн отсчетов напряжения.

Обработка полученных записей показала, что напряжение сети постоянно менялось. В разных сеансах изменения носили разный характер. Для примера на рис. 4.3, *а*, *в* приведены зависимости напряжения сети от времени (в часах), полученные на протяжении двух сеансов, и соответствующие им накопленные средние.

Анализ полученного экспериментального материала выявил характерную особенность, присущую всем записям: *незатухающий характер накопленного среднего* (рис. 4.3, *б*, *г*).

Этот результат, странный на первый взгляд, резко контрастирует с рассмотренными в главе 3 результатами для белого гауссовского шума и периодического колебания (см. рис. 3.1), демонстрирующими при увеличении времени накопления затухание накопленного среднего.

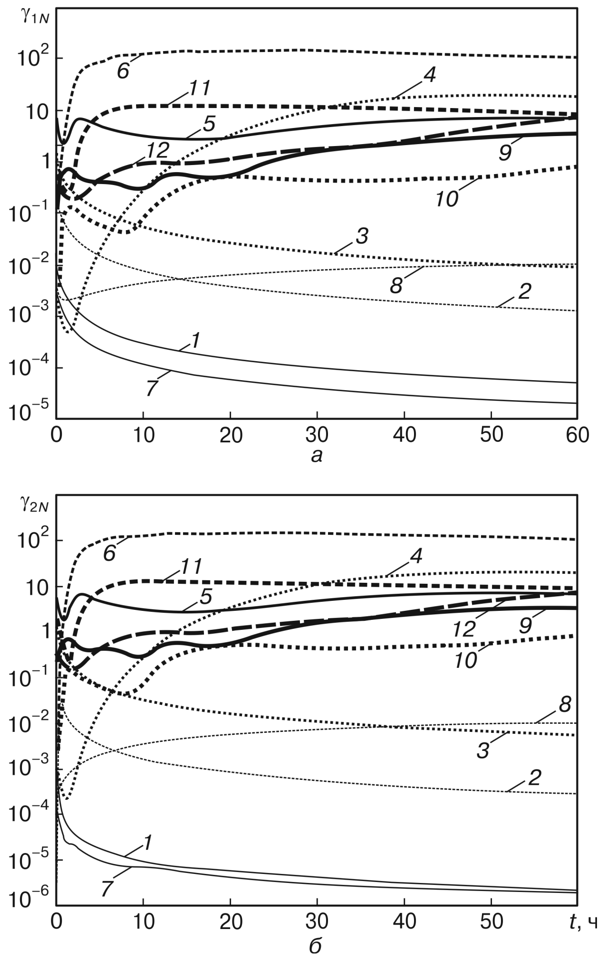


Рис. 4.4. Параметры статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1N} (*а*) и статистической неустойчивости среднего математических ожиданий γ_{2N} (*б*)

Результаты расчетов параметра статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1N} и параметра неустойчивости среднего математических ожиданий γ_{2N} для описанных в предыдущей главе восьми моделей и четырех экспериментально по-

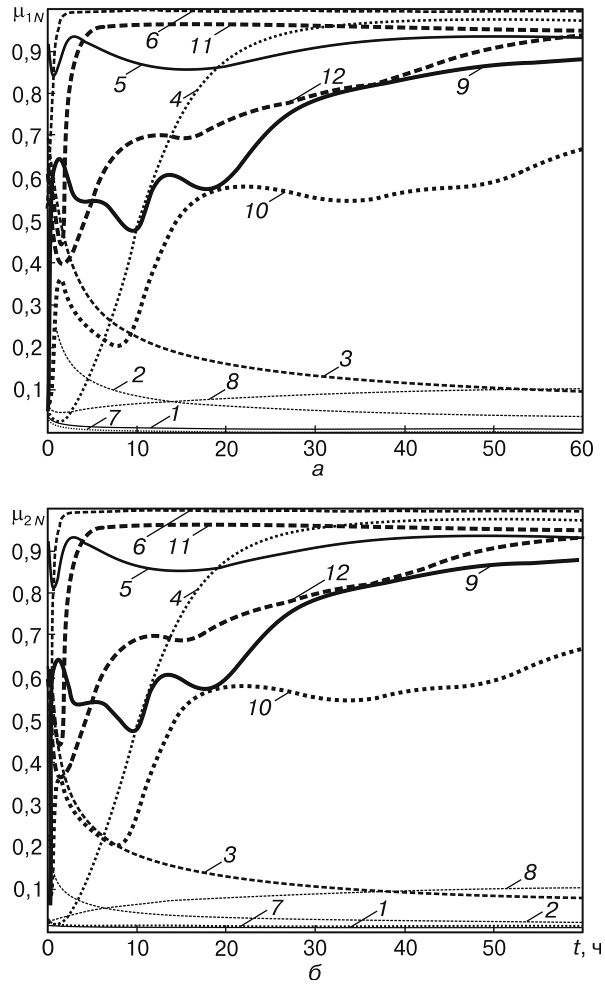


Рис. 4.5. Параметры статистической неустойчивости выборочного среднего μ_{1N} (*а*) и статистической неустойчивости среднего математических ожиданий μ_{2N} (*б*)

лученных записей, включая представленные на рис. 4.3, приведены на рис. 4.4, а результаты аналогичных расчетов параметров неустойчивости μ_{1N}, μ_{2N} — на рис. 4.5.

Тонкими линиями *1*, *2* и *7*, *8* изображены результаты расчетов для моделей 1, 2 и 7, 8 соответственно, полужирными линиями *3 — 6* — результаты расчетов для моделей 3 — 6 соответственно, а жирными линиями *9 — 12* — результаты расчетов для четырех записей напряжения электросети.

При расчетах входящие в параметры статистической неустойчивости дисперсии заменялись оценками, формируемыми по выборке.

Из рисунков видно, что для всех моделей и реальных процессов параметры статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1N} и среднего математических ожиданий γ_{2N} практически совпадают, что позволяет использовать при оценке статистической неустойчивости любой из этих параметров. Такой же вывод можно сделать и для параметров неустойчивости μ_{1N}, μ_{2N}: при больших временах наблюдения параметры μ_{1N} и μ_{2N} оказываются примерно одинаковыми ($\mu_{1N} \approx \mu_{2N} = \mu_N$).

Для моделей 1 — 3 и 7, соответствующих статистически устойчивым процессам, с увеличением времени наблюдения t значения параметров статистической неустойчивости монотонно уменьшаются, а для моделей 4 — 6 и 8, соответствующих статистически неустойчивым процессам, — возрастают. Для всех экспериментально полученных процессов в области больших времен наблюдения значения этих параметров либо возрастают, либо, достигнув максимума, колеблются, оставаясь при этом примерно на одном и том же уровне.

В области больших времен наблюдения для моделей статистически неустойчивых процессов параметры γ_{1N}, γ_{2N} и μ_{1N}, μ_{2N} принимают значения, большие, чем для моделей статистически устойчивых процессов. Это подтверждает возможность использования параметров γ_{1N}, γ_{2N} (или μ_{1N}, μ_{2N}) для установления факта нарушения статистической устойчивости.

По динамике изменения этих параметров можно судить об интервалах наблюдения, на которых исследуемый процесс оказывается практически статистически устойчивым или статистически неустойчивым.

Для всех экспериментально полученных записей (не только приведенных на рис. 4.4, 4.5) значения параметров статистической неустойчивости γ_{1N}, γ_{2N}, μ_{1N}, μ_{2N} в конце 60-часового наблюдения оказались большими. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер.

Интервал, на котором параметры статистической неустойчивости принимают большие значения, начинается от нескольких часов и доходит до конца записей. Отсюда следует, что область статистической неустойчивости непрерывна и перекрывает диапазон от нескольких единиц до не менее 60 часов.

Устойчивый характер наблюдаемых нарушений статистической устойчивости колебаний электросети, а также результаты предыдущего параграфа позволяют предположить, что аналогичные нарушения статистической устойчивости присущи и другим физическим (а, возможно, и не только физическим) явлениям.

4.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОТЫ МОРСКИХ ВОЛН И ПЕРИОДА ИХ СЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время достаточно хорошо разработана теория случайного поля морских волн (см., например, [Полников, 2007]). Однако нет информации о статистической устойчивости параметров волнения.

Для оценки статистической устойчивости высоты морских волн и периода их следования были проведены специальные исследования. При этом использовались статистические данные о параметрах волнения моря, полученные Институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН за 15 месяцев наблюдения в районе Новороссийска (с сентября 2001 г. по декабрь 2003 г.) [Единая государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ]. Данные собраны с помощью волновой станции, показания которой регистрировались с интервалом от одного до нескольких часов.

Волнение моря за время наблюдения изменялось в широких пределах, о чем свидетельствуют приведенные на рис. 4.6 кривые для трех месяцев наблюдения (каждая кривая соответствует месяцу наблюдения).

По собранным данным были проведены расчеты параметра статистической неустойчивости μ_N высоты морских волн и периода их следования (рис. 4.7).

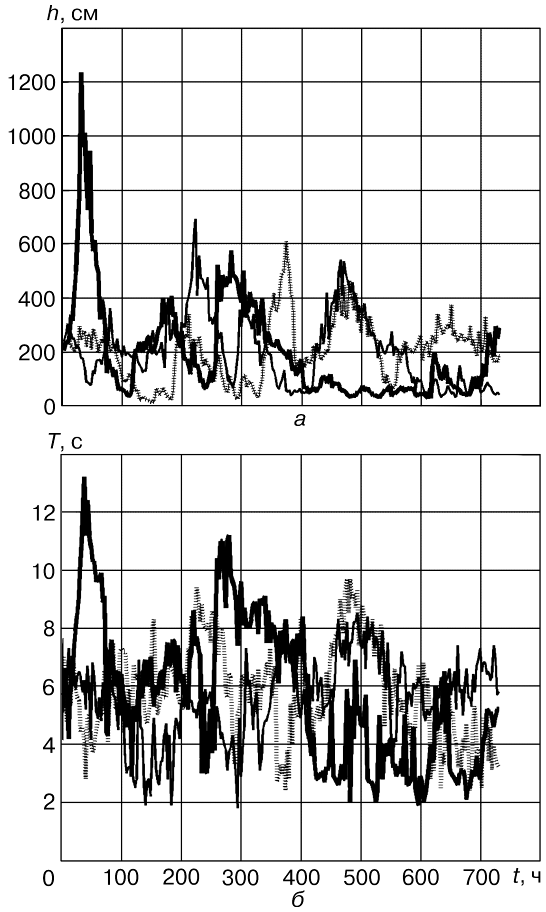


Рис. 4.6. Зависимости высоты максимальных волн (*а*) и периода максимальных волн (*б*) от времени

Дискретность вывода результатов расчета параметра статистической неустойчивости — примерно 10 ч. Нулевой отсчет времени соответствует первому результату расчета.

Из рисунков видно, что параметр статистической неустойчивости μ_N везде принимает большие значения. Это означает, что на всем интервале наблюдения зависимости высоты и периода волн от времени носят явно статистически неустойчивый характер. Статистический прогноз этих параметров на интервале времени свыше полусуток практически невозможен.

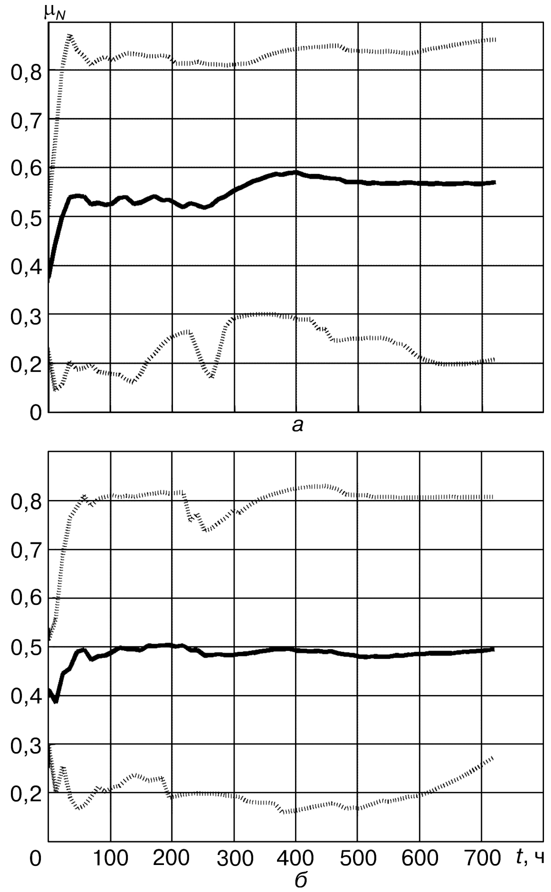


Рис. 4.7. Зависимости усредненных по 15 месяцам значений параметра статистической неустойчивости μ_N (непрерывные кривые) и границ изменения этого параметра (точечные кривые) от времени наблюдения: *а* — для высоты максимальных волн, *б* — для периода максимальных волн

4.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Магнитное поле Земли меняется во времени и пространстве. На протяжении многих лет в различных точках Земли ведется систематическое наблюдение за его колебаниями. Такие работы

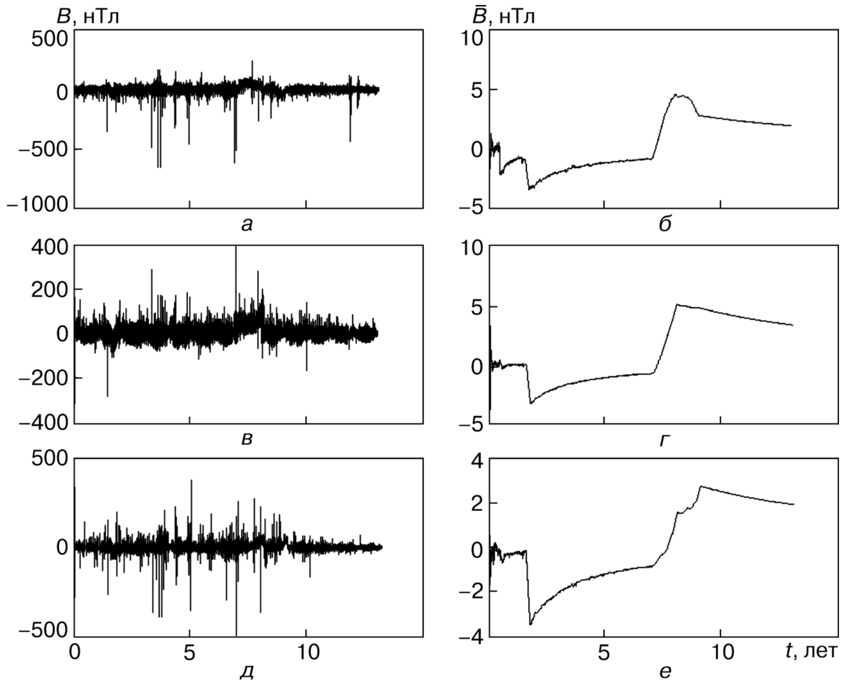


Рис. 4.8. Изменение x-, y- и z-составляющих индукции магнитного поля (*а*, *в*, *д*) и соответствующих накопленных средних (*б*, *г*, *е*) за 13 лет наблюдения в районе Москвы

проводит, в частности, Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.

На рис. 4.8, *а*, *в*, *д* приведены зависимости от времени x-, y- и z-составляющих индукции магнитного поля, построенные на основе данных этого института [Данные о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы], на рис. 4.8, *б*, *г*, *е* — соответствующие зависимости накопленных средних, а на рис. 4.9 — параметры статистической неустойчивости μ_{1N}, μ_{2N}, рассчитанные по описанной выше методике.

Данные регистрировались с интервалом в один час. Оценка дисперсии D_{x_n} вычислялась по 16 измерениям.

Анализ рисунков показывает, что в целом магнитное поле Земли статистически неустойчиво, хотя существуют интервалы относительной устойчивости. Длительность этих интервалов но-

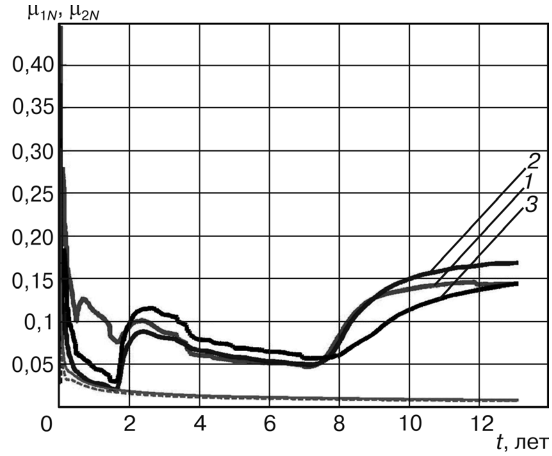


Рис. 4.9. Изменение во времени значений параметров статистической неустойчивости для x-, y- и z-составляющих индукции магнитного поля (соответственно кривые *1*, *2*, *3*) за 13 лет наблюдения в районе Москвы, а также для контрольного белого гауссовского шума (кривые без номера). Сплошным линиям соответствуют параметры статистической неустойчивости μ_{1N}, точечным — параметры статистической неустойчивости μ_{2N}

сит нерегулярный характер и колеблется от нескольких месяцев до нескольких лет. Это означает, что статистический прогноз индукции магнитного поля свыше нескольких месяцев проблематичен, а свыше нескольких лет — практически невозможен.

4.5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОТИРОВКИ ВАЛЮТ

Представление о статистической неустойчивости котировки валют дают кривые на рис. 4.10, полученные по данным FOREX [FOREX].

Из графиков следует, что параметр статистической неустойчивости принимает большие значения с первых же часов наблюдения и постоянно возрастает. Это означает, что курс валют крайне статистически неустойчив и его статистический прогноз практически невозможен.

* * *

Приведенные результаты экспериментальных исследований динамики изменения спектров собственных шумов усилителя, спектров гидроакустических шумов морских судов, колебаний напряжения городской электросети, высоты морских волн и периода их следования, магнитного поля Земли и котировки валют

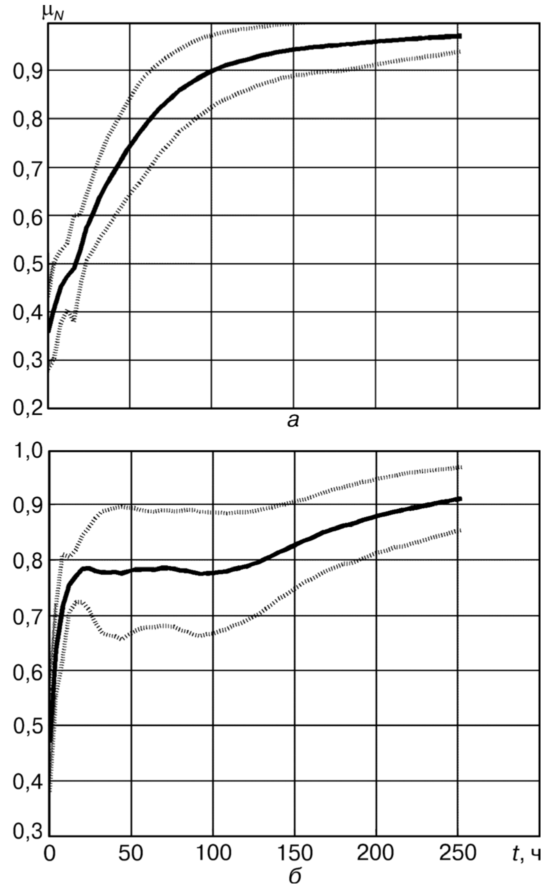


Рис. 4.10. Усредненный по 16 декадам параметр статистической неустойчивости μ_N (непрерывная кривая) и границы изменения этого усредненного параметра (пунктирные кривые), определяемые СКО, для котировки конвертируемого австралийского доллара (AUD) по отношению к доллару США (USD) за 2001 г. (*а*) и 2002 г. (*б*)

свидетельствуют о нарушениях статистической устойчивости этих физических величин.

То обстоятельство, что они представляют явления совершенно разного происхождения, позволяет предположить, что нарушение статистической устойчивости присуще многим, если не всем, реальным физическим явлениям.

Не следует понимать полученные результаты как опровержение факта статистической устойчивости физических явлений. Речь не об этом. Опровергается факт *абсолютной* статистической устойчивости. Результаты исследований указывают на то, что *статистическая устойчивость физических явлений носит ограниченный характер*.

Описание физических явлений с учетом нарушения статистической устойчивости может быть осуществлено разными математическими способами. Даже в рамках теории вероятностей возможно несколько эквивалентных форм представления.

Физическая величина, например, может быть описана с помощью статистически неустойчивой последовательности случайных величин, статистически неустойчивого случайного процесса, неоднородной выборки, обладающей особыми свойствами, и, наконец, множеством случайных величин, рассматриваемым как единый математический объект, — гиперслучайная величина.

Для описания в условиях нарушения статистической устойчивости физических процессов и полей могут быть использованы множества случайных функций, рассматриваемые как цельные объекты, — гиперслучайные функции.

Описанию математического аппарата гиперслучайных явлений посвящена вторая часть монографии.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Глава 5

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Введено понятие гиперслучайного события. Для описания гиперслучайного события использованы условные вероятности и границы вероятностей. Исследованы свойства этих параметров.

5.1. СЛУЧАЙНЫЕ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Понятие случайного события не имеет однозначного толкования, причем даже среди математиков.

В теории вероятностей утвердилось колмогоровское (теоретико-множественное) [Колмогоров, 1936] определение понятия *случайного события*.

При этом случайные события, рассматриваемые как математические объекты, описываются с помощью вероятностного пространства (борелевского поля вероятностей), задаваемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ — борелевское поле (σ-алгебра подмножеств событий) и P — вероятностная мера подмножеств событий [Колмогоров, 1974]. Именно таким образом формализовано понятие случайного события в новом международном стандарте ISO [International standard, 2006].

При более наглядном статистическом подходе (по Р. фон Мизесу [Мизес, 1930]) вероятность $P(A)$ случайного события A представляется как предел частоты $p_N(A)$ наблюдения этого события в фиксированных статистических условиях при устремлении количества опытов N к бесконечности: $P(A) = \lim_{N \to \infty} p_N(A)$.

Известен алгоритмический подход к определению понятия случайности, предложенный в 60-х годах прошлого столетия А.Н. Колмогоровым, основанный на анализе алгоритмической сложности программы перевода известной последовательности в исследуемую [Колмогоров, 1987].

Существуют и другие подходы, о чем упоминалось в параграфе 2.2. На практике в качестве критерия случайности физиками нередко используются различные эмпирические, полуэмпирические, полуформализованные или даже неформализованные критерии: спадающей корреляции, сплошного спектра, невоспроизводимости, неповторяемости, неконтролируемости, непредсказуемости и др. [Кравцов, 1989].

В дальнейшем будем придерживаться колмогоровского теоретико-множественного подхода к определению понятия случайного события.

Будем полагать, что каждому событию A борелевского поля ставится в соответствие вероятностная мера $P(A/g)$, определяемая при некоторых статистических условиях g. В результате триада $(\Omega, \Im, P)$ задает вероятностное пространство для условий g.

Условия g могут быть детерминированными (если g фиксировано) или случайными (если определена вероятностная мера $P(g)$ $\forall g \in G$). В обоих случаях A является случайным событием — событием, для которого определена вероятностная мера.

При неопределенных статистических условиях g, когда известно лишь множество G возможных значений g, величина $P(A/g)$ оказывается неопределенной. В этом случае событие A нельзя отнести к случайным событиям. Это событие другой природы, называемое в дальнейшем гиперслучайным.

Гиперслучайное событие, рассматриваемое как математический объект, задается аналитически тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где P_g — вероятностная мера при фиксированном значении $g \in G$.

Гиперслучайное событие можно представить множеством случайных событий, зависящих от условий g. Для каждого из входящих в это множество событий определена вероятностная мера P_g, но для условий g мера не определена.

5.2. ПАРАМЕТРЫ ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Для гиперслучайного события A задать вероятностную меру нельзя, но можно поставить в соответствие определенные величины, количественно характеризующие диапазон изменения вероятности этого события: ее *верхнюю* $P_S(A)$ и *нижнюю* $P_I(A)$ *границы*, называемые в дальнейшем *границами вероятности* (рис. 5.1). Эти границы описываются выражениями

$$P_S(A) = \sup_{g \in G} P(A/g), \quad P_I(A) = \inf_{g \in G} P(A/g). \tag{5.1}$$

Используя не строгий статистический подход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N не стабилизируется и при $N \to \infty$ не имеет предела.

Если множество условий состоит из одного элемента ($g = \text{const}$), эти границы совпадают. Тогда гиперслучайное событие вырождается в случайное. При этом величина $P(A) = P_S(A) = P_I(A)$ представляет собой вероятность случайного события A.

На основе аксиом теории вероятностей можно показать, что

1) $P_S(A) \geq 0, \quad P_I(A) \geq 0;$ (5.2)

2) для попарно несовместных событий

$$P_S(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P_S(A_n), \quad P_I(\bigcup_n A_n) \geq \sum_n P_I(A_n); \tag{5.3}$$

3) $P_S(\Omega) = P_I(\Omega) = 1.$ (5.4)

Из выражений (5.1)—(5.4) следует, что $P_S(A)$ и $P_I(A)$ представляют собой нормированные полумеры, удовлетворяющие

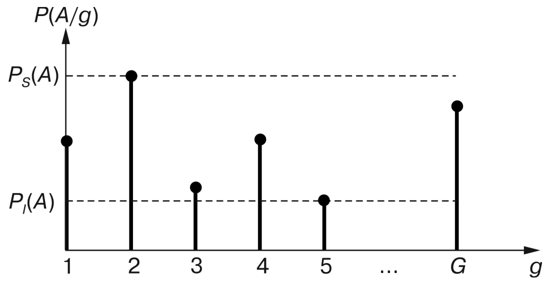


Рис. 5.1. Условные вероятности $P(A/g)$ (соответствующие точкам) и границы вероятности $P_S(A)$, $P_I(A)$ (соответствующие пунктирным линиям) гиперслучайного события A

всем аксиомам меры, за исключением аксиомы счетной аддитивности. При этом

$$0 \le P_S(A) \le 1, \quad 0 \le P_I(A) \le 1, \quad P_S(\varnothing) = P_I(\varnothing) = 0.$$

Для гиперслучайных событий справедливы следующие формулы:

4) если $A_m \subset A_{m+1}$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \quad P_I(\bigcup_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{5.5}$$

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M);$$

5) если $A_{m+1} \subset A_m$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_S(A_M), \quad P_I(\bigcap_{m=1}^{M} A_m) = P_I(A_M), \tag{5.6}$$

$$P_I(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M).$$ [1]

Доказательство равенств (5.5) и (5.6) основано на том, что объединение событий $A_1,\ldots,A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \subset \ldots \subset A_M$, представляет собой событие A_M, а пересечение событий $A_1,\ldots,A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \supset \ldots \supset A_M$, тоже представляет собой событие A_M.

Для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2) - P_I(A_1 \cap A_2), \tag{5.7}$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2) - P_S(A_1 \cap A_2), \tag{5.8}$$

аналогичные выражению, описывающему *теорему сложения* для случайных событий:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

---

[1] В общем случае формулы

$$P_I(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M), \quad P_S(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M)$$

для соответственно $A_m \subset A_{m+1}$ и $A_{m+1} \subset A_m$ ($m \ge 1$) неверны. На это обратил внимание автора В.Н. Тутубалин.

Для доказательства неравенств (5.7), (5.8) рассмотрим два события A_1 и A_2, в общем случае совместных. Верхняя граница вероятности события $A_1 \cup A_2$

$$P_S(A_1 \cup A_2) = \sup_{g \in G}(P(A_1 / g) + P(A_2 / g) - P(A_1 \cap A_2 / g)) \leq$$

$$\leq \sup_{g \in G}(P(A_1 / g) + P(A_2 / g)) - \inf_{g \in G}(P(A_1 \cap A_2 / g).$$

Отсюда следует неравенство (5.7).

Нижняя граница вероятности события $A_1 \cup A_2$

$$P_I(A_1 \cup A_2) = \inf_{g \in G}(P(A_1 / g) + P(A_2 / g) - P(A_1 \cap A_2 / g)) \geq$$

$$\geq \inf_{g \in G}(P(A_1 / g) + P(A_2 / g)) - \sup_{g \in G}(P(A_1 \cap A_2 / g)).$$

Отсюда следует неравенство (5.8).

Отметим, что, когда события A_1 и A_2 несовместные, то $P_S(A_1 \cap A_2) = 0$, $P_I(A_1 \cap A_2) = 0$ и из выражений (5.7), (5.8) следует

$$P_S(A_1 \cup A_2) \leq P_S(A_1) + P_S(A_2),$$
$$P_I(A_1 \cup A_2) \geq P_I(A_1) + P_I(A_2). \quad (5.9)$$

Когда $A_1 \subset A_2$, то согласно соотношению (5.5)

$$P_S(A_1 \cup A_2) = P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \cup A_2) = P_I(A_2).$$

В общем случае для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cap A_2) \leq P_S(A_1) P_S(A_2/A_1), \quad (P_S(A_1) \neq 0),$$
$$P_I(A_1 \cap A_2) \geq P_I(A_1) P_I(A_2/A_1), \quad (P_I(A_1) \neq 0), \quad (5.10)$$

аналогичные выражению

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ P(A_2/A_1),$$

описывающему *теорему умножения* для случайных событий при $P(A_1) \neq 0$. В данном случае под $P_S(A_2/A_1)$ и $P_I(A_2/A_1)$ подразумеваются соответственно верхняя и нижняя границы вероятности события A_2 при условии, что произошло событие A_1. Доказательство неравенств (5.10) аналогично рассмотренному.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 будем называть *независимыми*, если границы вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P_S(A_1 \cap A_2) = P_S(A_1)P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \cap A_2) = P_I(A_1)P_I(A_2). \quad (5.11)$$

Смысл формул (5.11) заключается в том, что при независимых гиперслучайных событиях A_1 и A_2 границы функции распределения пересечения событий определяются лишь границами функции распределения события A_1 и границами функции распределения события A_2. При этом несущественно, произошло или не произошло событие A_1 до выяснения, каковы границы события A_2, и произошло или не произошло событие A_2 до выяснения, каковы границы события A_1. Результат будет один и тот же.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 будем называть *независимыми при всех условиях*, если для всех $g \in G$ условные вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P(A_1 \cap A_2 / g) = P(A_1 / g)P(A_2 / g).$$

Независимые гиперслучайные события и независимые при всех условиях гиперслучайные события — разные понятия. Из независимости гиперслучайных событий при всех условиях не следует их независимость и, наоборот, из независимости гиперслучайных событий не следует их независимость при всех условиях.

5.3. АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ТЕОРЕМЫ ГИПОТЕЗ

Аналогами *формулы полной вероятности* и *теоремы гипотез* (*теоремы Байеса*) теории вероятностей служат следующие теоремы, доказываемые по рассмотренной выше схеме.

Теорема 1. Пусть событие A может произойти совместно с одним и только одним событием $H_1, \ldots, H_M$, образующим полную группу несовместных событий (гипотез). Тогда

$$P_S(A) \le \sum_{m=1}^{M} P_S(H_m)P_S(A/H_m),$$

$$P_I(A) \geq \sum_{m=1}^{M} P_I(H_m) P_I(A/H_m). \tag{5.12}$$

Теорема 2. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — множество попарно несовместных событий (гипотез), образующих полную группу. Тогда для каждой пары событий $(H_m,\ A)$ справедливы неравенства

$$P_S(H_m/A) \leq \frac{P_S(H_m \cap A)}{P_I(A)} \leq \frac{P_S(H_m) P_S(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_I(H_m) P_I(A/H_m)},$$

$$P_I(H_m/A) \geq \frac{P_I(H_m \cap A)}{P_S(A)} \geq \frac{P_I(H_m) P_I(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_S(H_m) P_S(A/H_m)}.$$

Глава 6

СКАЛЯРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определено понятие скалярной гиперслучайной величины. Для ее описания использованы условные функции распределения (дающие исчерпывающее описание гиперслучайной величины), границы функции распределения и их моменты, а также границы моментов. Исследованы свойства этих характеристик и параметров.

6.1. СКАЛЯРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В теории вероятностей *случайной величиной* X называется произвольная измеримая функция, определенная на пространстве Ω элементарных случайных событий ω. При этом значение x случайной величины X может быть представлено в виде некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Множество значений случайной величины образует *пространство значений случайной величины*. Случайная величина задается не только пространством ее значений, но и параметрами, характеризующими вероятность появления тех или иных значений этого пространства.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случайных величин, представляющих собой измеримые числовые функции элементарных случайных событий.

Если пространство значений имеет одно измерение, случайная величина называется скалярной; в случае нескольких измерений она называется векторной.

Скалярной гиперслучайной величиной X будем называть произвольную числовую функцию, определенную на пространстве Ω элементарных событий ω, для которой при фиксированных условиях наблюдения $g \in G$ определена вероятностная мера, но для условий наблюдения вероятностная мера не определена. Значения x гиперслучайной величины X, как и в случае случайной величины, могут быть получены с помощью некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

Гиперслучайную величину X можно представить в виде множества случайных величин X / g: $X = \{X / g \in G\}$.

Гиперслучайные величины связаны со случайными величинами подобно тому, как векторные величины — со скалярными величинами: вектор может быть представлен множеством скалярных величин; гиперслучайная величина может быть охарактеризована множеством случайных величин. Частным случаем вектора является скаляр, частным случаем гиперслучайной величины — случайная величина.

6.2. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для описания гиперслучайной величины X можно использовать различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* X / g $(g \in G)$, например, *условные функции распределения* (рис. 6.1)

$$F(x / g) = P\{X < x / g\},$$

где $P\{X < x / g\}$ — вероятность выполнения неравенства $X < x$ в условиях g, *условные плотности вероятностей* (рис. 6.2)

$$f(x / g) = \frac{\mathrm{d}F(x / g)}{\mathrm{d}x},$$

условные характеристические функции

$$Q(\mathrm{j}\omega / g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x / g) \exp(\mathrm{j}\omega x) \mathrm{d}x,$$

образующие функции моментов, функции факториальных моментов и др.

В дальнейшем наряду с приведенными обозначениями условных функций распределения, условных плотностей вероятностей и условных характеристических функций будем использовать другие, эквивалентные им — $F_{x/g}(x)$, $f_{x/g}(x)$, $Q_{j\omega/g}(j\omega)$.

Наиболее полное описание гиперслучайной величины дает множество условных функций распределения для всех $g \in G$.

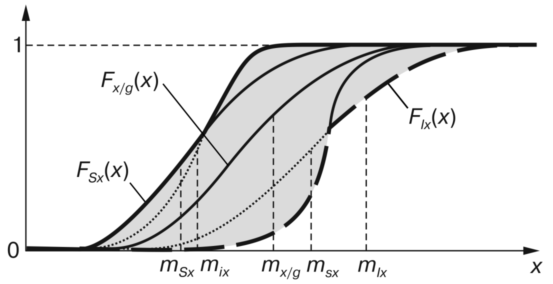


Рис. 6.1. Множество условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ (тонкие линии) и границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ (жирные линии) гиперслучайной величины X

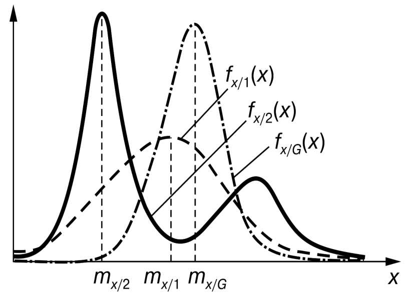


Рис. 6.2. Множество условных плотностей распределения $f_{x/g}(x)$ гиперслучайной величины X

Менее полное описание обеспечивают множества центральных и нецентральных моментов случайных величин X/g $\forall g \in G$, в частности, множества *условных математических ожиданий*

$$m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g)\,\mathrm{d}x,$$

множества *условных дисперсий*

$$D_{x/g} = \mathrm{D}[X/g] = \mathrm{M}[(X/g - m_{x/g})^2]$$

и пр., где $\mathrm{M}[\cdot]$ и $\mathrm{D}[\cdot]$ — операторы математического ожидания и дисперсии соответственно.

Для описания гиперслучайной величины X могут быть использованы также и другие характеристики и параметры.

6.3. ГРАНИЦЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ ГРАНИЦ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Общее представление о гиперслучайной величине дают функции

$$F_S(x) = \sup_{g \in G} P\{X < x/g\} = \sup_{g \in G} F(x/g),$$

$$F_I(x) = \inf_{g \in G} P\{X < x / g\} = \inf_{g \in G} F(x / g), \qquad (6.1)$$

представляющие собой соответственно верхнюю и нижнюю границы вероятности выполнения условия $X < x$, т. е. являющиеся *границами функции распределения* $F(x/g)$.

В дальнейшем наряду с приведенными обозначениями границ функции распределения будем использовать обозначения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, в которых принадлежность границ функции распределения определенной гиперслучайной величине подчеркнута соответствующим индексом (см. рис. 6.1).

Для того чтобы функция $F(x)$ могла быть функцией распределения некоторой случайной величины, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей при всех x, непрерывной слева и имела предельные значения $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ [Гнеденко, Колмогоров, 1949].

Рассмотрим гиперслучайную величину X со случайными величинами X / g, описываемыми функциями распределениями $F(x / g)$ $(g \in G)$. Все эти функции распределения неубывающие, непрерывные слева и их предельные значения равны нулю и единице. Границы функции распределения гиперслучайной величины, определяемые формулами (6.1), также удовлетворяют всем этим условиям. Поэтому границы функции распределения можно рассматривать как функции распределения неких виртуальных случайных величин.

Кроме того, $F_S(x) \geq F_I(x)$, при минимальном значении гиперслучайной величины (если оно существует) границы совпадают и равны нулю, а при максимальном значении (если оно существует) границы совпадают и равны единице.

Между границами функции распределения расположена *зона неопределенности* (затемненная область на рис. 6.3, *а*). Ее ширина определяется разностью $\Delta F(x) = F_S(x) - F_I(x)$: чем больше неопределенность, тем больше величина $\Delta F(x)$.

Вырожденный случай гиперслучайной величины — случайная величина. Для случайной величины X границы функции распределения совпадают с ее функцией распределения $F(x)$: $F_S(x) = F_I(x) = F(x)$ и разность $\Delta F(x)$ равна нулю (рис. 6.3, *б*).

Детерминированную величину a, как отмечалось в параграфе 3.1, приближенно можно рассматривать как случайную вели-

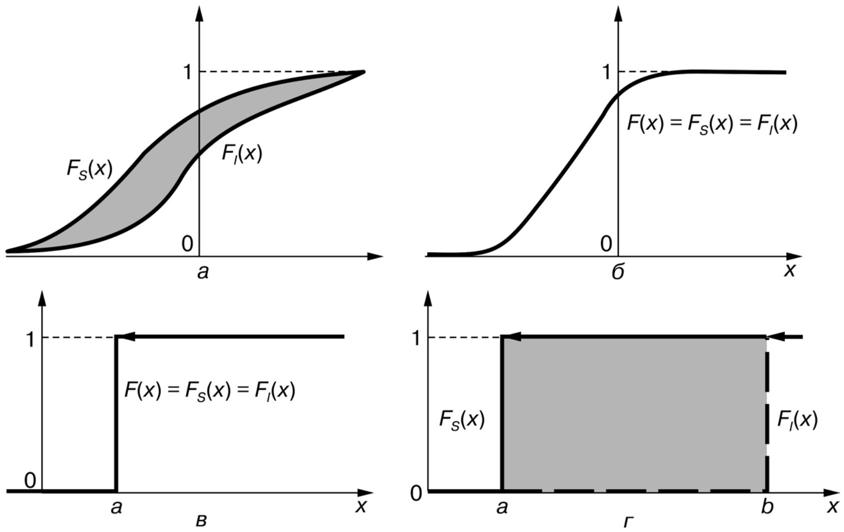


Рис. 6.3. Границы функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$ невырожденной гиперслучайной величины (*а*), случайной величины (*б*), детерминированной величины (*в*) и интервальной величины (*г*)

чину X, функция распределения $F(x)$ которой имеет вид единичного скачка в точке a: $F(x) = \operatorname{sign}[x - a]$ (рис. 6.3, *в*).

Интервальную величину, определяемую интервалом $[a,\ b]$, также можно рассматривать как гиперслучайную величину X, верхняя граница которой описывается функцией единичного скачка в точке a:

$$F_S(x) = \operatorname{sign}[x - a], \tag{6.2}$$

а нижняя — функцией единичного скачка в точке b:

$$F_I(x) = \operatorname{sign}[x - b] \tag{6.3}$$

(рис. 6.3, *г*).

Если $a \to -\infty$, а $b \to \infty$, то скачки верхней границы функции распределения стремятся к минус бесконечности, а нижней границы — к плюс бесконечности. Гиперслучайную величину с такими границами распределения можно рассматривать как полностью неопределенную или *хаотическую*.

Следует отметить, что определяемая таким образом хаотическая величина, если и имеет, то косвенное отношение к понятию *детерминированного хаоса*, широко используемого в литературе.

Таким образом, детерминированную, случайную и интервальную величины можно рассматривать как частные случаи гиперслучайной величины.

Гиперслучайную величину будем называть *непрерывной*, если на любом конечном интервале границы ее функции распределения непрерывны и существуют их кусочно-непрерывные производные.

Для непрерывной гиперслучайной величины аналогами плотности вероятностей случайной величины могут служить функции

$$f_S(x) = \frac{\mathrm{d}\, F_S(x)}{\mathrm{d}\, x}, \quad f_I(x) = \frac{\mathrm{d}\, F_I(x)}{\mathrm{d}\, x}, \tag{6.4}$$

представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения и называемые *плотностями распределения границ*.

Используя обобщенные функции, в частности δ-функцию, можно определить плотности распределения границ не только для непрерывных гиперслучайных величин, но и для тех, у которых границы функции распределения представляют собой кусочно-непрерывные функции, в том числе для функций (6.2), (6.3).

Нетрудно убедиться, что плотности распределения границ обладают свойствами плотности вероятностей случайной величины: поскольку $F_S(x)$ и $F_I(x)$ неубывающие, то плотности распределения границ неотрицательны ($f_S(x) \ge 0$, $f_I(x) \ge 0$), поскольку первообразные $F_S(x)$, $F_I(x)$ функций $f_S(x)$, $f_I(x)$ при $x \to \infty$ равны единице, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\mathrm{d}\, x = \int_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\mathrm{d}\, x = 1$$

и $$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_S(x)\mathrm{d}\, x\,, \quad F_I(x_2) - F_I(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_I(x)\mathrm{d}\, x\,.$$

Аналогами характеристической функции случайной величины могут служить *характеристические функции границ гиперслучайной величины*, под которыми понимается обратное преобразование Фурье плотностей распределения границ:

$$Q_S(\mathrm{j}\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}\,x,$$

$$Q_I(\mathrm{j}\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}\,x. \qquad (6.5)$$

Характеристические функции границ обладают свойствами характеристической функции: они ограничены ($|Q_S(\mathrm{j}\omega)| \le Q_S(0) = 1$, $|Q_I(\mathrm{j}\omega)| \le Q_I(0) = 1$) и в случае вещественных гиперслучайных величин обладают свойством комплексной сопряженности ($Q_S(-\mathrm{j}\omega) = Q_S^*(\mathrm{j}\omega)$, $Q_I(-\mathrm{j}\omega) = Q_I^*(\mathrm{j}\omega)$).

Здесь и далее звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

В отличие от границ функции распределения, плотности распределения границ и характеристические функции границ не столь наглядно характеризуют зону неопределенности, хотя с их помощью можно определить полезные в некоторых случаях величины, например $\Delta f(x) = f_S(x) - f_I(x)$.

Информативными характеристиками являются *средние границ*: *среднее границ функции распределения*

$$F_0(x) = (F_S(x) + F_I(x))/2$$

и *среднее плотностей распределения границ*

$$f_0(x) = (f_S(x) + f_I(x))/2\,.$$

Эти средние связаны между собой очевидным соотношением:

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{d}\,F_0(x)}{\mathrm{d}\,x}\,.$$

Для описания гиперслучайных величин могут быть использованы *моменты границ распределения*: математические ожидания границ, дисперсии границ, среднеквадратические отклонения границ и др.

Математическими ожиданиями границ $\mathrm{M}_S[\varphi(X)]$, $\mathrm{M}_I[\varphi(X)]$ *функции* $\varphi(X)$ гиперслучайной величины X с плотностями распределения границ $f_S(x)$, $f_I(x)$ будем называть интегралы

$$\mathrm{M}_S[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_S(x) \mathrm{d}\, x,$$

$$\mathrm{M}_I[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_I(x) \mathrm{d}\, x. \qquad (6.6)$$

Математические ожидания границ существуют не всегда: только когда существуют (в смысле абсолютной сходимости) интегралы (6.6).

Из выражений (6.5), (6.6) видно, что характеристические функции границ — это верхняя и нижняя границы математического ожидания комплексной гиперслучайной величины $\exp(\mathrm{j}\omega X)$. Из выражений (6.6) следует, что *математические ожидания границ* m_{Sx}, m_{Ix} *гиперслучайной величины X*, представляемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X$, описываются выражениями

$$m_{Sx} = \mathrm{M}_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_S(x) \mathrm{d}\, x, \; m_{Ix} = \mathrm{M}_I[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_I(x) \mathrm{d}\, x \qquad (6.7)$$

(см. рис. 6.1).

Для вещественной гиперслучайной величины X *дисперсии границ* D_{Sx} и D_{Ix} можно определить как

$$D_{Sx} = \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Sx})^2\right], \quad D_{Ix} = \mathrm{M}_I\left[(X - m_{Ix})^2\right], \qquad (6.8)$$

а *среднеквадратические отклонения границ* σ_{Sx} и σ_{Ix} — как

$$\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}, \quad \sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}. \qquad (6.9)$$

Математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} гиперслучайной величины X характеризуют средние значения X, рассчитанные для верхней и нижней границ распределения. Дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix} величины X, а также среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx} и σ_{Ix} величины X характеризуют разброс значений X относительно соответствующих математических ожиданий m_{Sx} и m_{Ix}.

Учитывая, что при $F_S(x_1) = F_I(x_2)$ имеет место неравенство $x_1 \le x_2$, нетрудно показать, что $m_{Sx} \le m_{Ix}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда гиперслучайная величина X вырождается в случайную величину. Величина же дисперсии D_{Sx} может быть больше, меньше или равна величине D_{Ix}.

В качестве интегральных характеристик можно использовать также *среднее математических ожиданий границ функции* $\varphi(X)$, определяемое как

$$\mathrm{M}_0\left[\varphi(X)\right]=(\mathrm{M}_S\left[\varphi(X)\right]+\mathrm{M}_I\left[\varphi(X)\right])/2,$$

среднее математических ожиданий границ гиперслучайной величины X, определяемое как $m_{0x}=(m_{Sx}+m_{Ix})/2$, *среднее дисперсий границ* $D_{0x}=\mathrm{M}_0\left[(X-m_{0x})^2\right]$ и *среднее среднеквадратических отклонений границ* $\sigma_{0x}=\sqrt{D_{0x}}$.

Представление о гиперслучайной величине дают и другие характеристики, в частности, *начальные моменты границ* $m_{Sx\nu}$ и $m_{Ix\nu}$ ν-го порядка, определяемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X)=X^{\nu}$, *центральные моменты границ* $\mu_{Sx\nu}$ и $\mu_{Ix\nu}$ ν-го порядка, определяемые как математические ожидания соответственно границ функций $\varphi(X)=(X-m_{Sx})^{\nu}$ и $\varphi(X)=$ $=(X-m_{Ix})^{\nu}$ и др.

6.4. ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для описания гиперслучайных величин могут применяться характеристики и параметры другого типа, не основанные на границах функции распределения, например, *границы плотности распределения*, определяемые для скалярной вещественной величины X следующим образом:

$$f_s(x)=\sup_{g\in G} f(x/g),\quad f_i(x)=\inf_{g\in G} f(x/g),$$

где $f(x/g)$ — плотность распределения гиперслучайной величины X при условии $g\in G$.

Наряду с приведенными обозначениями границ плотности распределения будем использовать эквивалентные $f_{sx}(x), f_{ix}(x)$, в которых факт принадлежности к соответствующей гиперслучайной величине отражен в индексе.

Для описания можно использовать также *границы моментов*.

Границы математического ожидания функции $\varphi(X)$ *гиперслучайной величины* X определим следующим образом:

$$\mathrm{M}_s[\varphi(X)] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g) \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{M}_i[\varphi(X)] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g) \mathrm{d}x. \qquad (6.10)$$

К числу границ моментов относятся *верхняя и нижняя границы начального момента* ν-го порядка:

$$m_{sx\nu} = \mathrm{M}_s[X^\nu] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g) \mathrm{d}x,$$

$$m_{ix\nu} = \mathrm{M}_i[X^\nu] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g) \mathrm{d}x, \qquad (6.11)$$

а также *границы центрального момента* ν-го порядка:

$$\mu_{sx\nu} = \mathrm{M}_s[(X - m_{x/g})^\nu] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) \mathrm{d}x,$$

$$\mu_{ix\nu} = \mathrm{M}_i[(X - m_{x/g})^\nu] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) \mathrm{d}x, \qquad (6.12)$$

где $m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g]$ — математическое ожидание распределения в условиях g.

Частным случаем границ моментов являются *границы математического ожидания гиперслучайной величины* X:

$$m_{sx} = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) \mathrm{d}x, \quad m_{ix} = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) \mathrm{d}x \qquad (6.13)$$

(см. рис. 6.1).

Границы математического ожидания, как следует из выражений (6.10) и (6.11), являются границами начального момента первого порядка. Границами центрального момента второго порядка являются *границы дисперсии* $D_{sx} = \mu_{sx2}$, $D_{ix} = \mu_{ix2}$. Корни из этих величин $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$, $\sigma_{ix} = \sqrt{D_{ix}}$ представляют собой *границы среднеквадратического отклонения*.

6.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ГРАНИЦАМИ МОМЕНТОВ И МОМЕНТАМИ ГРАНИЦ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В общем случае операторы $\mathrm{M}_s[\cdot]$, $\mathrm{M}_i[\cdot]$ не совпадают с операторами $\mathrm{M}_S[\cdot]$, $\mathrm{M}_I[\cdot]$, а границы моментов гиперслучайной величины $m_{sx\nu}$, $m_{ix\nu}$, $\mu_{sx\nu}$, $\mu_{ix\nu}$ не совпадают с моментами границ функции распределения $m_{Sx\nu}$, $m_{Ix\nu}$, $\mu_{Sx\nu}$, $\mu_{Ix\nu}$.

Заметим, что как границы плотности распределений, так и границы моментов несут информацию не о границах функции распределения, а о диапазоне изменения соответствующих характеристик при изменении условий g в пределах множества условий G. Границы плотности распределения и плотности распределения границ — разные характеристики, а границы моментов и моменты границ — разные параметры, по-разному представляющие гиперслучайную величину.

Для пояснения причин возможных отличий границ характеристик от соответствующих характеристик границ на рис. 6.4 приведены несколько примеров функции распределения гиперслучайной величины X.

Из рисунка видно, что условные функции распределения могут не пересекаться (рис. 6.4, *а*, *б*), а могут пересекаться между собой (рис. 6.4, *в*, *г*). В случаях «*а*» и «*б*» границы двух первых моментов совпадают с соответствующими моментами границ, в случае «*в*» наблюдается частичное, а в случае «*г*» — полное несовпадение соответствующих характеристик.

Если существуют минимальные и максимальные значения математических ожиданий гиперслучайной величины, то математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} связаны с границами математических ожиданий m_{ix} и m_{sx} неравенством

$$m_{Sx} \le m_{ix} \le m_{sx} \le m_{Ix} .$$

Доказательство базируется на следующих соображениях.

Пусть $F_{Sx}(x)$ и $F_{Ix}(x)$ — границы функции распределения гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$, m_{Sx} и m_{Ix} — математические ожидания этих границ, $F_{ix}(x)$ и $F_{sx}(x)$ — функции распределения случайных величин (из числа образующих гиперслучайную величину $X = \{X / g \in G\}$) с математическими ожиданиями соответственно m_{ix} и m_{sx}.

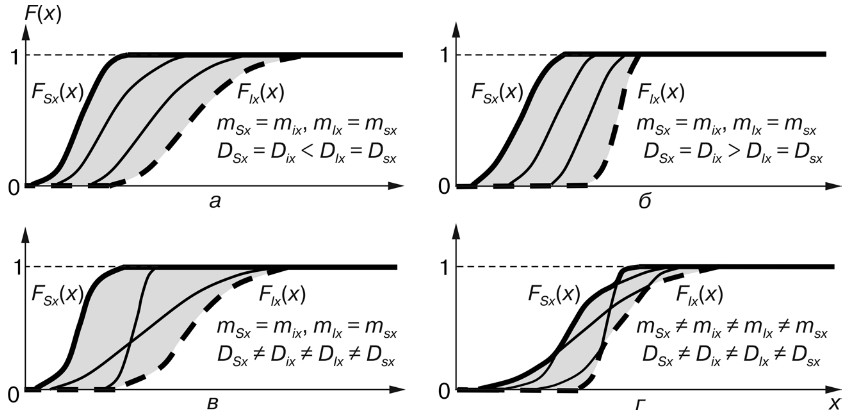


Рис. 6.4. Различные типы функции распределения. Тонкими линиями изображены условные функции распределения $F(x/g)$, а жирными — границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$

На некоторых участках функции $F_{Sx}(x)$ и $F_{ix}(x)$ могут совпадать, на некоторых — не совпадать. На интервалах, где они не совпадают, кривая $F_{Sx}(x)$ располагается левее кривой $F_{ix}(x)$. Поэтому

$$\int_0^1 x\mathrm{d}\, F_{Sx}(x) \leq \int_0^1 x\mathrm{d}\, F_{ix}(x)\,,$$

т. е. $m_{ix} \geq m_{Sx}$.

Аналогично доказывается неравенство $m_{sx} \leq m_{Ix}$.

Глава 7

ВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Введено понятие векторной гиперслучайной величины. Методы описания скалярной гиперслучайной величины обобщены на случай векторной гиперслучайной величины. Исследованы свойства характеристик и параметров векторных гиперслучайных величин.

7.1. ВЕКТОРНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, ЕЕ УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОМЕНТЫ

Материалы шестой главы обобщаются на *векторные гиперслучайные величины*, каждая компонента которых представляет собой скалярную гиперслучайную величину.

M-мерную векторную гиперслучайную величину $\vec{X}$ будем рассматривать как множество векторных случайных величин $\{\vec{X}/g \in G\}$ или как вектор, состоящий из M скалярных гиперслучайных величин X_m $(m = \overline{1, M})$.

Для описания векторной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_M)$ можно использовать различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* $\vec{X}/g$ $(g \in G)$, например, *условные функции распределения*:

$$F(\vec{x}/g) = F(x_1, \ldots, x_M/g) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M/g\},$$

где $P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M/g\}$ — вероятность выполнения неравенств $X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M$ в условиях g, *условные плотности вероятностей:*

$$f(\vec{x}/g) = \frac{\partial^M F(\vec{x}/g)}{\partial x_1 \ldots \partial x_M},$$

условные характеристические функции:

$$Q(\mathrm{j}\vec{\omega}/g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}/g)\exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\,\vec{x})\mathrm{d}\,\vec{x}\,,$$

условные образующие функции моментов, условные образующие функции факториальных моментов и др.

Множество любых из этих условных характеристик для всех $g \in G$ дает наиболее полное описание векторной гиперслучайной величины.

Менее полное описание обеспечивают центральные и нецентральные моменты случайных величин $\vec{X}/g \quad \forall g \in G$.

Основными числовыми характеристиками векторной L-мерной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, \dots, X_L)$ с условными плотностями распределения $f(x_1, \dots, x_L / g)$ являются *условные математические ожидания* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ для всех $g \in G$, определяемые как

$$\mathrm{M}\left[\vec{\varphi}(\vec{X})/g\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1, \dots, x_L) f(x_1, \dots, x_L / g)\mathrm{d}\,x_1 \dots \mathrm{d}\,x_L$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем этих характеристик является *вектор условных математических ожиданий* $\vec{m}_{\vec{x}/g} = \mathrm{M}\left[\vec{X}/g\right]$ *случайных векторов* $\vec{X}/g$.

Для L-мерного *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса может служить *вектор условных дисперсий* $\vec{D}_{\vec{x}/g}$, представляющий собой математическое ожидание функций

$$\vec{\varphi}(\vec{X}/g) = ((X_l / g - m_{x_l/g})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

и *вектор условных среднеквадратических отклонений* $\vec{\sigma}_{\vec{x}/g}$, компоненты которых определяются как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{\vec{x}/g}$, где $m_{x_l/g}$ — l-е компоненты векторов $\vec{m}_{\vec{x}/g}$.

Весьма полезными характеристиками L-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ могут быть *условные начальные моменты* $m_{\vec{x}/g\nu_1 \dots \nu_L}$

порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые следующим образом:

$$m_{\vec{x}/g\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}\left[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L} / g \right]$$

(ν_l — целое положительное число, $l = \overline{1, L}$), а также *условные центральные моменты* $\mu_{\vec{x}/g\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{\vec{x}/g\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}\left[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L} / g \right].$$

Смешанные условные центральные моменты второго порядка $\mu_{x_1 x_2 / g}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 можно назвать *условными ковариационными моментами*, смешанные условные начальные моменты второго порядка $m_{x_1 x_2 / g}$ — *условными корреляционными моментами*, а смешанные центральные моменты второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения $\sigma_{x_1/g}$ и $\sigma_{x_2/g}$, — *условными коэффициентами корреляции*:

$$r_{x_1 x_2 / g} = \frac{\mu_{x_1 x_2 / g}}{\sigma_{x_1/g} \sigma_{x_2/g}}.$$

Условные ковариационные моменты $\mu_{x_1 x_2 / g}$, условные корреляционные моменты $m_{x_1 x_2 / g}$ и условные математические ожидания $m_{x_1/g}$, $m_{x_2/g}$ гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\mu_{x_1 x_2 / g} = m_{x_1 x_2 / g} - m_{x_1/g} m_{x_2/g}.$$

Векторные гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ будем называть *независимыми при всех условиях* $g \in G$, если факторизуются все условные функции распределения: $f(\vec{x}, \vec{y} / g) = f(\vec{x} / g) f(\vec{y} / g)$ $\forall g \in G$.

Для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ при всех условиях $g \in G$ факторизуются не только все условные плотности распределения, но и все условные функции распределения, и все условные характеристические функции:

$$F(\vec{x}, \vec{y} / g) = F(\vec{x} / g) F(\vec{y} / g),$$

$$Q(\mathrm{j}\vec{\omega}_x, \mathrm{j}\vec{\omega}_y / g) = Q(\mathrm{j}\vec{\omega}_x / g)\, Q(\mathrm{j}\vec{\omega}_y / g)\,.$$

Следует обратить внимание на то, что независимость гиперслучайных величин при всех условиях не означает, что между этими величинами отсутствует связь. Просто на уровне рассматриваемых характеристик она не проявляется.

Уместно отметить, что понятие независимости случайных величин следует трактовать так же: связь между рассматриваемыми величинами может существовать, хотя на уровне вероятностной меры она не проявляется.

7.2. ГРАНИЦЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ ГРАНИЦ ВЕКТОРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Границы функции распределения векторной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_M)$ определим как

$$F_S(\vec{x}) = \sup_{g \in G} P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\}, \tag{7.1}$$

$$F_I(\vec{x}) = \inf_{g \in G} P\{X_1 < x_1, \ldots, X_M < x_M / g\}, \tag{7.2}$$

плотности распределения границ — как

$$f_S(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_S(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \quad f_I(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_I(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \tag{7.3}$$

а *характеристические функции границ* — как

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\, \vec{x}) \mathrm{d}\, \vec{x},$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\, \vec{x}) \mathrm{d}\, \vec{x}.$$

Здесь уместно будет сделать некоторое отступление.

Известно, что для того чтобы функция $F(\vec{x})$ могла быть функцией распределения некоторой M-мерной случайной величины $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_M)$, где $M \geq 2$, необходимо, чтобы она была неубывающей по каждому аргументу, непрерывной слева по каждому аргументу и удовлетворяла соотношениям $F(+\infty, \ldots, +\infty)$,

$\lim\limits_{x_m \to -\infty} F(x_1,\dots,x_M) = 0$ $(1 \le m \le M)$. Однако, этих свойств не достаточно. Для того чтобы $F(\vec{x})$ была функцией распределения, необходимо и достаточно, чтобы кроме перечисленных трех свойств, аналогичных одномерному случаю, выполнялось еще одно, четвертое, требование: при любых $\vec{a} = (a_1,\dots,a_M)$ и $\vec{b} = (b_1,\dots,b_M)$ ($a_1 \le b_1,\dots,a_M \le b_M$) выражение

$$P\{\vec{a} \le \vec{x} < \vec{b}\} = F(\vec{b}) - \sum_{m=1}^{M} p_m + \sum_{m<n} p_{mn} + \dots + (-1)^M F(\vec{a})$$

должно быть неотрицательным, где $p_{mn\dots k}$ — значение функции $F(c_1,c_2,\dots,c_M)$ при $c_m = a_m$, $c_n = a_n$, ..., $c_k = a_k$ и при остальных c_s, равных b_s [Гнеденко, 1988].

Смысл четвертого требования очевиден: вероятность нахождения случайной величины $\vec{X}$ в многомерном параллелепипеде $\vec{a} \le \vec{X} < \vec{b}$ не может быть отрицательной величиной.

Боле глубокий смысл этого требования раскрывается при рассмотрении двумерной случайной величины. В этом случае вероятность нахождения случайной величины в прямоугольнике с вершинами (a_1,a_2), (b_1,a_2), (b_1,b_2), (a_1,b_2) описывается выражением

$$P\{\vec{a} \le \vec{x} < \vec{b}\} = \Delta F_{b_2} - \Delta F_{a_2},$$

где $\Delta F_{b_2} = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2)$, $\Delta F_{a_2} = F(b_1,a_2) - F(a_1,a_2)$ — приращения функции $F(\vec{x})$ в сечениях $x_2 = b_2$ и $x_2 = a_2$ соответственно.

Величина, описывающая эту вероятность, неотрицательна, если приращения функции $F(\vec{x})$ в сечении $x_2 = b_2$ не меньше, чем ее в приращение в сечении $x_2 = a_2$ ($\Delta F_{b_2} \ge \Delta F_{a_2}$). Понятно, что аналогичное требование можно сформулировать по отношению сечений вдоль оси x_1.

Обобщая, для двумерного случая можно сформулировать четвертое требование следующим образом: по мере увеличения любой координаты приращение функции $F(\vec{x})$ в сечениях не должно уменьшаться.

Заметим, что для $M \ge 3$ четвертое требование, в принципе, также может быть сформулировано на основании понятий приращений. Однако, углубляться далее в этот вопрос, на наш взгляд, не имеет смысла, поскольку распределения большой мерности на практике используются крайне редко.

Перечисленные четыре требования касаются не только функции распределения случайной величины, но и границ функции распределения векторной гиперслучайной величины.

Заметим, что не каждая функция $F_S(\vec{x})$ или $F_I(\vec{x})$, полученная путем расчета границ, удовлетворяет всем необходимым и достаточным требованиям, чтобы быть функцией неопределенности какой-то случайной величины.

В дальнейшем будем исходить из того, что все четыре условия выполняются для обеих границ.

В этом случае пары характеристик обладают свойствами, присущими соответственно функции распределения, плотности вероятностей и характеристической функции векторной случайной величины, а также свойствами, характерными для соответствующих пар характеристик скалярной гиперслучайной величины. В частности $F_S(\vec{x}) \geq F_I(\vec{x})$, причем границы гиперслучайной величины стремятся к совпадению при устремлении компонент вектора $\vec{x}$ к минус бесконечности и плюс бесконечности.

Рассмотрим L-мерную гиперслучайную величину $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$, состоящую из M-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ и $(L - M)$-мерной гиперслучайной величины $\vec{Y}$. Введем понятия *границ условной функции распределения* $F_S(\vec{y}/\vec{x})$, $F_I(\vec{y}/\vec{x})$, *условных плотностей распределения границ* $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ и *условных характеристических функций границ* $Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_y/\vec{x})$, $Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_y/\vec{x})$ *гиперслучайной величины* $\vec{Y}$ при условии, что гиперслучайная величина $\vec{X}$ приняла конкретное значение $\vec{x}$.

Совместные плотности распределения границ $f_S(\vec{x}, \vec{y})$, $f_I(\vec{x}, \vec{y})$ системы гиперслучайных величин $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$ связаны с условными плотностями распределения границ $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ и плотностями распределения границ $f_S(\vec{x})$, $f_I(\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{X}$ неравенствами

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) \leq f_S(\vec{x}) f_S(\vec{y}/\vec{x}), \qquad f_I(\vec{x}, \vec{y}) \geq f_I(\vec{x}) f_I(\vec{y}/\vec{x}), \tag{7.4}$$

следующими из выражений (5.10).

Гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ будем называть *независимыми*, если плотности распределения границ $f_S(\vec{x},\vec{y})$ и $f_I(\vec{x},\vec{y})$ допускают факторизацию:

$$f_S(\vec{x},\vec{y}) = f_S(\vec{x})f_S(\vec{y}), \quad f_I(\vec{x},\vec{y}) = f_I(\vec{x})f_I(\vec{y}). \tag{7.5}$$

Нетрудно убедиться, что для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ факторизуются не только плотности распределения границ, но также границы функции распределения и характеристические функции границ:

$$F_S(\vec{x},\vec{y}) = F_S(\vec{x})F_S(\vec{y}), \quad F_I(\vec{x},\vec{y}) = F_I(\vec{x})F_I(\vec{y}),$$

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_x,\mathrm{j}\vec{\omega}_y) = Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_x)Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_y),$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_x,\mathrm{j}\vec{\omega}_y) = Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_x)Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_y).$$

Заметим, что независимость гиперслучайных величин и их независимость при всех условиях — разные понятия.

Плотности распределения границ M-мерной гиперслучайной величины $(X_1,\ldots,X_M)$ определяются следующими неравенствами:

$$f_S(x_1,\ \ldots,x_M) \le f_S(x_M/x_1,\ \ldots,x_{M-1})\ldots f_S(x_2/x_1)f_S(x_1), \tag{7.6}$$

$$f_I(x_1,\ \ldots,x_M) \ge f_I(x_M/x_1,\ \ldots,x_{M-1})\ldots f_I(x_2/x_1)f_I(x_1). \tag{7.7}$$

Здесь $f_S(x_m/x_1,\ldots,x_{m-1})$, $f_I(x_m/x_1,\ldots,x_{m-1})$ $(m=\overline{2,M})$ — одномерные условные плотности распределения границ; $f_S(x_1)$, $f_I(x_1)$ — одномерные безусловные плотности распределения границ. Доказательство этих неравенств может быть проведено методом математической индукции с использованием неравенств (7.4).

Отметим, что в случае независимых компонент гиперслучайной величины

$$f_S(x_1,\ldots,x_M) = f_S(x_1)\ldots f_S(x_M),$$

$$f_I(x_1,\ldots,x_M) = f_I(x_1)\ldots f_I(x_M).$$

Для M-мерного *гиперслучайного вектора* можно определить *среднее границ функции распределения* и *среднее плотностей распределения границ* соответственно следующим образом:

$$F_0(\vec{x}) = (F_S(\vec{x}) + F_I(\vec{x}))/2,$$

$$f_0(\vec{x}) = (f_S(\vec{x}) + f_I(\vec{x}))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями, аналогичными скалярному случаю:

$$f_0(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_0(\vec{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_M}.$$

В качестве основных числовых характеристик векторных гиперслучайных величин можно использовать *математические ожидания границ* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ *гиперслучайной* L-мерной *величины* $\vec{X} = (X_1, \dots, X_L)$ с плотностями распределения границ $f_S(x_1, \dots, x_L)$ и $f_I(x_1, \dots, x_L)$, определяемые как

$$\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1, \dots, x_L) f_S(x_1, \dots, x_L) \mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_L, \quad (7.8)$$

$$\mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varphi}(x_1, \dots, x_L) f_I(x_1, \dots, x_L) \mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_L \quad (7.9)$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем характеристик (7.8), (7.9) являются *математические ожидания границ* $\vec{m}_{S\vec{x}}$ и $\vec{m}_{I\vec{x}}$ *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$, представляющие собой математические ожидания границ функции $\vec{\varphi}(\vec{X}) = \vec{X}$:

$$\vec{m}_{S\vec{x}} = \mathrm{M}_S\left[\vec{X}\right], \qquad \vec{m}_{I\vec{x}} = \mathrm{M}_I\left[\vec{X}\right]. \quad (7.10)$$

Для L-мерного *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса могут служить *дисперсии границ* $\vec{D}_{S\vec{x}}$, $\vec{D}_{I\vec{x}}$, представляющие собой математические ожидания границ соответственно функций

$$\vec{\varphi}_S(\vec{X}) = ((X_l - m_{Sx_l})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

$$\vec{\varphi}_I(\vec{X}) = ((X_l - m_{Ix_l})^2, \quad l = \overline{1, L})$$

и *среднеквадратические отклонения* $\vec{\sigma}_{S\vec{x}}$, $\vec{\sigma}_{I\vec{x}}$ *границ*, компоненты которых определены как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{S\vec{x}}$, $\vec{D}_{I\vec{x}}$, где m_{Sx_l} и m_{Ix_l} — l-е компоненты векторов $\vec{m}_{S\vec{x}}$ и $\vec{m}_{I\vec{x}}$ соответственно.

Полезными характеристиками могут быть *начальные моменты границ* $m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ и $m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ L-мерной гиперслучайной вещественной величины $\vec{X}$, определяемые следующим образом:

$$m_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right],$$

$$m_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[X_1^{\nu_1}\ldots X_L^{\nu_L}\right] \qquad (7.11)$$

(ν_l — целое положительное число, $l = \overline{1, L}$), а также *центральные моменты границ* $\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ и $\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{S\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_S\left[(X_1 - m_{Sx_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Sx_L})^{\nu_L}\right], \qquad (7.12)$$

$$\mu_{I\vec{x}\nu_1\ldots\nu_L} = \mathrm{M}_I\left[(X_1 - m_{Ix_1})^{\nu_1}\ldots(X_L - m_{Ix_L})^{\nu_L}\right]. \qquad (7.13)$$

Смешанные центральные моменты границ второго порядка $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 можно назвать *ковариационными моментами границ*, смешанные начальные моменты границ второго порядка $m_{Sx_1x_2}$ и $m_{Ix_1x_2}$ — *корреляционными моментами границ*, а смешанные центральные моменты второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения σ_{Sx_1}, σ_{Sx_2} и σ_{Ix_1}, σ_{Ix_2} границ, — *коэффициентами корреляции границ*

$$r_{Sx_1x_2} = \frac{\mu_{Sx_1x_2}}{\sigma_{Sx_1}\sigma_{Sx_2}}, \qquad r_{Ix_1x_2} = \frac{\mu_{Ix_1x_2}}{\sigma_{Ix_1}\sigma_{Ix_2}}. \qquad (7.14)$$

Ковариационные моменты границ $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$, корреляционные моменты границ $m_{Sx_1x_2}$ и $m_{Ix_1x_2}$ и математические ожидания границ m_{Sx_1}, m_{Sx_2}, m_{Ix_1} и m_{Ix_2} гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\mu_{Sx_1x_2} = m_{Sx_1x_2} - m_{Sx_1}m_{Sx_2}, \quad \mu_{Ix_1x_2} = m_{Ix_1x_2} - m_{Ix_1}m_{Ix_2}, \qquad (7.15)$$

аналогичными известному соотношению для случайных величин.

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *некоррелированными*, если их ковариационные моменты границ равны нулю: $\mu_{Sx_1x_2} = \mu_{Ix_1x_2} = 0$. При этом $r_{Sx_1x_2} = r_{Ix_1x_2} = 0$ и корреляционные моменты границ, согласно выражению (7.15), связаны следующими зависимостями с математическими ожиданиями границ:

$$m_{Sx_1x_2} = m_{Sx_1} m_{Sx_2}\,, \quad m_{Ix_1x_2} = m_{Ix_1} m_{Ix_2}\,.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *ортогональными*, если корреляционные моменты границ равны нулю: $m_{Sx_1x_2} = m_{Ix_1x_2} = 0$. При этом ковариационные моменты границ $\mu_{Sx_1x_2}$ и $\mu_{Ix_1x_2}$, как видно из выражения (7.15), оказываются связанными с математическими ожиданиями границ следующим образом:

$$\mu_{Sx_1x_2} = -m_{Sx_1} m_{Sx_2}\,, \quad \mu_{Ix_1x_2} = -m_{Ix_1} m_{Ix_2}\,.$$

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы, то при гауссовских законах распределения границ оси *эллипсов рассеяния* ориентированы вдоль осей координат. Если существует линейная зависимость между этими величинами, то $r_{Sx_1x_2} = r_{Ix_1x_2} = 1$ и эллипсы рассеяния вырождаются в отрезки прямых

$$x_2 = \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} x_1 + \left(m_{Sx_2} - \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} m_{Sx_1} \right), \; x_2 = \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} x_1 + \left(m_{Ix_2} - \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} m_{Ix_1} \right).$$

Нетрудно убедиться, что из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

В векторном случае для средних границ функции распределения можно ввести следующие характеристики: *вектор среднего математических ожиданий границ функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$:

$$\mathrm{M}_0\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] = (\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right] + \mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right])/2,$$

вектор среднего математических ожиданий границ гиперслучайного вектора $\vec{X}$: $\vec{m}_{0\vec{x}} = (\vec{m}_{S\vec{x}} + \vec{m}_{I\vec{x}})/2$, *вектор среднего дисперсий границ* $\vec{D}_{0\vec{x}} = (\mathrm{M}_0\left[(X_l - m_{0x_l})^2\right],\; l = \overline{1, L})$, *вектор среднего среднеквадратических отклонений границ* $\vec{\sigma}_{0\vec{x}}$, компоненты которого равны корню из компонент дисперсии $\vec{D}_{0\vec{x}}$, *среднее начальных моментов границ*

$$m_{0\vec{x}\nu_1...\nu_L} = (m_{S\vec{x}\nu_1...\nu_L} + m_{I\vec{x}\nu_1...\nu_L})/2,$$

среднее центральных моментов границ

$$\mu_{0\vec{x}\nu_1...\nu_L} = (\mu_{S\vec{x}\nu_1...\nu_L} + \mu_{I\vec{x}\nu_1...\nu_L})/2$$

и др.

Для гиперслучайных скалярных величин X_1 и X_2 очевидным образом можно ввести *среднее ковариационных моментов границ* $\mu_{0x_1x_2} = (\mu_{Sx_1x_2} + \mu_{Ix_1x_2})/2$ и *среднее корреляционных моментов границ* $m_{0x_1x_2} = (m_{Sx_1x_2} + m_{Ix_1x_2})/2$. Если гиперслучайные величины некоррелированы, то среднее ковариационных моментов границ $\mu_{0x_1x_2}$ равно нулю, если же они ортогональны, то равно нулю среднее корреляционных моментов $m_{0x_1x_2}$.

Кроме указанных характеристик, можно использовать и другие параметры, аналогичные применяемым при описании скалярных гиперслучайных величин.

7.3. ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ ВЕКТОРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определим для L-мерной *гиперслучайной величины* $\vec{X}$ *границы математического ожидания* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ следующим образом:

$$\mathrm{M}_s[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1,...,x_L) f(x_1,...,x_L / g) \mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_L \, \vec{e}_m,$$

$$\mathrm{M}_i[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1,...,x_L) f(x_1,...,x_L / g) \mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_L \, \vec{e}_m,$$

где $\varphi_m(x_1,...,x_L)$ — m-я компонента вектора $\vec{\varphi}(x_1,...,x_L / g)$, $\vec{e}_m$ — m-й орт этого вектора.

К таким параметрам относятся *границы* L-мерного *математического ожидания* $\vec{m}_{s\vec{x}}$, $\vec{m}_{i\vec{x}}$ *векторной гиперслучайной величины* $\vec{X}$: $\vec{m}_{s\vec{x}} = \mathrm{M}_s[\vec{X}]$, $\vec{m}_{i\vec{x}} = \mathrm{M}_i[\vec{X}]$ и *границы* L-мерной *дисперсии*:

$$\vec{D}_{s\vec{x}} = \mathrm{M}_s[(X_l - m_{x_l/g})^2, \ l = \overline{1,L}], \ \vec{D}_{i\vec{x}} = \mathrm{M}_i[(X_l - m_{x_l/g})^2, \ l = \overline{1,L}],$$

где $m_{x_l/g}$ — l-я компонента вектора условного математического ожидания $\vec{m}_{\vec{x}/g} = \mathrm{M}[\vec{X}/g]$.

С помощью границ дисперсии $\vec{D}_{s\vec{x}}$, $\vec{D}_{i\vec{x}}$ можно определить *границы* L-мерного *среднеквадратического отклонения* $\vec{\sigma}_{s\vec{x}}, \vec{\sigma}_{i\vec{x}}$ как векторы, компоненты которых представляют собой корни из компонент соответствующих границ дисперсии.

Параметрами векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$ являются *границы начальных моментов* $m_{s\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{i\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$m_{s\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_s[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L}], \quad m_{i\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_i[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L}],$$

и *границы центральных моментов* $\mu_{s\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{i\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{s\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_s[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\vec{x}\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_i[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}].$$

В двумерном случае $(L = 2)$ *границы смешанного начального момента второго порядка* $m_{sx_1x_2}$ и $m_{ix_1x_2}$ будем называть *границами корреляционного момента* и обозначать $K_{sx_1x_2}$ и $K_{ix_1x_2}$, а *границы смешанного центрального момента второго порядка* $\mu_{sx_1x_2}$ и $\mu_{ix_1x_2}$ — *границами ковариационного момента* и обозначать $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$.

Границы коэффициента корреляции определим как

$$r_{sx_1x_2} = \sup_{g \in G} \frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}, \quad r_{ix_1x_2} = \inf_{g \in G} \frac{R_{x_1x_2/g}}{\sigma_{x_1/g}\sigma_{x_2/g}}.$$

Границы моментов находятся в результате отбора экстремальных значений из множества значений, соответствующих разным условиям $g \in G$. При этом разным границам моментов соответствуют в общем случае разные условия g. Поэтому в общем случае границы ковариационного момента

$$R_{sx_1x_2} \neq K_{sx_1x_2} - m_{sx_1}m_{sx_2}, \quad R_{ix_1x_2} \neq K_{ix_1x_2} - m_{ix_1}m_{ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *некоррелированными при всех условиях*, если границы их ковариационных моментов $R_{sx_1x_2}$ и $R_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *ортогональными при всех условиях*, если границы их корреляционных моментов $K_{sx_1x_2}$ и $K_{ix_1x_2}$ равны нулю.

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы при всех условиях и условные законы распределения — гауссовские, то оси *эллипсов рассеяния* ориентированы вдоль осей координат.

Из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 при всех условиях следует их некоррелированность при всех условиях. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях отличаются от понятий некоррелированности и ортогональности, связанных с равенством нулю соответственно ковариационных и корреляционных моментов границ функции распределения.

Следует обратить внимание на то, что совокупность границ моментов, в отличие от совокупности моментов границ распределения, не определяет границы функции распределения.

Границы моментов не используют информацию о границах функции распределения. Поэтому их расчет требует, как правило, меньших вычислительных затрат, чем расчет моментов границ.

Для интегральной характеристики гиперслучайных величин можно использовать также средние границ параметров.

7.4. ПАРАМЕТРЫ СКАЛЯРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Условные корреляционные моменты $m_{\dot{z}/g}$ *комплексной гиперслучайной величины* $\dot{Z} = X + \mathrm{j}Y$ можно определить как условные математические ожидания произведения действительной и мнимой частей условной величины $\dot{Z}/g$: $m_{\dot{z}/g} = \mathrm{M}[XY/g]$, а *условные ковариационные моменты* $\mu_{\dot{z}/g}$ — как условные математические ожидания произведения ее центрированных вещественной и мнимой частей:

$$\mu_{\dot{z}/g} = \mathrm{M}[(X/g - m_{x/g})(Y/g - m_{y/g})].$$

Здесь и далее точка над буквой означает комплексный характер описываемой ею величины, так, как это принято в радиотехнике.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях обобщаются на случай N комплексных гиперслучайных величин.

Комплексные гиперслучайные величины $\dot{X}_1,...,\dot{X}_N$ будем называть *некоррелированными* (попарно) *при всех условиях*, если для всех $n \neq m$, $n, m = \overline{1, N}$ имеют место следующее равенство:

$$\mathrm{M}[\dot{X}_n X_m^* / g] = \mathrm{M}[\dot{X}_n / g]\mathrm{M}[X_m^* / g]$$

и *ортогональными* (попарно) *при всех условиях*, если $\mathrm{M}[\dot{X}_n X_m^* / g] = 0$.

Корреляционные моменты границ m_{Sxy} и m_{Ixy} *комплексной гиперслучайной величины* $\dot{Z} = X + \mathrm{j}Y$ можно определить как математические ожидания границ произведения действительной и мнимой ее частей:

$$m_{Sxy} = \mathrm{M}_S[XY], m_{Ixy} = \mathrm{M}_I[XY],$$

а *ковариационные моменты границ* μ_{Sxy} и μ_{Ixy} — как математические ожидания границ произведения ее центрированных вещественной и мнимой частей

$$\mu_{Sxy} = \mathrm{M}_S[(X - m_{Sx})(Y - m_{Sy})],$$

$$\mu_{Ixy} = \mathrm{M}_I[(X - m_{Ix})(Y - m_{Iy})].$$

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин можно обобщить на случай N комплексных гиперслучайных величин. *Комплексные гиперслучайные величины* $\dot{X}_1,...,\dot{X}_N$ будем называть *некоррелированными* (попарно), если для всех $n \neq m$, $n, m = \overline{1, N}$ имеют место следующие равенства:

$$\mathrm{M}_S[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_S[\dot{X}_n]\mathrm{M}_S[X_m^*],$$

$$\mathrm{M}_I[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_I[\dot{X}_n]\mathrm{M}_I[X_m^*],$$

и *ортогональными* (попарно), если при тех же условиях

$$\mathrm{M}_S[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_I[\dot{X}_n X_m^*] = 0.$$

Границами корреляционного момента комплексной гиперслучайной величины $\dot{Z} = X + \mathrm{j}Y$ назовем величины

$$K_{sxy} = \mathrm{M}_s[XY], \ K_{ixy} = \mathrm{M}_i[XY],$$

а *границами ковариационного момента* — величины

$$R_{sxy} = \mathrm{M}_s[(X - m_{x/g})(Y - m_{y/g})],$$

$$R_{ixy} = \mathrm{M}_i[(X - m_{x/g})(Y - m_{y/g})].$$

7.5. ПАРАМЕТРЫ ВЕКТОРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}} = \vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}$ характеристикой разброса может служить *вектор условных комплексных дисперсий* $\dot{\vec{D}}_{\dot{z}/g}$, представляющих собой L-мерные математические ожидания векторов

$$((X_l / g - m_{x_l/g})^2 + \mathrm{j}(Y_l / g - m_{y_l/g})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

и *вектор условных комплексных среднеквадратических отклонений* $\dot{\vec{\sigma}}_{\dot{z}/g}$, вещественные компоненты которых равны корню из вещественных компонент вектора условных комплексных дисперсий $\dot{\vec{D}}_{\dot{z}/g}$, а мнимые — корню из мнимых компонент этих же величин.

Характеристикой разброса L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}} = \vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}$ могут служить также *комплексные дисперсии границ* $\dot{\vec{D}}_{S\dot{z}}$, $\dot{\vec{D}}_{I\dot{z}}$, представляющие собой L-мерные математические ожидания векторов

$$((X_l - m_{Sx_l})^2 + \mathrm{j}(Y_l - m_{Sy_l})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

$$((X_l - m_{Ix_l})^2 + \mathrm{j}(Y_l - m_{Iy_l})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

и *комплексные среднеквадратические отклонения границ* $\dot{\vec{\sigma}}_{S\dot{z}}$, $\dot{\vec{\sigma}}_{I\dot{z}}$, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент комплексных дисперсий границ $\dot{\vec{D}}_{S\dot{z}}$, $\dot{\vec{D}}_{I\dot{z}}$, а мнимые — корню из соответствующих мнимых компонент этих же величин.

Для описания L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}} = \vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}$ можно использовать *границы комплексного математического ожидания*:

$$\dot{\vec{m}}_{s\dot{\vec{z}}} = \mathrm{M}_s[\vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}] = \sum_{l=1}^{L}[\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g_{sl})\mathrm{d}x_l + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g_{sl})\mathrm{d}y_l]\vec{e}_l,$$

$$\dot{\vec{m}}_{i\dot{\vec{z}}} = \mathrm{M}_i[\vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}] = \sum_{l=1}^{L}[\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g_{il})\mathrm{d}x_l + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g_{il})\mathrm{d}y_l]\vec{e}_l,$$

где g_{sl} и g_{il} — значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g)\mathrm{d}x_l\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g)\mathrm{d}y_l\right)^2,$$

и границы моментов, определяемых с помощью *границ комплексного математического ожидания М-мерной комплексной векторной функции* $\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})$:

$$\mathrm{M}_s[\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})] = \sum_{m=1}^{M}[\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}_m(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L)\times$$

$$\times f(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L / g_{sm})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L]\vec{e}_m,$$

$$\mathrm{M}_i[\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})] = \sum_{m=1}^{M}[\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}_m(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L)\times$$

$$\times f(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L / g_{im})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L]\vec{e}_m,$$

где $\dot{\varphi}_m(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L)$ — m-я компонента вектора $\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{z}})$; g_{sm}, g_{im} — значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}_m(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L) f(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L\right|^2.$$

К числу границ моментов комплексного вектора относятся, в частности, *границы комплексной дисперсии* $\dot{\vec{D}}_{s\dot{\vec{z}}}$, $\dot{\vec{D}}_{i\dot{\vec{z}}}$, определяемые как границы комплексного математического ожидания вектора

$$\sum_{l=1}^{L}[(X_l - m_{x_l/g})^2 + \mathrm{j}(Y_l - m_{y_l/g})^2]\vec{e}_l.$$

С помощью границ комплексной дисперсии можно определить *границы комплексного среднеквадратического отклонения* $\dot{\vec{\sigma}}_{s\dot{\vec{z}}}$, $\dot{\vec{\sigma}}_{i\dot{\vec{z}}}$ как векторы, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент границ комплексной дисперсии $\dot{\vec{D}}_{s\dot{\vec{z}}}$, $\dot{\vec{D}}_{i\dot{\vec{z}}}$, а мнимые компоненты — из соответствующих мнимых компонент дисперсий $\dot{\vec{D}}_{s\dot{\vec{z}}}$, $\dot{\vec{D}}_{i\dot{\vec{z}}}$.

В настоящей главе были рассмотрены методы описания *векторных гиперслучайных величин частного вида*, у которых для разных случайных компонент условия g одинаковые. Заметим, что эти методы могут быть использованы для описания также *векторных гиперслучайных величин общего вида*, у которых эти условия разные для разных случайных компонент (в этом случае условия описываются вектором $\vec{g}$). С такими векторными гиперслучайными величинами нам придется столкнуться при описании гиперслучайных функций общего вида.

СКАЛЯРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Определено понятие скалярной гиперслучайной функции. Рассмотрены различные способы ее представления. Для описания использованы условные функции распределения (дающие наиболее полную характеристику гиперслучайной функции), а также границы функции распределения, плотности распределения границ, моменты границ и границы моментов.

8.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под *гиперслучайной функцией* $X(t)$ будем понимать числовую функцию независимого аргумента t, значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$ (где T — область определения аргумента) представляет собой гиперслучайную величину, называемую сечением. Множество значений всех сечений гиперслучайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й *реализацией гиперслучайной функции* $X(t)$ (*выборочной функцией*) будем называть детерминированную функцию $x_i(t; g_t)$ (обозначаемую также как $x_i(t) / g_t$), которая для фиксированного опыта $i \in I$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ и конкретному условию $g_t \in G_t$ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайная функция может быть представлена множеством случайных функций $X(t) / g_t$ (обозначаемых также как $X(t; g_t)$): $X(t) = \{X(t) / g_t \in G_t\}$.

Наряду с такими *гиперслучайными функциями общего вида* будем рассматривать *гиперслучайные функции частного вида*, для которых условия $g_t \in G_t$ не зависят от t: ($g_t = g$, $G_t = G$).

Реализация $x_i(t; g)$ такой гиперслучайной функции (обозначаемая также как $x_i(t) / g$) представляет собой детерминирован-

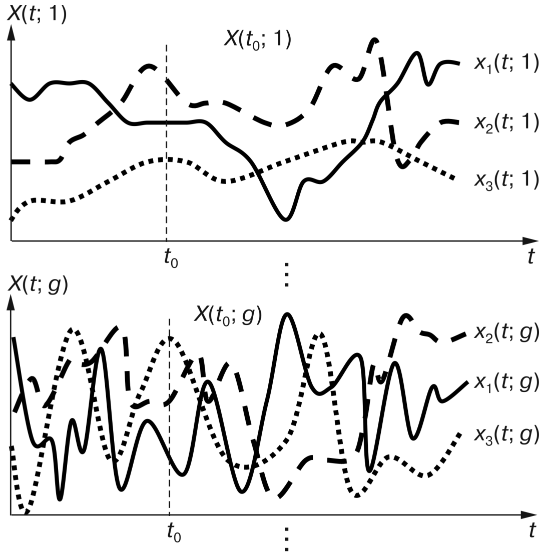


Рис. 8.1. Реализации гиперслучайной функции $X(t)$ частного вида

ную функцию, которая для фиксированного опыта $i \in I$ и фиксированного условия $g \in G$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ одно из значений $x \in S$. Представление о реализациях гиперслучайной функции частного вида, когда множество G — счетное, дает рис. 8.1.

Такая гиперслучайная функция имеет черты как гиперслучайной величины, так и детерминированной функции: при фиксации значения аргумента t превращается в гиперслучайную величину, а при фиксации опыта i и условий g — в детерминированную функцию.

Множество реализаций I гиперслучайной функции может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Размерность N области T определения аргумента t может быть разной. Если $N = 1$, то гиперслучайную функцию $X(t)$ будем называть *гиперслучайным процессом* и представлять множеством случайных процессов $X(t)/g_t$. Если $N > 1$, то аргумент t — векторная величина. В этом случае функцию $X(t)$ будем называть *гиперслучайным полем* и представлять множеством случайных полей $X(t)/g_t$.

Если пространство состояний одномерно, то гиперслучайная функция — скалярная, если размерность пространства состояний больше единицы, то гиперслучайная функция — векторная. В первом случае гиперслучайная функция представляется множеством скалярных случайных функций, во втором — множеством векторных случайных функций.

Если пространство состояний вещественное, то гиперслучайная функция описывается множеством вещественных случайных функций, если оно комплексное, то гиперслучайная функция описывается множеством комплексных случайных функций.

8.2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Скалярную гиперслучайную функцию $X(t)$ будем представлять совокупностью ее *сечений*. Для описания можно использовать *условные функции распределения*:

$$F(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}) = P\{X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_L) < x_M\ /\ g_1,\ldots,g_L\}$$

(обозначаемые также как $F(\vec{x};\vec{t};\vec{g})$), где $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_L)$ — L-мерный вектор значений гиперслучайной функции $X(t)$ в моменты времени $t_1,\ldots,t_L$, образующие L-мерный вектор времени $\vec{t} = t_1,\ldots,t_L$; $\vec{g} = g_1,\ldots,g_L$ — вектор условий ($\vec{g} \in \vec{G}$), соответствующий вектору времени $\vec{t}$; $P\{A/\vec{g}\}$ — вероятность выполнения неравенства A при условиях $\vec{g}$, а также *условные плотности распределения*

$$f(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g}) = \frac{\partial^L F(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g})}{\partial x_1 \ldots \partial x_L}$$

(обозначаемые также как $f(\vec{x};\vec{t};\vec{g})$), *условные характеристические функции*

$$Q(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}\ /\ \vec{g}) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x};\vec{t}\ /\ \vec{g})\exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\,\vec{x})\mathrm{d}\,\vec{x}$$

и др.

Представление об условных плотностях распределения гиперслучайной функции частного вида для множества условий $\{1,\ldots,G\}$ дает рис. 8.2.

Кроме того, можно использовать центральные и нецентральные моменты случайных функций $X(t)/\ g_t$ $(g_t \in G_t)$, в частно-

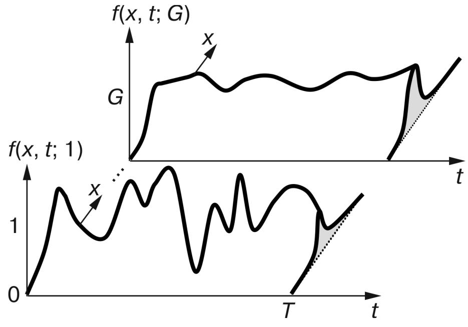


Рис. 8.2. Условные плотности распределения гиперслучайной функции $X(t)$ частного вида

сти, *условные математические ожидания* $m_{x/g_t}(t) = \mathrm{M}[X(t)/g_t]$, *условные дисперсии*

$$D_{x/g_t}(t) = \mathrm{D}[X(t)/g_t] = \mathrm{M}[(X(t)/g_t - m_{x/g_t}(t))^2],$$

условные корреляционные моменты

$$K_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1)/g_{t_1})(X(t_2)/g_{t_2})],$$

условные ковариационные моменты

$$R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1)/g - m_{x/g_{t_1}}(t_1))(X(t_2)/g_{t_2} - m_{x/g_{t_2}}(t_2))]$$

и пр.

Для описания гиперслучайной функции $X(t)$ могут быть использованы также аналоги перечисленных характеристик и параметров границ.

К числу вероятностных характеристик относятся *границы функции распределения* $F_S(\vec{x};\vec{t})$, $F_I(\vec{x};\vec{t})$, *плотности распределения границ* $f_S(\vec{x};\vec{t})$, $f_I(\vec{x};\vec{t})$ и *характеристические функции границ* $Q_S(j\vec{\omega};\vec{t})$, $Q_I(j\vec{\omega};\vec{t})$, определяемые соответственно следующим образом:

$$F_S(\vec{x};\vec{t}) = \sup_{\vec{g}\in\vec{G}} P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_M) < x_M / \vec{g}\},$$

$$F_I(\vec{x};\vec{t}) = \inf_{\vec{g}\in\vec{G}} P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_M) < x_M / \vec{g}\}, \qquad (8.1)$$

$$f_S(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_S(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \quad f_I(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_I(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \qquad (8.2)$$

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x};\vec{t})\exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x})\mathrm{d}\,\vec{x},$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x};\vec{t})\exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x})\mathrm{d}\,\vec{x}. \qquad (8.3)$$

Эти характеристики обладают теми же свойствами, что и аналогичные характеристики векторной гиперслучайной величины (см. параграф 7.2).

Ширина зоны неопределенности определяется функциями

$$\Delta F(\vec{x};\vec{t}) = F_S(\vec{x};\vec{t}) - F_I(\vec{x};\vec{t})$$

и

$$\Delta f(\vec{x};\vec{t}) = f_S(\vec{x};\vec{t}) - f_I(\vec{x};\vec{t})\,.$$

Для случайных функций эти функции равны нулю. При полной *неопределенности* (полном *хаосе*) $\Delta F(\vec{x};\vec{t}) = 1$.

Представим гиперслучайную функцию $X(t)$ совокупностью L ее сечений $X(t_1;g_{t_1}),\ldots,X(t_L;g_{t_L})$. Разделим эти сечения на две группы. К первой группе отнесем любые M сечений, например первые, а ко второй — остальные ($L-M$) сечений. Тогда L-мерные плотности распределения границ $f_S(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)$, $f_I(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)$ связаны с M-мерными плотностями распределения границ

$$f_S(x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M),\ f_I(x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M)$$

и условными ($L-M$)-мерными плотностями распределения границ

$$f_S(x_{M+1},\ldots,x_L;\ t_{M+1},\ldots,t_L\,/\,x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M)\,,$$

$$f_I(x_{M+1},\ldots,x_L;t_{M+1},\ldots,t_L\,/\ x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M)$$

следующими неравенствами:

$$f_S(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L) \le f_S(x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M)\times$$

$$\times f_S(x_{M+1},\ldots,x_L;t_{M+1},\ldots,t_L\,/\,x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M),$$

$$f_I(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L) \ge f_I(x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M)\times$$

$$\times f_I(x_{M+1},\ldots,x_L;t_{M+1},\ldots,t_L\,/\,x_1,\ldots,x_M;t_1,\ldots,t_M),$$

вытекающими из аналогичных соотношений для векторной гиперслучайной величины.

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть *независимыми,* если двумерные плотности распределения границ факторизуются:

$$f_S(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_S(x_1; t_1) f_S(x_2; t_2),$$

$$f_I(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_I(x_1; t_1) f_I(x_2; t_2). \tag{8.4}$$

Сечения $t_1, ..., t_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ назовем *независимыми в совокупности,* если независимы в совокупности значения векторной гиперслучайной величины, соответствующие этим сечениям, т. е. возможно следующее представление плотностей распределения границ:

$$f_S(x_1, ..., x_L; t_1, ..., t_L) = \prod_{l=1}^{L} f_S(x_l; t_l),$$

$$f_I(x_1, ..., x_L; t_1, ..., t_L) = \prod_{l=1}^{L} f_I(x_l; t_l). \tag{8.5}$$

Как и в случае случайных функций, из независимости в совокупности сечений гиперслучайной функции следует попарная их независимость. Обратное же утверждение неверно.

8.3. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ГРАНИЦ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Математические ожидания границ функции $\varphi(X(t_1), ..., X(t_L))$ *значений гиперслучайной функции* $X(t)$ в L точках $X_1 = X(t_1), ..., X_L = X(t_L)$ описываются выражениями

$$\mathrm{M}_S[\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L))] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_L) f_S(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) \mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_L,$$

$$\mathrm{M}_I[\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L))] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_L) f_I(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) \mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_L. \tag{8.6}$$

Для характеристики гиперслучайной функции $X(t)$ могут быть использованы *моментные функции границ. Начальными* L-мерными *моментными функциями границ порядка* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть математические ожидания границ функции $\varphi(X(t_1), \ldots, X(t_L)) = X^{\nu_1}(t_1) \ldots X^{\nu_L}(t_L)$:

$$m_{S\nu_1 \ldots \nu_L}(t_1, \ldots, t_L) = \mathrm{M}_S[X^{\nu_1}(t_1) \ldots X^{\nu_L}(t_L)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1} \ldots x_L^{\nu_L} f_S(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_L,$$

$$m_{I\nu_1 \ldots \nu_L}(t_1, \ldots, t_L) = \mathrm{M}_I[X^{\nu_1}(t_1) \ldots X^{\nu_L}(t_L)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1} \ldots x_L^{\nu_L} f_I(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_L, \qquad (8.7)$$

где ν_l — целое положительное число ($l = \overline{1, L}$).

Математические ожидания границ гиперслучайной функции $X(t)$ определим как

$$m_{Sx}(t) = \mathrm{M}_S[X(t)], \; m_{Ix}(t) = \mathrm{M}_I[X(t)].$$

Центральными L-мерными *моментными функциями границ порядка* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ будем называть следующие функции:

$$\mu_{S\nu_1 \ldots \nu_L}(t_1, \ldots, t_L) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))^{\nu_1} \ldots (X(t_L) - m_{Sx}(t_L))^{\nu_L}],$$

$$\mu_{I\nu_1 \ldots \nu_L}(t_1, \ldots, t_L) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))^{\nu_1} \ldots (X(t_L) - m_{Ix}(t_L))^{\nu_L}]. \qquad (8.8)$$

Частным случаем этих функций являются *дисперсии границ* $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$, определяемые как

$$D_{Sx}(t) = \mathrm{D}_S[X(t)] = \mathrm{M}_S[(X(t) - m_{Sx}(t))^2],$$

$$D_{Ix}(t) = \mathrm{D}_I[X(t)] = \mathrm{M}_I[(X(t) - m_{Ix}(t))^2]. \qquad (8.9)$$

Математические ожидания границ $m_{Sx}(t)$, $m_{Ix}(t)$ характеризуют средние значения гиперслучайной функции $X(t)$, рассчитанные для верхней и нижней границ функции распределения, а дисперсии границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$ и *среднеквадратические отклонения границ*, определяемые как

$$\sigma_{Sx}(t) = \sqrt{D_{Sx}(t)}\,, \sigma_{Ix}(t) = \sqrt{D_{Ix}(t)}\,,$$

характеризуют степень разброса этой гиперслучайной функции относительно соответствующих математических ожиданий $m_{Sx}(t)$ и $m_{Ix}(t)$.

Нетрудно убедиться, что $m_{Sx}(t) \le m_{Ix}(t)$, а соотношение между $D_{Sx}(t)$ и $D_{Ix}(t)$ может быть любым.

Частными случаями выражений (8.7), (8.8) являются *ковариационные функции границ гиперслучайной функции*

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))(X(t_2) - m_{Sx}(t_2))],$$
$$R_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))(X(t_2) - m_{Ix}(t_2))]$$

и *корреляционные функции границ*

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)],$$
$$K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)]. \qquad (8.10)$$

Они связаны между собой следующими соотношениями:

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = K_{Sx}(t_1, t_2) - m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2),$$
$$R_{Ix}(t_1, t_2) = K_{Ix}(t_1, t_2) - m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2). \qquad (8.11)$$

Ковариационные и корреляционные функции границ, а также *нормированные ковариационные функции границ*

$$r_{Sx}(t_1, t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1, t_2)}{\sigma_{Sx}(t_1)\sigma_{Sx}(t_2)}, \quad r_{Ix}(t_1, t_2) = \frac{R_{Ix}(t_1, t_2)}{\sigma_{Ix}(t_1)\sigma_{Ix}(t_2)} \qquad (8.12)$$

характеризуют зависимость сечений гиперслучайной функции.

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть *некоррелированными*, если для этих сечений ковариационные функции границ $R_{Sx}(t_1, t_2) = R_{Ix}(t_1, t_2) = 0$. При этом, согласно выражению (8.11),

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2)\,,\ K_{Ix}(t_1, t_2) = m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2)\,.$$

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть *ортогональными*, если для них корреляционные функции границ $K_{Sx}(t_1, t_2) = K_{Ix}(t_1, t_2) = 0$.

При этом, согласно выражению (8.11),

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = -m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2)\,,\;\; R_{Ix}(t_1,t_2) = -m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2)\,.$$

Понятия независимости, некоррелированности и ортогональности сечений гиперслучайной функции аналогичны таким же понятиям случайной функции. Если сечения гиперслучайной функции коррелированы, то они зависимы. Обратное утверждение неверно. Если сечения независимы, то они некоррелированы. Если сечения ортогональны, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми, как коррелированными, так и некоррелированными. Если математические ожидания границ хотя бы одного из двух рассматриваемых сечений равны нулю, то из ортогональности сечений следует их некоррелированность, а из некоррелированности — их ортогональность.

8.4. ГРАНИЦЫ МОМЕНТОВ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Для описания гиперслучайных функций можно использовать ряд других характеристик, аналогичных рассмотренным в параграфе 7.3 для гиперслучайных величин.

Основой этих характеристик являются *границы математического ожидания функции* $\varphi(\vec{X};\vec{t}) = \varphi(X_1,...,X_L;t_1,...,t_L)$ *гиперслучайной функции* $X(t)$:

$$\mathrm{M}_s[\varphi(\vec{X};\vec{t}\,] = \sup_{\vec{g}\in\vec{G}} \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\vec{x};\vec{t}\,)f(\vec{x};\vec{t}\,/\,\vec{g})\mathrm{d}\,\vec{x},$$

$$\mathrm{M}_i[\varphi(\vec{X};\vec{t}\,)] = \inf_{\vec{g}\in\vec{G}} \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\vec{x};\vec{t}\,)f(\vec{x};\vec{t}\,/\,\vec{g})\mathrm{d}\,\vec{x}.$$

Частным случаем являются *границы математического ожидания*

$$m_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[X(t)]\,,\;\; m_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[X(t)]\,,$$

границы дисперсии

$$D_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[(X(t) - m_{x/g_t}(t))^2]\,,$$

$$D_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[(X(t) - m_{x/g_t}(t))^2]\,,$$

где $m_{x/g_t}(t) = \mathrm{M}[X(t)/g_t]$ — значение математического ожидания в условиях $g_t \in G_t$, а также *границы начальных моментов*

$$m_{s\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L)=\mathrm{M}_s[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)],$$

$$m_{i\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L)=\mathrm{M}_i[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)]$$

порядка $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_L$ и *границы центральных моментов*

$$\mu_{s\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L)=\mathrm{M}_s[(X(t_1)-m_{x/g_{t_1}}(t_1))^{\nu_1}\ldots(X(t_L)-m_{x/g_{t_L}}(t_L))^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L)=\mathrm{M}_i[(X(t_1)-m_{x/g_{t_1}}(t_1))^{\nu_1}\ldots(X(t_L)-m_{x/g_{t_L}}(t_L))^{\nu_L}]$$

порядка $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_L$.

Границы смешанного начального момента второго порядка $m_{s11}(t_1,t_2)$, $m_{i11}(t_1,t_2)$ будем называть *границами корреляционной функции* и обозначать $K_{sx}(t_1,t_2)$, $K_{ix}(t_1,t_2)$, границы смешанного центрального момента второго порядка — *границами ковариационной функции* и обозначать $R_{sx}(t_1,t_2)$, $R_{ix}(t_1,t_2)$.

Как и в случае границ корреляционного и ковариационного моментов гиперслучайных величин, из-за того, что границы корреляционной функции, границы ковариационной функции и границы математического ожидания могут соответствовать различным условиям $\vec{g}$, в общем случае

$$R_{sx}(t_1,t_2)\neq K_{sx}(t_1,t_2)-m_{sx}(t_1)m_{sx}(t_2),$$

$$R_{ix}(t_1,t_2)\neq K_{ix}(t_1,t_2)-m_{ix}(t_1)m_{ix}(t_2).$$

Отсчеты гиперслучайной функции $X(t)$ в моменты t_1, t_2 будем называть *некоррелированными при всех условиях,* если $R_{sx}(t_1,t_2)=R_{ix}(t_1,t_2)=0$, и *ортогональными при всех условиях,* если $K_{sx}(t_1,t_2)=K_{ix}(t_1,t_2)=0$.

Заметим, что понятия некоррелированности и ортогональности отсчетов гиперслучайной функции, приведенные в предыдущем параграфе, для описания ситуаций, когда соответствующие корреляционные и ковариационные функции границ распределения равны нулю, отличаются от приведенных здесь понятий.

Из некоррелированности и ортогональности отсчетов не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность при всех условиях. В общем случае и из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Последнее связано с тем, что границы функции распределения $F_S(\vec{x};\vec{t})$, $F_I(\vec{x};\vec{t})$ не всегда принадлежат множеству условных функций распределения $F(\vec{x};\vec{t}\,/\,\vec{g})$, $\vec{g} \in \vec{G}$.

Если же границы функции распределения все же принадлежат этому множеству, то из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Обратное утверждение неверно.

Следует обратить внимание, что так же, как и в случае гиперслучайных величин, множество границ всех моментов неоднозначно определяет границы распределения.

ВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ, ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ

Введены понятия векторной гиперслучайной функции, гиперслучайного функционала и гиперслучайного оператора. Рассмотрены различные способы описания этих математических объектов. Исследованы свойства их характеристик и параметров.

9.1. ВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Векторной гиперслучайной функцией будем называть векторную функцию $\vec{X}(t)$, компоненты которой представляют собой скалярные гиперслучайные функции: $\vec{X}(t) = (X_1(t), ..., X_H(t))$.

Векторную H-мерную гиперслучайную функцию $\vec{X}(t)$ можно описать множеством HL-мерных условных функций распределения $F(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H / \vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_H)$, где L-мерные векторы $\vec{x}_h$, $\vec{t}_h$, $\vec{g}_h$ характеризуют h-е компоненты вектора $\vec{X}(t)$ в условиях $\vec{g}_h \in \vec{G}_h$ ($h = \overline{1, H}$).

Кроме того, ее можно представить условными центральными и нецентральными моментами, аналогично тому, как это сделано в параграфе 8.2.

Эту функцию можно описать также в L сечениях *границами* HL-мерной совместной *функции распределения* $F_S(\vec{x}_1,\ldots, \vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots, \vec{t}_H)$, $F_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H)$, где L-мерные векторы $\vec{x}_h$ и $\vec{t}_h$ характеризуют h-е компоненты вектора $\vec{X}(t)$ $(h = \overline{1, H})$, *плотностями распределения границ*

$$f_S(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H), \quad f_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H)$$

или *характеристическими функциями границ*

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_1,\ldots,\mathrm{j}\vec{\omega}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H),\quad Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_1,\ldots,\mathrm{j}\vec{\omega}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H).$$

Гиперслучайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ будем называть *независимыми,* если при произвольном натуральном L ее $2L$-мерные совместные плотности распределения границ факторизуются:

$$f_S(\vec{x}_1,\vec{x}_2;\vec{t}_1,\vec{t}_2)=f_S(\vec{x}_1;\vec{t}_1)f_S(\vec{x}_2;\vec{t}_2),$$
$$f_I(\vec{x}_1,\vec{x}_2;\vec{t}_1,\vec{t}_2)=f_I(\vec{x}_1;\vec{t}_1)f_I(\vec{x}_2;\vec{t}_2). \tag{9.1}$$

Компоненты векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$ будем называть *независимыми в совокупности,* если факторизуются ее совместные плотности распределения границ:

$$f_S(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;t_1,\ldots,t_H)=\prod_{h=1}^{H}f_S(\vec{x}_h;t_h),$$
$$f_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;t_1,\ldots,t_H)=\prod_{h=1}^{H}f_I(\vec{x}_h;t_h). \tag{9.2}$$

Если компоненты векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$ попарно независимы, то не обязательно независимы в совокупности ее компоненты.

Математическими ожиданиями границ $\vec{m}_S(t)$, $\vec{m}_I(t)$ будем называть детерминированные векторные функции, компоненты которых представляют собой математические ожидания границ соответствующих компонент векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$:

$$\vec{m}_S(t)=\mathrm{M}_S[\vec{X}(t)],\quad \vec{m}_I(t)=\mathrm{M}_I[\vec{X}(t)]. \tag{9.3}$$

Дисперсиями границ $\vec{D}_S(t)$, $\vec{D}_I(t)$ *векторной гиперслучайной функции* будем называть детерминированные векторные функции, компоненты которых являются дисперсиями границ соответствующих компонент функции $\vec{X}(t)$:

$$\vec{D}_S(t)=\mathrm{D}_S[\vec{X}(t)],\quad \vec{D}_I(t)=\mathrm{D}_I[\vec{X}(t)]. \tag{9.4}$$

Ковариационными функциями границ H-мерной *векторной гиперслучайной функции* $\vec{X}(t)$ будем называть квадратные матрицы R_S, R_I размером $H\times H$ с элементами

$$R_{Shk}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[(X_h(t_1) - m_{Sx_h}(t_1))(X_k(t_2) - m_{Sx_k}(t_2))],$$

$$R_{Ihk}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[(X_h(t_1) - m_{Ix_h}(t_1))(X_k(t_2) - m_{Ix_k}(t_2))]. \quad (9.5)$$

Диагональные элементы этих матриц представляют собой ковариационные функции границ компонент. Недиагональные элементы описывают ковариационные связи между компонентами. Связи между компонентами можно охарактеризовать также *нормированными ковариационными функциями границ*, определяемыми одним из следующих образов:

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Shh}(t_1,t_2)R_{Skk}(t_1,t_2)}},$$

$$r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Ihh}(t_1,t_2)R_{Ikk}(t_1,t_2)}};$$

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Shk}(t_1,t_1)R_{Shk}(t_2,t_2)}},$$

$$r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Ihk}(t_1,t_1)R_{Ihk}(t_2,t_2)}};$$

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sh}(t_1)D_{Sk}(t_2)}}, \; r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Ih}(t_1)D_{Ik}(t_2)}},$$

где $h,k = \overline{1,H}$.

Подобно ковариационным функциям границ можно определить *корреляционные функции границ векторной гиперслучайной функции*:

$$K_{Shk}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X_h(t_1)X_k(t_2)],$$

$$K_{Ihk}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X_h(t_1)X_k(t_2)].$$

Свойства математических ожиданий границ, дисперсий границ, ковариационных функций границ и корреляционных функций границ векторной гиперслучайной функции совпадают со свойствами соответствующих характеристик векторных гиперслучайных величин (см. параграф 7.2).

9.2. ПАРАМЕТРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Корреляционными функциями границ $\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2)$, $\dot{K}_{Ix}(t_1,t_2)$ *комплексной гиперслучайной функции* $\dot{X}(t)$ будем называть двумерные начальные моментные функции границ второго порядка:

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[\dot{X}(t_1)X^*(t_2)],$$

$$\dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[\dot{X}(t_1)X^*(t_2)], \tag{9.6}$$

а *ковариационными функциями границ* $\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2)$, $\dot{R}_{Ix}(t_1,t_2)$ — двумерные центральные моментные функции границ второго порядка:

$$\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[(\dot{X}(t_1) - \dot{m}_{Sx}(t_1))(X^*(t_2) - m^*_{Sx}(t_2))],$$

$$\dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[(\dot{X}(t_1) - \dot{m}_{Ix}(t_1))(X^*(t_2) - m^*_{Ix}(t_2))]. \tag{9.7}$$

Нетрудно убедиться, что ковариационные и корреляционные функции границ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) + \dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2),$$

$$\dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) + \dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2).$$

Если математические ожидания границ равны нулю, то корреляционные функции границ равны соответствующим ковариационным функциям границ:

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2), \quad \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2).$$

Значения комплексной гиперслучайной функции $\dot{X}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 будем называть *некоррелированными*, если ковариационные функции границ $\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) = 0$. При этом $\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2)$, $\dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2)$.

Значения комплексной гиперслучайной функции $\dot{X}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 будем называть *ортогональными*, если корреляционные функции границ $\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = 0$. Тогда

$$\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) = -\dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2), \quad \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) = -\dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2).$$

Взаимными корреляционными функциями границ $\dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2)$, $\dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2)$ и *взаимными ковариационными функциями границ* $\dot{R}_{Sxy}(t_1,\, t_2)$, $\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)$ *комплексных гиперслучайных функций* $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть соответственно двумерные начальные и центральные взаимные моментные функции границ второго порядка:

$$\dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_{Sxy}[\dot{X}(t_1)Y^*(t_2)],$$

$$\dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_{Ixy}[\dot{X}(t_1)Y^*(t_2)], \tag{9.8}$$

$$\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_{Sxy}[(\dot{X}(t_1) - \dot{m}_{Sx}(t_1))(Y^*(t_2) - m^*_{Sy}(t_2))],$$

$$\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_{Ixy}[(\dot{X}(t_1) - \dot{m}_{Ix}(t_1))(Y^*(t_2) - m^*_{Iy}(t_2))]. \tag{9.9}$$

Корреляционные и ковариационные связи между сечениями комплексных гиперслучайных функций $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 описываются корреляционными и ковариационными матрицами границ:

$$\dot{K}_S(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) \\ \dot{K}_{Syx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Sy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \tag{9.10}$$

$$\dot{K}_I(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) \\ \dot{K}_{Iyx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Iy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \tag{9.11}$$

$$\dot{R}_S(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) & R_{Sxy}(t_1,t_2) \\ \dot{R}_{Syx}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Sy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \tag{9.12}$$

$$\dot{R}_I(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) \\ \dot{R}_{Iyx}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Iy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}. \tag{9.13}$$

Комплексные гиперслучайные функции $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть *некоррелированными*, если для двух произвольных моментов времени t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$ взаимные ковариационные функции границ

$$\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Syx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Iyx}(t_1,t_2) = 0\,,$$

т. е. матрицы (9.12), (9.13) — диагональные.

Комплексные гиперслучайные функции $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть *ортогональными*, если для двух произвольных моментов времени t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$ взаимные корреляционные функции границ

$$\dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Syx}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Iyx}(t_1,t_2) = 0\,,$$

т. е. матрицы (9.10), (9.11) — диагональные.

Нормированными ковариационными функциями границ будем называть функции

$$\dot{r}_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}\,,$$

$$\dot{r}_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Ix}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}\,, \qquad (9.14)$$

$$\dot{r}_{Sxy}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)}}\,,$$

$$\dot{r}_{Ixy}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)}}\,. \qquad (9.15)$$

Свойства ковариационных функций границ комплексных гиперслучайных функций аналогичны свойствам ковариационных функций комплексных случайных функций. В частности, ковариационные функции границ обладают свойствами:

- эрмитовости, т. е.

$$\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2) = R^{*}_{Syx}(t_2,t_1)\,,\ \ \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) = R^{*}_{Iyx}(t_2,t_1)\,;$$

- ограниченности, а именно

$$\left|\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2)\right|^2 \leq D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)\,,$$

$$\left|\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)\right|^2 \leq D_{Ix}(t_1)D_{Iy}(t_2)$$

(знаки равенства имеют место, когда $Y(t_1) = aX(t_1) + b$, где a и b — константы);

• неотрицательной определенности, под которой подразумевается, что для произвольных $t_1,...,t_L$ и комплексных $\dot{z}_1,...,\dot{z}_L$ величины $\sum_{l,m=1}^{L} \dot{R}_{Sx}(t_l,t_m)\dot{z}_l z_m^*$, $\sum_{l,m=1}^{L} \dot{R}_{Ix}(t_l,t_m)\dot{z}_l z_m^*$ вещественны и неотрицательны.

Основой описания комплексной гиперслучайной функции $\dot{Z}(t) = X(t) + \mathrm{j}Y(t)$ частного вида могут быть также *границы математического ожидания комплексной функции* $\dot{\varphi}(\dot{\vec{Z}};\vec{t}) = \dot{\varphi}(X_1, Y_1,...,X_L,Y_L;t_1,...,t_L)$:

$$\mathrm{M}_s[\dot{\varphi}(\vec{Z};\vec{t})] = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L)\times$$

$$\times f(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L / g_s)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L,$$

$$\mathrm{M}_i[\dot{\varphi}(\vec{Z};\vec{t})] = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L)\times$$

$$\times f(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L / g_i)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L,$$

где g_s, g_i — значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$|\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L)\times$$

$$\times f(x_1,y_1,...,x_L,y_L;t_1,...,t_L / g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L|^2.$$

В частности, когда

$$\dot{\varphi}(\dot{Z}(t)) = X(t) + \mathrm{j}Y(t),$$

получаем *границы математического ожидания*

$$\dot{m}_{s\dot{z}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t/g_s)\mathrm{d}x + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} yf(y;t/g_s)\mathrm{d}y,$$

$$\dot{m}_{i\dot{z}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t/g_i)\mathrm{d}x + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} yf(y;t/g_i)\mathrm{d}y,$$

когда

$$\dot{\varphi}(\dot{Z}(t)) = (X(t) - m_{x/g}(t))^2 + \mathrm{j}(Y(t) - m_{y/g}(t))^2,$$

имеем *границы дисперсии*

$$\dot{D}_{s\dot{z}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g_s}(t))^2 f(x;t/g_s)\mathrm{d}x +$$

$$+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y/g_s}(t))^2 f(y;t/g_s)\mathrm{d}y,$$

$$\dot{D}_{i\dot{z}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g_i}(t))^2 f(x;t/g_i)\mathrm{d}x +$$

$$+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y/g_i}(t))^2 f(y;t/g_i)\mathrm{d}y.$$

9.3. ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ

Набор правил, которые ставят каждому объекту x класса (множества) A в соответствие объект y класса (множества) B, называется *преобразованием* или *отображением* класса A в класс B.

Будем различать три типа преобразований. Если элементы классов A и B — множества величин, то y является *функцией аргумента* x. Если класс A — множество функций, а класс B — множество величин, то y является *функционалом* x. Если же оба класса A и B — множества функций, то преобразование представляет собой *оператор*.

Элементы множеств A и B могут быть детерминированного, случайного или гиперслучайного типа. Сочетания различных типов элементов множества A с различными типами элементов множества B порождают девять возможных комбинаций.

Под *гиперслучайным функционалом* $X(\varphi)$ будем понимать отображение множества Φ функций φ (детерминированных, случайных или гиперслучайных) на множество гиперслучайных величин. При любой фиксированной $\varphi \in \Phi$ отображение дает гиперслучайную величину, называемую *сечением*. Множество значений всех сечений гиперслучайного функционала образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й *реализацией гиперслучайного функционала* $X(\varphi)$ (*выборочным функционалом*) будем называть детерминированный функционал $x_i(\varphi)$, который для фиксированного опыта $i \in I$ и фиксированных условий $g \in G$ ставит в соответствие каждой функции φ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайный функционал имеет черты как гиперслучайной функции, так и детерминированного функционала. При фиксации функции φ он превращается в гиперслучайную функцию, а при фиксации опыта и условий — в детерминированный функционал. Множество реализаций I может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Гиперслучайным оператором будем называть отображение множества функций Φ (детерминированных, случайных или гиперслучайных) на множество гиперслучайных функций Ψ.

Результатом воздействия гиперслучайного оператора является гиперслучайная функция. При этом не имеет значения тип исходной функции, на которую воздействует оператор.

Для описания гиперслучайных функционалов и гиперслучайных операторов можно использовать подходы, параметры и характеристики, применяемые для описания гиперслучайных функций.

Например, скалярный гиперслучайный функционал можно представить совокупностью сечений. Для описания можно использовать границы функции распределения $F_S(\vec{x};\vec{\varphi})$, $F_I(\vec{x};\vec{\varphi})$, плотности распределения границ $f_S(\vec{x};\vec{\varphi})$, $f_I(\vec{x};\vec{\varphi})$ и характеристические функции границ $Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi})$, $Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi})$, определяемые соответственно следующим образом:

$$F_S(\vec{x};\vec{\varphi}) = \sup_{g\in G} P\{X(\varphi_1) < x_1, ..., X(\varphi_M) < x_M \,/\, g\},$$

$$F_I(\vec{x};\vec{\varphi}) = \inf_{g\in G} P\{X(\varphi_1) < x_1, ..., X(\varphi_M) < x_M \,/\, g\},$$

$$f_S(\vec{x};\vec{\varphi}) = \frac{\partial^L F_S(\vec{x};\vec{\varphi})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \quad f_I(\vec{x};\vec{\varphi}) = \frac{\partial^L F_I(\vec{x};\vec{\varphi})}{\partial x_1 ... \partial x_L},$$

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x};\vec{\varphi}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x},$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x};\vec{\varphi}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x},$$

где $\vec{x} = (x_1, ..., x_L)$ — L-мерный вектор значений гиперслучайного функционала $X(\varphi)$ для вектора функций $(\varphi_1, ..., \varphi_L)$.

Для границ функции распределения гиперслучайного функционала могут быть рассчитаны центральные и нецентральные моменты, а также другие характеристики, несущие обобщенное представление о рассматриваемом функционале.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Введены понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций, а также понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

10.1. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций.

В предыдущих главах не накладывались ограничения на множество условий G. Далее нам потребуется конкретизировать эту математическую модель таким образом, чтобы можно было бы определить понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин и функций. Будем рассматривать G как метрическое топологическое пространство с определенной метрикой.

Вводимые понятия основаны на сходимости случайных величин и функций (см., например, [Гнеденко, 1988, Анго, 1967]).

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и гиперслучайная величина *X*. Для всех $X_1, ..., X_N$ и X определены условные функции распределения $F_{x_1/g_1}(x)$,..., $F_{x_N/g_N}(x)$ и $F_{x/g}(x)$ для всех условий $g_1, \ldots, g_N \in G$, $g \in G$.

Тогда последовательность X

1) *сходится* (в смысле Бернулли) *к* X *по функции распределения* ($F_{x_N}(x) \to F_x(x)$), если в каждой точке x, где $F_{x/g}(x)$ непрерывна, для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$F_{x_N/g_N}(x) \to F_{x/g}(x), \tag{10.1}$$

т. е. если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин

$X_1/g_1,...,X_N/g_N$ сходится по функции распределения к случайной величине X/g;

2) *сходится к* X *в среднеквадратическом* $(\mathrm{M}[|X_N - X|^2] \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условные математические ожидания

$$\mathrm{M}[|X_N / g_N - X/g|^2] \to 0, \qquad (10.2)$$

т. е. если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин $X_1/g_1,...,X_N/g_N$ сходится к случайной величине X/g в среднеквадратическом. При такой сходимости будем писать $\underset{\substack{N\to\infty \\ g_N \to g}}{\mathrm{l.i.m.}} X_N / g_N = X/g$ или

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N = X. \qquad (10.3)$$

Обратим внимание, что в данном случае математическое ожидание рассчитывается по двумерному распределению случайных величин X_N/g_N и X/g;

3) *сходится к* X *почти наверное* (*с вероятностью единица* — $P(X_N \to X) = 1$), если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условная вероятность

$$P(X_N / g_N \to X/g) = 1, \qquad (10.4)$$

т. е. если $\forall g \in G$ случайная последовательность $X_1/g_1,...,X_N/g_N$ сходится *с вероятностью единица* к случайной величине X/g. При такой сходимости будем писать

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X; \qquad (10.5)$$

4) *сходится к* X *по вероятности* $(P(|X_N - X| > \varepsilon) \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$P(|X_N / g_N - X/g| > \varepsilon) \to 0, \qquad (10.6)$$

т. е. если $\forall g \in G$ случайная последовательность X_1/g_1, $...,X_N/g_N$ сходится по вероятности к случайной величине X/g.

Заметим, что в частном случае, когда X представляет собой множество чисел, описываемых функциями распределения в виде функций единичного скачка, можно говорить о сходимости

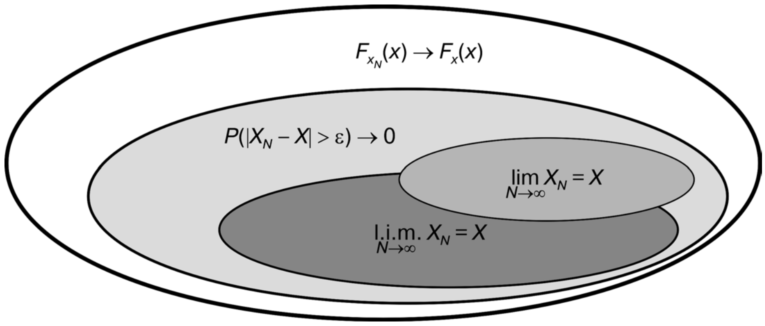


Рис. 10.1. Соотношения между разными типами сходимости

гиперслучайных величин к этому множеству чисел. Когда это множество представляет собой интервал, можно говорить о сходимости гиперслучайной величины к этому интервалу.

Также, как и для последовательности случайных величин, наиболее слабая сходимость для последовательности гиперслучайных величин — сходимость по распределению. Более сильная сходимость — по вероятности. Еще более сильная сходимость — в среднеквадратическом и с вероятностью единица. Следует иметь в виду, что некоторые последовательности сходятся в среднеквадратическом, но не сходятся с вероятностью единица; другие же — сходятся с вероятностью единица, но не сходятся в среднеквадратическом. Эти положения прямо следуют из аналогичных положений для последовательности случайных величин. Соотношения между разными типами сходимости условно изображены на рис. 10.1.

10.2. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Сходимости последовательности гиперслучайных функций определяются аналогично, в частности, используемые в дальнейшем сходимость в среднеквадратическом и сходимость почти наверное.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных функций

$$\mathrm{X}(t) = \{X_1(t), ..., X_N(t)\}$$

и гиперслучайная функция $X(t)\ (t \in T)$, для которых определены условные функции распределения

$$F_{x_1/g_1}(x;t), ..., F_{x_N/g_N}(x;t)\ ,\ F_{x/g}(x;t)\ .$$

Тогда последовательность X(t)

1) *сходится к* $X(t)$ *в среднеквадратическом*, если для всех $t \in T$ и $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$\mathrm{M}[|X_N(t)/g_N - X(t)/g|^2] \to 0\,, \qquad (10.7)$$

т. е. $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, X_N(t) = X(t)$;

2) *сходится к* $X(t)$ *почти наверное* (*с вероятностью единица*), если для всех $t \in T$ и $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$P(X_N(t)/g_N \to X(t)/g) = 1\,, \qquad (10.8)$$

т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} X_N(t) = X(t)$.

Заметим, что в приведенных определениях сходимости последовательностей гиперслучайных величин и функций фигурирует условие $g_N \to g$. Это означает, что статистические условия последовательности и объекта, к которому эта последовательность стремится, могут отличаться.

Если $g_1 = \ldots = g_N = g$, то для всех рассмотренных типов сходимости условие $g_N \to g$ отсутствует. При этом в выражениях (10.1), (10.2), (10.4), (10.6) — (10.8) условие g_N меняется на условие g.

На основе сходимости последовательности гиперслучайных функций можно ввести понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

10.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Гиперслучайную функцию $X(t)$ ($t \in T$) будем называть *гиперслучайной функцией второго порядка*, если математическое ожидание нижней границы квадрата этой функции ограничено для всех $t \in T$: $\mathrm{M}_I[X^2(t)] < \infty$.

Гиперслучайную функцию второго порядка $X(t) = \{X(t)/g_t \in G\}$ будем называть *непрерывной в среднеквадратическом* в точке t, если

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t+\Delta t) = X(t)\,,$$

т. е. если для всех условий $g_t, g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \mathrm{M}[|X(t+\Delta t)/g_{t+\Delta t} - X(t)/g_t|^{\,2}] = 0 .$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка назовем *дифференцируемой в среднеквадратическом* в точке t, если существует функция $X'(t)$ (*производная*), описываемая следующим выражением:

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

т. е. если для всех условий $g_t, g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \mathrm{M}\left[\left|\frac{X(t+\Delta t)/g_{t+\Delta t} - X(t)/g_t}{\Delta t} - X'(t)/g_t\right|^2\right] = 0 .$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка будем называть *интегрируемой на интервале* $T(\tau)$, если при произвольном разбиении интервала $T(\tau)$ на N интервалов $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ независимо от выбора точек t_n существует функция $Y(\tau)$ (*интеграл гиперслучайной функции* $X(t)$), определяемая выражением

$$Y(\tau) = \lim_{\substack{\max \Delta t_n \to 0 \\ g_{t_n} \to g_t}} \sum_n X(t_n)\,\Delta t_n = \int_{T(\tau)} X(t)\,\mathrm{d}t ,$$

т. е. если для всех $g_{t_n}, g_t \in G \ (n = \overline{1, N})$

$$\lim_{\substack{\max \Delta t_n \to 0 \\ g_{t_n} \to g_t}} \mathrm{M}\left[\left|\sum_n (X(t_n)/g_{t_n})\,\Delta t_n - \int_{T(\tau)} (X(t)/g_t)\mathrm{d}t\right|^2\right] = 0 .$$

Иначе, гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна, дифференцируема или интегрируема, если непрерывны условия и соответственно непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы составляющие случайные функции $X(t)/g_t$ для всех $g_t \in G$.

Заметим, что на основании известных теорем для случайных функций (см., например, [Горбань, 2003]) справедливы следующие утверждения:

1) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна в среднеквадратическом в точке t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ непрерывны в точке t, а ковариационные функции $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ этих случайных функций непрерывны в точке $t = t_1 = t_2$;

2) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка дифференцируема в точке t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ дифференцируемы в точке t и в точке $t_1 = t_2$ существуют смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ от ковариационных функций $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$;

3) гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка с математическими ожиданиями $m_{x/g_t}(t)$ и ковариационными функциями $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)$ интегрируема, если существуют интегралы $\int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)\,\mathrm{d}t$, $\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$. При этом

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)} X(t)/g_t\,\mathrm{d}t\right] = \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} (X(t_1)/g_{t_1})(X(t_2)/g_{t_2})\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right] =$$

$$= \int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_1}}(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_2}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости построены в данном случае на основе сходимости гиперслучайной последовательности в среднеквадратическом. Аналогично можно определить эти же понятия на основе сходимости по вероятности и с вероятностью единица. Определение этих понятий на основе сходимости по функции распределения вряд ли имеет смысл из-за неопределенного характера сходимости в смысле Бернулли [Анго, 1967].

СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Формализованы понятия стационарности и эргодичности гиперслучайных функций. Рассмотрены спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций. Исследованы свойства стационарных и эргодических гиперслучайных функций.

11.1. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Некоторые гиперслучайные функции обладают свойством стационарности. Прежде, чем переходить к рассмотрению стационарных гиперслучайных функций, напомним различные варианты определения понятия стационарной случайной функции, используемые в теории вероятностей, и основные их свойства [Гнеденко, 1988, Горбань, 2003].

Определение 1. *Случайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в узком смысле* (*строго*), если ее L-мерные распределения при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2 - t_1, ..., t_L - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t, где $t_1, ..., t_L$ — значения аргумента функции $X(t)$.

Случайные функции, не относящиеся к стационарным функциям, называются *нестационарными.*

Главной особенностью стационарной случайной функции является независимость ее вероятностных характеристик любой мерности L от смещения значений аргумента t, в частности L-мерной плотности распределения вероятностей

$$f(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) = f(x_1, \ldots, x_L; t_1 + \tau, \ldots, t_L + \tau), \qquad (11.1)$$

где τ — произвольное число.

Другой особенностью является независимость ее одномерных вероятностных характеристик от аргумента t, в частности плотность вероятностей $f(x;t) = f(x)$ (рис. 11.1).

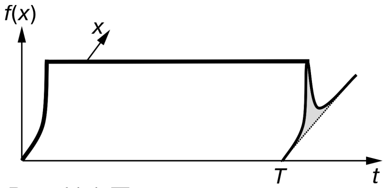


Рис. 11.1. Плотность распределения стационарной случайной функции $X(t)$

Третья особенность — двумерные вероятностные характеристики стационарной случайной функции $X(t)$ зависят только от разности $\tau = t_2 - t_1$ значений аргумента t, в частности плотность вероятностей $f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau)$.

Математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсия $D_x(t)$ стационарной случайной функции являются константами ($m_x(t) = m_x = \text{const}$, $D_x(t) = D_x = \text{const}$), а ковариационная функция $R_x(t_1, t_2)$ и нормированная ковариационная функция $r_x(t_1, t_2)$ определяются разностью своих аргументов ($R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$, $r_x(t_1, t_2) = r_x(\tau) = \dfrac{R_x(\tau)}{D_x}$).

Иногда стационарную в узком смысле случайную функцию определяют иначе.

Определение 2. *Случайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в узком смысле порядка* K, если ее вероятностные характеристики порядка $L \le K$ инвариантны к сдвигу вдоль оси t, в частности равенство (11.1) имеет место при $L \le K$.

Определение 3. *Случайная функция* $X(t)$ называется *асимптотически стационарной в узком смысле*, если ее L-мерные вероятностные характеристики при всех L имеют пределы при устремлении к бесконечности смещения τ вдоль оси t, в частности существует предел плотности вероятностей:

$$\lim_{\tau \to \infty} f(x_1, \ldots, x_L; t_1 + \tau, \ldots, t_L + \tau).$$

Определение 4. *Случайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в узком смысле на интервале* T, если она соответствует определению 1 для всех $t \in T$.

Определение 5. *Случайная функция* $X(t)$ *называется периодично стационарной* (*циклостационарной*) в узком смысле, если ее L-мерные вероятностные характеристики при всех L периодичны с периодом T_0, в частности

$$f(x_1, \ldots, x_L; t_1, \ldots, t_L) = f(x_1, \ldots, x_L; t_1 + kT_0, \ldots, t_L + kT_0),$$

где $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Понятие стационарности в узком смысле обобщается на случай двух и нескольких случайных функций. Остановимся на основной модификации этого понятия.

Определение 6. Две *случайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ называются *совместно стационарно связанными в узком смысле*, если их совместные $(N+M)$-мерные вероятностные характеристики при любых N и M зависят лишь от длины интервалов $t_2-t_1,...,t_N-t_1$; $t_1'-t_1,...,t_M'-t_1$, где $t_1,...,t_N$ — значения аргумента функции $X(t)$, а $t_1',...,t_M'$ — значения аргумента функции $Y(t)$.

Из приведенного определения следует, что, в частности, совместная плотность вероятностей

$$f_{N+M}(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M;t_1,...,t_N,t_1',...,t_M')=$$

$$=f_{N+M}(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M;t_1+\tau,...,t_N+\tau,t_1'+\tau,...,t_M'+\tau),$$

где τ — произвольное число.

Заметим, что из стационарности случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ не вытекает, что они совместно стационарно связаны в узком смысле.

На практике используют еще другое понятие стационарности.

Определение 7. *Случайная функция* $X(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно ($m_x(t)=m_x=\text{const}$), а ковариационная функция зависит только от разности значений аргумента t: $R_x(t_1,t_2)=R_x(\tau)$.

Заметим, что понятия стационарности в узком смысле и широком смысле не тождественны. Случайные функции, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Для гауссовских случайных функций понятия стационарности в узком и широком смысле тождественны.

Иногда используют понятия стационарных в широком смысле случайных функций, аналогичные рассмотренным выше модификациям стационарных в узком смысле случайных функций.

На практике встречается также понятие совместно стационарно связанных в широком смысле случайных функций, аналогичное понятию совместно стационарно связанных в узком смысле случайных функций.

Определение 8. Две *случайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ называются *совместно стационарно связанными в широком смысле*, если их математические ожидания постоянны, а взаимная корреляционная функция инвариантна к сдвигу вдоль оси t:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_{xy}[X(t_1)Y(t_2)] = K_{xy}(\tau), \ \tau = t_2 - t_1 .$$

Как и в случае стационарных в узком смысле случайных функций, стационарность в широком смысле случайных функций не гарантирует, что они стационарно связаны в широком смысле.

Вещественные стационарные случайные функции обладают рядом специфических свойств:

- $|R_x(\tau)| \le D_x$, $|r_x(\tau)| \le 1$;
- максимумы ковариационной функции и нормированной ковариационной функции соответствуют $\tau = 0$: $R_x(0) = D_x$, $r_x(0) = 1$;
- ковариационная функция и нормированная ковариационная функция — четные: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$, $r_x(\tau) = r_x(-\tau)$;
- взаимные ковариационная функция и нормированная ковариационная функции не являются четными, однако $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$, $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$;
- если ковариационная функция непрерывна при $\tau = 0$, то она непрерывна при любом τ.

Термин «*стационарность*» чаще всего используют в том случае, когда аргумент t — время. Если физический смысл аргумента t иной, употребляют термин «*однородность*». В случае функций нескольких аргументов, среди которых есть время, применяют оба термина. При этом, рассматривая временной аргумент, употребляют термин «стационарность», а анализируя остальные аргументы — «однородность».

Случайное поле может быть стационарным, но неоднородным, может быть однородным по одним аргументам и неоднородным по другим.

11.2. СТАЦИОНАРНЫЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Гиперслучайную функцию $X(t)=\{X(t)/g\in G\}$, где $X(t)/g$ — случайная функция в условиях g, назовем *стационарной в узком смысле* (*строго*), если границы ее L-мерных распределений при любом L зависят только от длительности интервалов t_2-t_1, ..., t_L-t_1 и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Гиперслучайные функции, не относящиеся к этим функциям, будем называть *нестационарными в узком смысле*.

Свойства стационарной гиперслучайной функции подобны свойствам стационарной случайной функции: границы многомерной функции распределения, многомерные плотности распределения границ, многомерные характеристические функции границ не зависят от смещения по t. Кроме того, перечисленные одномерные характеристики не зависят от аргумента t, а двумерные характеристики зависят от разности $\tau=t_2-t_1$ значений аргумента t, т. е.

$$f_{Sx}(x;t)=f_{Sx}(x)\,,\ \ f_{Ix}(x;t)=f_{Ix}(x)\,,$$

$$f_{Sx}(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_{Sx}(x_1,x_2;\tau)\,,$$

$$f_{Ix}(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_{Ix}(x_1,x_2;\tau)\,.$$

Моментные функции границ стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ обладают следующими свойствами: математические ожидания границ и дисперсии границ постоянны ($m_{Sx}(t)=m_{Sx}$, $m_{Ix}(t)=m_{Ix}$, $D_{Sx}(t)=D_{Sx}$, $D_{Ix}(t)=D_{Ix}$), а корреляционные функции границ

$$K_{Sx}(t_1,t_2)=\mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)]\,,\quad K_{Ix}(t_1,t_2)=\mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)]\,,$$

ковариационные функции границ

$$R_{Sx}(t_1,t_2)=\mathrm{M}_S[(X(t_1)-m_{Sx})(X(t_2)-m_{Sx})]\,,$$

$$R_{Ix}(t_1,t_2)=\mathrm{M}_I[(X(t_1)-m_{Ix})(X(t_2)-m_{Ix})]$$

и нормированные ковариационные функции границ

$$r_{Sx}(t_1,t_2)=\frac{R_{Sx}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}\,,\ \ r_{Ix}(t_1,t_2)=\frac{R_{Ix}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Ix}(t_1)D_{Ix}(t_2)}}$$

не зависят от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = K_{Sx}(\tau), \quad K_{Ix}(t_1, t_2) = K_{Ix}(\tau),$$

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = R_{Sx}(\tau), \quad R_{Ix}(t_1, t_2) = R_{Ix}(\tau),$$

$$r_{Sx}(\tau) = R_{Sx}(\tau) / D_{Sx}, \quad r_{Ix}(\tau) = R_{Ix}(\tau) / D_{Ix}.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ назовем стационарной в широком смысле, если математические ожидания ее границ постоянны $(m_{Sx}(t) = m_{Sx}, \; m_{Ix}(t) = m_{Ix})$, а корреляционные функции границ зависят только от разности значений аргумента t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1) X(t_2)] = K_{Sx}(\tau),$$

$$K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1) X(t_2)] = K_{Ix}(\tau).$$

Гиперслучайные функции, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Две *гиперслучайные функции $X(t)$ и $Y(t)$* назовем *совместно стационарно связанными в широком смысле*, если математические ожидания их границ постоянны, а их взаимные корреляционные функции границ инвариантны к смещению вдоль оси t:

$$K_{Sxy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1) Y(t_2)] = K_{Sxy}(\tau),$$

$$K_{Ixy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1) Y(t_2)] = K_{Ixy}(\tau).$$

Отметим, что стационарность гиперслучайных функций в широком смысле не гарантирует их совместную стационарную связанность в широком смысле.

Ковариационные функции границ и нормированные ковариационные функции границ вещественных стационарных гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ обладают следующими свойствами:

- $|R_{Sx}(\tau)| \le D_{Sx}$, $|r_{Sx}(\tau)| \le 1$, $|R_{Ix}(\tau)| \le D_{Ix}$, $|r_{Ix}(\tau)| \le 1$;
- максимумы ковариационных функций границ и нормированных ковариационных функций границ гиперслучайной функции имеют место при $\tau = 0$;
- функции $R_{Sx}(\tau)$, $R_{Ix}(\tau)$, $r_{Sx}(\tau)$, $r_{Ix}(\tau)$ — четные;
- $R_{Sxy}(\tau) = R_{Syx}(-\tau)$, $R_{Ixy}(\tau) = R_{Iyx}(-\tau)$,
  $r_{Sxy}(\tau) = r_{Syx}(-\tau)$, $r_{Ixy}(\tau) = r_{Iyx}(-\tau)$,

где $R_{Sxy}(\tau)$, $R_{Ixy}(\tau)$ — взаимные ковариационные функции границ, $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$ — нормированные взаимные ковариационные функции границ: $r_{Sxy}(\tau) = R_{Sxy}(\tau)/D_{Sxy}$, $r_{Ixy}(\tau) = R_{Ixy}(\tau)/D_{Ixy}$, $D_{Sxy} = R_{Sxy}(0)$, $D_{Ixy} = R_{Ixy}(0)$.

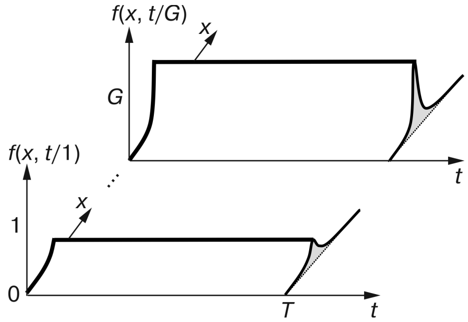


Рис. 11.2. Условные одномерные плотности распределения стационарной при всех условиях гиперслучайной функции $X(t) = \{X(t)/g, \quad g = 1,2,\ldots,G\}$

Гиперслучайную функцию $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ назовем *стационарной в узком смысле при всех условиях* $g \in G$, если при всех g ее условные L-мерные распределения при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2 - t_1,\ldots,t_L - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Одномерные условные вероятностные характеристики стационарной при всех условиях гиперслучайной функции не зависят от времени, в частности условные функции распределения $F(x;t/g) = F(x/g)$ и условные плотности вероятностей $f(x;t/g) = f(x/g)$ (рис. 11.2).

Гиперслучайную функцию $X(t)$ назовем *стационарной в широком смысле при всех условиях* $g \in G$, если при любом фиксированном условии g условное математическое ожидание $m_{x/g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x;t/g)\mathrm{d}x$ не зависит от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$), а условная корреляционная функция

$$K_{x/g}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

зависит лишь от разности значений аргумента t и условия g:

$$K_{x/g}(t_1,t_2) = K_{x/g}(\tau).$$

Отметим, что при этом условная ковариационная функция

$$R_{x/g}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_{x/g})(x_2 - m_{x/g}) \times$$

$$\times f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

также зависит только от τ и g.

Нетрудно убедиться, что границы математического ожидания

$$m_{sx}(t) = \sup_{g\in G} m_{x/g}(t),\quad m_{ix}(t) = \inf_{g\in G} m_{x/g}(t)$$

стационарной в широком смысле при всех условиях g гиперслучайной функции не зависят от времени t, т. е. $m_{sx}(t) = m_{sx}$, $m_{ix}(t) = m_{ix}$, а границы корреляционной функции

$$K_{sx}(\tau) = \sup_{g\in G} K_{x/g}(\tau),\quad K_{ix}(\tau) = \inf_{g\in G} K_{x/g}(\tau)$$

и границы ковариационной функции

$$R_{sx}(\tau) = \sup_{g\in G} R_{x/g}(\tau),\quad R_{ix}(\tau) = \inf_{g\in G} R_{x/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Гиперслучайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ назовем *совместно стационарно связанными при всех условиях* g, если условные математические ожидания этих функций $m_{x/g}(t)$, $m_{y/g}(t)$ не зависят от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$, $m_{y/g}(t) = m_{y/g}$), а условная взаимнокорреляционная функция

$$K_{xy/g}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$K_{xy/g}(t_1,t_2) = K_{xy/g}(\tau).$$

При этом условная взаимно-ковариационная функция

$$R_{xy/g}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_{x/g})(y - m_{y/g}) \times$$

$$\times f(x,y;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

также инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$R_{xy/g}(t_1,t_2) = R_{xy/g}(\tau)\,.$$

Нетрудно убедиться, что границы взаимно-корреляционной функции

$$K_{sxy}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{xy/g}(\tau), \quad K_{ixy}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{xy/g}(\tau)$$

и границы взаимно-ковариационной функции

$$R_{sxy}(\tau) = \sup_{g \in G} R_{xy/g}(\tau), \quad R_{ixy}(\tau) = \inf_{g \in G} R_{xy/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Следует обратить внимание, что понятия стационарной в широком смысле гиперслучайной функции и функции, стационарной в широком смысле при всех условиях, — разные понятия. Общими для них являются бесконечная длительность реализаций и инвариантность к сдвигу определенных (при этом разных) характеристик.

Введенные в настоящем параграфе понятия стационарной гиперслучайной функции базируются на определениях 1 и 7 понятия стационарной случайной функции. Подобным образом можно определить понятия стационарной гиперслучайной функции на основе других модификаций понятия стационарной случайной функции.

11.3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Спектральное представление гиперслучайных функций в ряде случаев существенно облегчает их анализ. В первую очередь это касается функций, обладающих свойством стационарности.

Назовем *спектральными плотностями мощности верхней и нижней границ* (*энергетическими спектрами границ*) стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ функции $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$, связанные с корреляционными функциями границ $K_{Sx}(f)$, $K_{Ix}(f)$ следующими соотношениями:

$$S_{Sxx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Sx}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{Ixx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Ix}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$K_{Sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Sxx}(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f \tau) \mathrm{d}f,$$

$$K_{Ix}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ixx}(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f \tau) \mathrm{d}f.$$

Спектральные плотности мощности границ обладают свойствами, характерными для спектральной плотности мощности случайного процесса:

- энергетические спектры (вне зависимости от того, является ли функция $X(t)$ вещественной или комплексной) действительны и неотрицательны, т. е. $S_{Sxx}(f) \geq 0$, $S_{Ixx}(f) \geq 0$;
- спектральные плотности мощности границ действительной гиперслучайной функции $X(t)$ четные, т. е.

$$S_{Sxx}(f) = S_{Sxx}(-f), \; S_{Ixx}(f) = S_{Ixx}(-f)$$

(это следует из того, что корреляционные функции границ стационарных гиперслучайных функций четные).

Назовем *гиперслучайным белым шумом* стационарную гиперслучайную функцию $N(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями границ, у которой спектральные плотности мощности границ представляют собой постоянные величины, т. е. $S_{Snn} = N_S/2$, $S_{Inn} = N_I/2$, где N_S, N_I — константы.

Нетрудно убедиться, что корреляционные функции границ гиперслучайного белого шума описываются с помощью δ-функции: $K_{Sn}(\tau) = N_S \delta(\tau)/2$, $K_{In}(\tau) = N_I \delta(\tau)/2$.

Отметим, что этими же выражениями описываются и ковариационные функции границ гиперслучайного белого шума.

Следует обратить внимание на то, что при определении гиперслучайного белого шума, так же, как и при определении случайного белого шума, не использованы понятия гауссовости и независимости сечений. Это означает, что гиперслучайный белый шум может быть негауссовским и с зависимыми (в том смысле, как это понимается в теории гиперслучайных явлений) сечениями.

Метод спектрального описания гиперслучайных функций допускает обобщение на случай стационарно связанных гиперслучайных функций.

Взаимными спектральными плотностями мощности границ двух стационарно связанных гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ будем называть детерминированные функции $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$, определяемые как преобразование Фурье взаимных корреляционных функций границ $K_{Sxy}(\tau)$ и $K_{Ixy}(\tau)$:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{Sxy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{Ixy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Взаимные корреляционные функции границ связаны с взаимными спектральными плотностями мощности границ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{Sxy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Sxy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ixy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Ixy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

В отличие от спектральных плотностей мощности границ одной гиперслучайной функции, взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями. Кроме того, они не являются четными, однако обладают свойствами эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = S^{*}_{Syx}(f), \quad \dot{S}_{Ixy}(f) = S^{*}_{Iyx}(f).$$

Нетрудно убедиться, что взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$, $\dot{S}_{Ixy}(f)$ функций $X(t)$ и $Y(t)$ связаны со спектральными плотностями мощности границ $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$ и $S_{Syy}(f)$, $S_{Iyy}(f)$ этих функций следующими неравенствами:

$$\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2 \le S_{Sxx}(f)S_{Syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2 \le S_{Ixx}(f)S_{Iyy}(f).$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *функции частотной когерентности границ* $\gamma_{Sxy}^2(f)$, $\gamma_{Ixy}^2(f)$, определяемые подобно функции частотной когерентности двух случайных функций:

$$\gamma_{Sxy}^2(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2}{S_{Sxx}(f)S_{Syy}(f)},$$

$$\gamma_{Ixy}^2(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2}{S_{Ixx}(f)S_{Iyy}(f)}.$$

Функции частотной когерентности границ лежат в интервале [0,1]. Если функции $X(t)$ и $Y(t)$ *некоррелированы*, то для всех $f \neq 0$ $\gamma_{Sxy}^2(f) = \gamma_{Ixy}^2(f) = 0$, если же они *линейно связаны*, то $\gamma_{Sxy}^2(f) = \gamma_{Ixy}^2(f) = 1$.

Функции частотной когерентности границ подобны нормированным ковариационным функциям границ $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$, однако в отличие от последних они характеризуют не только линейные, но и *нелинейные связи* между гиперслучайными функциями.

Мгновенным спектром гиперслучайной функции $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ в условиях g будем называть комплексную гиперслучайную функцию $\dot{S}_{x/g}(f)$, связанную с наблюдаемым при условии g процессом $X(t)/g$ преобразованием Фурье:

$$\dot{S}_{x/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (X(t)/g)\exp(-\mathrm{j}2\pi ft)\mathrm{d}t\ .$$

Мгновенный спектр стационарной при всех условиях g гиперслучайной функции обладает свойствами, подобными свойствам мгновенного спектра стационарной случайной функции. В частности, условное математическое ожидание $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)$ мгновенного спектра гиперслучайной функции $X(t)$ связано с условным математическим ожиданием $m_{x/g}$ функции $X(t)$ выражением $m_{\dot{S}_{x/g}}(f) = m_{x/g}\delta(f)$.

Определим *условный спектр мощности* $S_{xx/g}(f)$ функции $X(t)$ как преобразование Фурье условной корреляционной функции $K_{x/g}(\tau)$:

$$S_{xx/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{x/g}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $K_{x/g}(\tau)$ связана с $S_{xx/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{x/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx/g}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f .$$

Нетрудно показать, что *условную корреляционную функцию мгновенного спектра* $K_{\dot{S}_x/g}(f_1, f_2)$ стационарной при всех условиях гиперслучайной функции $X(t)$ можно представить следующим образом:

$$K_{\dot{S}_x/g}(f_1, f_2) = S_{xx/g}(f_1)\delta(f_2 - f_1) . \qquad (11.2)$$

Из выражения (11.2) следует, что

- мгновенный спектр стационарной гиперслучайной функции не является стационарной функцией;
- отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, ортогональны;
- при нулевых границах математического ожидания отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, не только ортогональны, но и некоррелированы.

Отметим, что условный спектр мощности $S_{xx/g}(f)$ связан с условным *мгновенным спектром* $\dot{S}_{x_T/g}(f)$, вычисляемым на интервале T, следующим соотношением:

$$S_{xx/g}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f)S^*_{x_T/g}(f)] .$$

Границы энергетического спектра можно определить таким образом:

$$S_{sxx}(f) = \sup_{g\in G} S_{xx/g}(f) , \quad S_{ixx}(f) = \inf_{g\in G} S_{xx/g}(f) .$$

Нетрудно убедиться, что границы энергетического спектра стационарной гиперслучайной функции связаны с ее мгновенным спектром при условии g соотношениями

$$S_{sxx}(f) = \lim_{T\to\infty} \sup_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)],$$

$$S_{ixx}(f) = \lim_{T\to\infty} \inf_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)].$$

Назовем *гиперслучайным белым шумом при всех условиях* стационарную при всех условиях гиперслучайную функцию $N(t)$, у которой условное математическое ожидание равно нулю, а условный спектр мощности не зависит от частоты, т. е. $S_{nn/g} = N_g/2$, где N_g — константа, в общем случае зависящая от условия g.

Условная корреляционная функция такого шума представляет собой δ-функцию: $K_{n/g}(\tau) = N_g \delta(\tau)/2$. Этим же выражением описывается и его ковариационная функция.

Заметим, что при определении понятия гиперслучайного белого шума при всех условиях не наложены ограничения на условные законы распределения. Лишь в частном случае они могут быть гауссовского типа.

Определим *условный взаимный спектр мощности* $\dot{S}_{xy/g}(f)$ *стационарных при всех условиях гиперслучайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ как преобразование Фурье условной взаимно-корреляционной функции $K_{xy/g}(\tau)$:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy/g}(\tau) \exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau) \mathrm{d}\tau,$$

где $K_{xy/g}(\tau)$ связана с $\dot{S}_{xy/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{xy/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{xy/g}(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f\tau) \mathrm{d}f.$$

Границы взаимного энергетического спектра можно определить следующим образом:

$$\dot{S}_{sxy}(f) = \mathrm{M}_i[\dot{S}_{xy}(f)], \quad \dot{S}_{ixy}(f) = \mathrm{M}_s[\dot{S}_{xy}(f)].$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ и границы взаимного энергетического спектра $\dot{S}_{sxy}(f)$ и $\dot{S}_{ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями, не являются четными и обладают свойством эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = S^{*}_{yx/g}(f)\,,\ \dot{S}_{sxy}(f) = S^{*}_{syx}(f)\,,\ \dot{S}_{ixy}(f) = S^{*}_{iyx}(f)\,.$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *границы функции частотной когерентности* $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$, определяемые как

$$\gamma^2_{sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}\,,\ \gamma^2_{ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}\,.$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ связан с условными взаимными спектрами мощности $S_{xx/g}(f)$ и $S_{yy/g}(f)$ следующим неравенством:

$$\left|\dot{S}_{xy/g}(f)\right|^2 \le S_{xx/g}(f)S_{yy/g}(f)\,,$$

однако границы взаимной спектральной плотности мощности $\dot{S}_{sxy}(f)$, $\dot{S}_{ixy}(f)$ не имеют подобной связи с границами спектральных плотностей мощности $S_{sxx}(f)$, $S_{ixx}(f)$ и $S_{syy}(f)$, $S_{iyy}(f)$, т. е. не всегда справедливы неравенства

$$\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2 \le S_{sxx}(f)S_{syy}(f)\,,$$

$$\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2 \le S_{ixx}(f)S_{iyy}(f)\,.$$

Поэтому границы функции частотной когерентности $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$ могут принимать значения, превышающие единицу.

11.4. ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Некоторые стационарные (однородные) гиперслучайные функции обладают специфическим свойством эргодичности. Прежде, чем переходить к рассмотрению эргодических гиперслучайных функций, напомним различные варианты определения понятия эргодической случайной функции, используемые в теории вероятностей, и основные свойства таких функций [Гнеденко, 1988, Горбань, 2003].

Для некоторых стационарных (или однородных) случайных функций расчет характеристик может быть проведен не путем усреднения по ансамблю реализаций, а усреднением данных лишь одной реализации. Такие случайные функции называются эргодическими. Известно несколько определений понятия эргодической случайной функции.

Определение 1. *Случайная функция* называется *эргодической*, если любая ее характеристика, полученная усреднением по множеству возможных реализаций, с вероятностью сколько угодно близкой к единице равняется среднему по времени, полученному из одной-единственной реализации случайной функции путем усреднения за бесконечный интервал времени.

Теорема 1. Необходимым условием эргодичности случайной функции является ее стационарность в узком смысле.

Определение 2. *Случайная функция* (*процесс*) $X(t)$ называется *эргодической по отношению к математическому ожиданию*, если

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)\,\mathrm{d}t = m_x .$$

Заметим, что не каждая стационарная функция является эргодической.

Теорема 2 (эргодическая). Случайная функция $X(t)$ является эргодической по отношению к математическому ожиданию тогда и только тогда, когда математическое ожидание m_x случайной функции постоянно, а ее ковариационная функция $R_x(t_1,t_2)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} R_x(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = 0 . \tag{11.3}$$

Достаточным условием справедливости равенства (11.3) является условие

$$\lim_{|t_2-t_1|\to\infty}\left|R_x(t_1,t_2)\right| = 0 ,$$

т. е. что ковариационная функция $R_x(t_1,t_2)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении модуля разности аргументов $|t_2-t_1|$.

Проверка выполнения этого условия обычно вызывает меньшие трудности, чем проверка условия (11.3).

Для стационарных случайных функций условие (11.3) может быть записано следующим образом:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_x(\tau)\mathrm{d}\,\tau=0\,.$$

Достаточным условием справедливости этого равенства является условие $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}|R_x(\tau)|=0$.

Определение 3. *Стационарная случайная функция* $X(t)$ называется *эргодической по отношению к ковариационной функции* $R_x(\tau)$, если

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\overset{\circ}{X}(t+\tau)\,\overset{\circ}{X}(t)\mathrm{d}t\,,$$

где $\overset{\circ}{X}(t)$ — центрированная случайная функция $X(t)$.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции по отношению к ковариационной функции $R_x(\tau)$ является равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)[R_x{}^2(\tau)+R_x(\tau+\tau_0)R_x(\tau-\tau_0)]\,\mathrm{d}\tau=0$$

при любом фиксированном τ_0 .

Часто эргодическая случайная функция определяется еще следующим образом.

Определение 4. *Стационарная в узком смысле случайная функция* $X(t)$ называется *эргодической*, если для каждой функции $\varphi(x(t_1),...,x(t_N))$ усредненное по аргументу t ее значение

$$\bar{\mathrm{M}}[\varphi(x(t_1),...,x(t_N)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi\,(x(t_1+t),...,x(t_N+t)\mathrm{d}t$$

почти наверное равно математическому ожиданию $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1),...$ $...,X(t_N)]$.

Некоторые в целом нестационарные случайные функции проявляют свойства стационарности и эргодичности на интервалах конечной длительности.

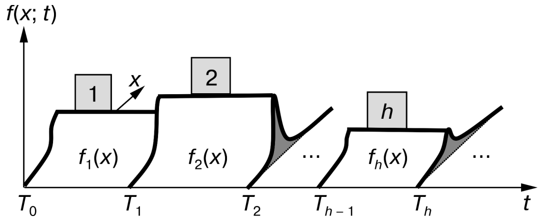


Рис. 11.3. Одномерная плотность распределения фрагментарно-эргодической случайной функции $X(t)$ с фрагментами, описываемыми одномерными плотностями распределения $f_h(x)$, $T_h - T_{h-1} = T$, $h = 1, 2, \ldots$

Фрагментарно-эргодической будем называть *случайную функцию* $X(t)$, состоящую из практически стационарных эргодических фрагментов определенной длительности T (рис. 11.3).

Под *практически стационарным эргодическим фрагментом случайной функции* в данном случае подразумевается такой ее фрагмент, характеристики которого (математическое ожидание, корреляционная функция и др.) могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации этого фрагмента.

При решении практических задач важным вопросом является определение длительности T практически стационарных фрагментов, иначе говоря, *интервала стационарности случайной функции*.

11.5. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Стационарную гиперслучайную функцию (*процесс*) $X(t) = \{X(t)/g \in G\} = \{X_g(t), g \in G\}$ будем называть *эргодической при всех условиях* g, если для всех g составляющие ее случайные функции $X_g(t)$ являются эргодическими.

Под эргодическими случайными функциями можно понимать функции, соответствующие одному из определений, приведенных в параграфе 11.4.

При использовании, в частности, определения 4, под гиперслучайной эргодической функцией подразумевается процесс $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$, для которого при всех условиях g среднее значение $\bar{\mathrm{M}}[\varphi(x(t_1)/g, \ldots, x(t_L)/g)]$ функции $\varphi(x(t_1)/g, \ldots, x(t_L)/g)$, рассчитанное по произвольно выбранной реализации

$x(t)/g$ случайной функции $X(t)/g$ путем усреднения по t на интервале $(-\infty, \infty)$, с вероятностью, равной единице, равно среднему, рассчитанному для функции $\varphi(X(t_1)/g, ..., X(t_L)/g)$ путем усреднения множества реализаций функции $X(t)/g$.

Это означает, что среднее по t на интервале длительностью T

$$\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1), ..., x(t_L))] = \left\{\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1)/g, ..., x(t_L)/g)], \quad g \in G\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(x(t_1+t)/g, ..., x(t_L+t)/g)\mathrm{d}\,t, \quad g \in G\right\}$$

множества функций $\varphi(x(t_1+t)/g, ..., x(t_L+t)/g)$, $g \in G$ сходится при $T \to \infty$ почти наверное к математическому ожиданию $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1), ..., X(t_L))]$ — множеству математических ожиданий $\mathrm{M}[\varphi(X(t_1)/g, ..., X(t_L))/g]$ случайных величин $\varphi(X(t_1)/g, ..., X(t_L)/g)$, вычисленных для различных условий g путем усреднения по ансамблю реализаций:

$$\lim_{T \to \infty} \bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(x(t_1), ..., x(t_L))] = \mathrm{M}[\varphi(X(t_1), ..., X(t_L))].$$

Если элементы множества G одинаковые, гиперслучайная эргодическая функция вырождается в случайную эргодическую функцию.

Границами среднего на интервале длительностью T *множества реализаций* $x(t) = \{x(t)/g \in G\} = \{x_g(t), \quad g \in G\}$ *эргодической гиперслучайной функции* $X(t)$ назовем функции

$$\bar{m}_{sx_T} = \sup_{g \in G} \bar{m}_{x_T/g}, \quad \bar{m}_{ix_T} = \inf_{g \in G} \bar{m}_{x_T/g},$$

границами корреляционной функции множества реализаций — функции

$$\bar{K}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g \in G} \bar{K}_{x_T/g}(\tau), \ \bar{K}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g \in G} \bar{K}_{x_T/g}(\tau),$$

а *границами ковариационной функции множества реализаций* — функции

$$\bar{R}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g \in G} \bar{R}_{x_T/g}(\tau), \ \bar{R}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g \in G} \bar{R}_{x_T/g}(\tau),$$

где $\bar{m}_{x_T/g} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_g(t)\,\mathrm{d}t$ — *среднее значение функции* $x_g(t)$, $\bar{K}_{x_T/g}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_g(t+\tau)\,x_g(t)\,\mathrm{d}t$ — автокорреляционная, а $\bar{R}_{x_T/g}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g}][x_g(t) - \bar{m}_{x_T/g}]\mathrm{d}t$ — автоковариационная функция функции $x_g(t)$ на интервале длительностью T.

При $T \to \infty$ границы среднего множества реализаций $\bar{m}_{sx}$, $\bar{m}_{ix}$ почти наверное сходятся к границам математического ожидания: $\bar{m}_{sx} = m_{sx}$, $\bar{m}_{ix} = m_{ix}$, границы корреляционной функции множества реализаций $\bar{K}_{sx}(\tau)$, $\bar{K}_{ix}(\tau)$ — к границам корреляционной функции $K_{sx}(\tau)$, $K_{ix}(\tau)$, границы ковариационной функции множества реализаций $\bar{R}_{sx}(\tau)$, $\bar{R}_{ix}(\tau)$ — к границам ковариационной функции $R_{sx}(\tau)$, $R_{ix}(\tau)$, а верхняя и нижняя границы дисперсии множества реализаций $\bar{D}_{sx} = \bar{R}_{sx}(0)$, $\bar{D}_{ix} = \bar{R}_{ix}(0)$ — к границам дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Приведенные результаты допускают обобщения на многомерный случай. В частности, *границами взаимной корреляционной функции множества реализаций* $x(t) = \{x_g(t),\quad g \in G\}$, $y(t) = \{y_g(t),\quad g \in G\}$ эргодических гиперслучайных функций

$$X(t) = \{X(t)/g \in G\} = \{X_g(t),\quad g \in G\},$$

$$Y(t) = \{Y(t)/g \in G\} = \{Y_g(t),\quad g \in G\}$$

можно назвать функции

$$\bar{K}_{sxy_T}(\tau) = \sup_g \bar{K}_{xy_T/g}(\tau),\ \bar{K}_{ixy_T}(\tau) = \inf_g \bar{K}_{xy_T/g}(\tau),$$

а *границами взаимной ковариационной функции множества реализаций* — функции

$$\bar{R}_{sxy_T}(\tau) = \sup_{g\in G} \bar{R}_{xy_T/g}(\tau),\ \bar{R}_{ixy_T}(\tau) = \inf_{g\in G} \bar{R}_{xy_T/g}(\tau),$$

где

$$\bar{K}_{xyT/g}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x_g(t+\tau)\, y_g(t) \mathrm{d}\, t$$

— взаимная корреляционная функция, а

$$\bar{R}_{xyT/g}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} (x_g(t+\tau) - \bar{m}_{xT/g})(y_g(t) - \bar{m}_{yT/g}) \mathrm{d}\, t$$

— взаимная ковариационная функция функций $x_g(t)$ и $y_g(t)$.

При $T \to \infty$ границы взаимной корреляционной функции множества реализаций $\bar{K}_{sxy}(\tau)$, $\bar{K}_{ixy}(\tau)$ почти наверное сходятся к границам взаимной корреляционной функции $K_{sxy}(\tau)$, $K_{ixy}(\tau)$, а границы взаимной ковариационной функции множества реализаций $\bar{R}_{sxy}(\tau)$, $\bar{R}_{ixy}(\tau)$ — к границам взаимной ковариационной функции $R_{sxy}(\tau)$, $R_{ixy}(\tau)$.

Аналогичным образом могут быть определены и другие усредненные характеристики.

Заметим, что так же, как и в теории случайных функций, для определения эргодической гиперслучайной функции можно использовать другой тип сходимости, например, вместо сходимости почти наверное применять сходимость в среднеквадратическом.

Вся информация о характеристиках случайной эргодической функции содержится в любой ее реализации. Это дает возможность вычислять моменты и другие характеристики по одной реализации.

К сожалению, для расчета характеристик гиперслучайной эргодической функции одной реализации недостаточно. Необходимо множество реализаций — по одной для каждых условий. Это существенно усложняет расчеты.

Обойтись одной реализацией можно в том случае, когда гиперслучайная функция проявляет свойства стационарности и эргодичности на интервалах конечной длительности. О таких гиперслучайных функциях идет речь в следующем параграфе.

11.6. ФРАГМЕНТАРНО-ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРИ ВСЕХ УСЛОВИЯХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим стационарную эргодическую при всех условиях гиперслучайную функцию $U(t)=\{U(t)/h,\ \ h=1,2,\ldots,H\}$ со стационарными эргодическими случайными составляющими $U(t)/h$.

Пусть на интервалах длительностью T составляющие $U(t)/h$ — практически эргодические, т. е. их характеристики могут быть вычислены с пренебрежимо малой погрешностью по одной реализации длительностью T.

Фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функцией будем называть гиперслучайную функцию $X(t)=$ $=\{X(t)/g,\ \ g=1,2,\ldots,G\}$, составляющие которой $X(t)/g$ — фрагментарно-эргодические случайные функции, сформированные из фрагментов практически эргодических случайных составляющих $U(t)/h$ длительностью T (рис. 11.4, 11.5).

Каждая реализация фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функции несет информацию о характеристиках всех фрагментов гиперслучайной функции. Поэтому для расчета характеристик такой функции достаточно одной (любой) реализации.

Следует обратить внимание на то, что для фрагментарно-эргодической случайной функции (см. рис. 11.3) порядок следования распределений $f_h(x)$ детерминирован; для фрагментарно-

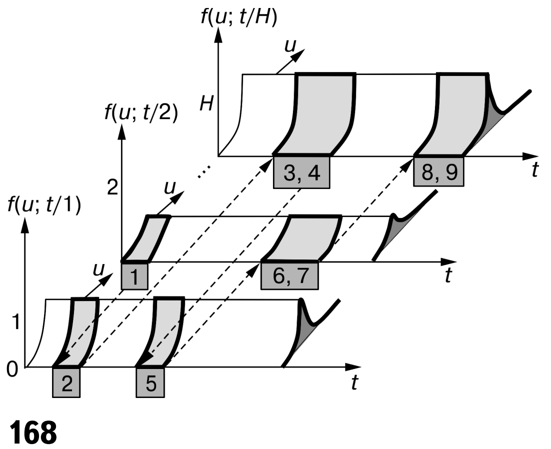


Рис. 11.4. Схема формирования фрагментарно-эргодической случайной функции $X(t)/g$ из стационарной эргодической при всех условиях гиперслучайной функции $U(t)=\{U(t)/h,\ h=1,2,\ldots,H\}$

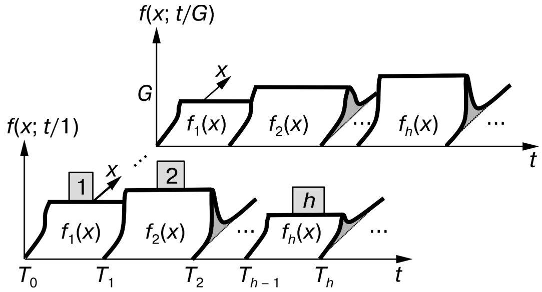


Рис. 11.5. Одномерные условные плотности распределения фрагментарно-эргодической при всех условиях гиперслучайной функции $X(t) = \{X(t)/g, \quad g = 1, 2, \ldots, G\}$ с фрагментами, описываемыми плотностями распределения $f_h(x)$, $h = 1, 2, \ldots, H$

эргодической при всех условиях гиперслучайной функции (см. рис. 11.5), когда условия g фиксированы, этот порядок тоже детерминирован, однако, когда условия не фиксированы, порядок не определен.

МАРКОВСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Понятие марковского случайного процесса обобщено на случай гиперслучайного процесса. Для гиперслучайного марковского процесса получены уравнения, аналогичные известным уравнениям Колмогорова для случайного марковского процесса. В качестве примеров рассмотрены винеровский и гауссовский гиперслучайные марковские процессы.

12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАРКОВСКОГО ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $X_0 = X(t_0),..., X_N = X(t_N)$ — значения непрерывного гиперслучайного процесса $X(t)$ в произвольные моменты времени $t_0 < t_1 < ... < t_N$. *Гиперслучайный процесс* $X(t)$ назовем *марковским*, если для любого момента времени t_N и любого условия $g_{t_N} \in G$ одномерная условная плотность вероятностей

$$f_1(x_N; t_N; g_{t_N} / x_0,..., x_{N-1}; t_0,..., t_{N-1}; g_{t_0},..., g_{t_{N-1}}) =$$
$$= f_1(x_N; t_N; g_{t_N} / x_{N-1}; t_{N-1}; g_{t_{N-1}}). \qquad (12.1)$$

Отсюда следует, что многомерная плотность вероятностей марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$f_N(x_0,..., x_N; t_0,..., t_N; g_{t_0},..., g_{t_N}) =$$
$$= f_1(x_0; t_0; g_{t_0}) \prod_{n=1}^{N} \Pi(x_n; t_n; g_{t_n} / x_{n-1}; t_{n-1}; g_{t_{n-1}}), \qquad (12.2)$$

где $\Pi(x_n; t_n; g_{t_n} / x_{n-1}; t_{n-1}; g_{t_{n-1}}) = f_1(x_n; t_n; g_{t_n} / x_{n-1}; t_{n-1}; g_{t_{n-1}})$ — плотность вероятностей перехода случайной величины $X(t)/g_t$, находящейся в состоянии x_{n-1} в момент времени t_{n-1} в условиях $g_{t_{n-1}}$, в состояние x_n в момент времени t_n в условиях g_{t_n}.

Из выражения (12.1) следует, что если значения гиперслучайного процесса в любые несовпадающие моменты времени независимы при всех условиях g_t, то процесс — марковский. Обратное утверждение неверно.

Плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})$ является неотрицательной величиной, нормированной к единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})\mathrm{d}x = 1.$$

Кроме того, эта плотность вероятностей обладает *свойством сингулярности*:

$$\lim_{\substack{t\to t' \\ g_t\to g_{t'}}} \Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'}) = \delta(x-x')$$

и удовлетворяет *обобщенному уравнению Маркова* (*уравнению Смолуховского*):

$$\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})\Pi(x';t';g_{t'}/x_0;t_0;g_{t_0})\mathrm{d}x'.$$

12.2. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МАРКОВСКОГО ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Для марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})$ из состояния x_0 в момент времени t_0 в условиях g_{t_0} в состояние x в момент времени t в условиях g_t определяется уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0})}{\nu!} \frac{\partial^\nu \Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})}{\partial x_0^\nu}, \qquad (12.3)$$

где

$$A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0}) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ g_{t_0+\Delta t}\to g_{t_0}}} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{M}\Big[(X(t_0+\Delta t;g_{t_0+\Delta t}/x_0;t_0;g_{t_0}) -$$

$$-X(t_0;g_{t_0}/x_0;t_0;g_{t_0}))^\nu\Big].$$

Это выражение прямо следует из известной теоремы для случайного марковского процесса [Королюк и др., 1985, Горбань, 2003].

Случайная величина $X(t_0+\Delta t;g_{t_0+\Delta t}/x_0;t_0;g_{t_0}) - X(t_0;g_{t_0}/x_0;t_0;g_{t_0})$ представляет собой приращение состояния, происходящее за время Δt. Поэтому коэффициенты $A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0})$ можно трактовать как локальные скорости изменения начальных моментов ν-го порядка приращения состояния.

По аналогии с уравнениями, описывающими диффузионные случайные процессы, гиперслучайные процессы, описываемые уравнением (12.3) с коэффициентами, равными нулю для всех $\nu \ge 3$, будем называть *первым* (*обратным*) *уравнением Колмогорова*:

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) = a(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial}{\partial x_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) +$$

$$+\frac{1}{2}b(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}), \qquad (12.4)$$

а уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\Big[a(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})\Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[b(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})\Big] \qquad (12.5)$$

— *уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова* или *прямым уравнением Колмогорова*, где $a(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_1(x_0;t_0;g_{t_0})$ — *коэффициент сноса*, а $b(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_2(x_0;t_0;g_{t_0})$ — *коэффициент диффузии.*

Гиперслучайные марковские процессы, описываемые уравнениями (12.4), (12.5), будем называть *диффузионными*.

Уравнения (12.4) и (12.5) — зависимые.

Из уравнения (12.5) следует уравнение для одномерной плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x;t;g_t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x;t;g_t) f_1(x;t;g_t)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x;t;g_t) f_1(x;t;g_t)\right]. \qquad (12.6)$$

Гиперслучайный диффузионный марковский процесс будем называть *однородным во времени*, если плотность вероятностей перехода $\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0})$ не зависит прямо от моментов времени t, t_0 и условий g_t, g_{t_0}, а определяется лишь их разностями $\tau = t - t_0$, $g_\tau = g_t - g_{t_0}$: $\Pi(x;t;g_t / x_0;t_0;g_{t_0}) = \Pi(x / x_0;\tau;g_\tau)$. Одномерная плотность вероятностей такого процесса $f_1(x)$, а также коэффициенты сноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ не зависят от времени и условий.

Если непрерывный гиперслучайный марковский процесс стационарен в узком смысле при всех условиях, то он однороден. Это следует из известной теоремы для случайных марковских процессов [Королюк и др., 1985]. Обратное утверждение неверно.

Из соотношения (12.6) следует, что для стационарного в узком смысле при всех условиях диффузионного однородного гиперслучайного марковского процесса

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[b(x) f_1(x)\right] = 2a(x) f_1(x) + C,$$

где C — константа, определяемая из условия нормировки.

Стохастическим дифференциальным уравнением, описывающим гиперслучайный процесс, будем называть уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h(x,t,g_t) + g(x,t,g_t) n(t;g_t),$$

где $h(x,t,g_t)$ и $g(x,t,g_t)$ — детерминированные функции, удовлетворяющие *условию Липшица:*

$$\left|h(x,t,g_t)-h(y,t,g_t)\right|+\left|g(x,t,g_t)-g(y,t,g_t)\right|\le L\left|x-y\right|$$

$$(L=\mathrm{const}>0)\,,$$

$N(t)=\{N(t;g_t),\ g_t\in G\}$ — *гиперслучайный гауссовский шум*, представляющий собой множество гауссовских некоррелированных случайных процессов $N(t;g_t)$ с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$, зависящей от условий g_t в момент времени t.

12.3. ВИНЕРОВСКИЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Рассмотрим следующую задачу статистической механики. Пусть в газе или жидкости находится микрочастица единичной массы. Температура среды T непредсказуемо меняется в пределах $[T_1,T_2]$. При фиксированной температуре T скорость теплового движения молекулы в фиксированном направлении представляет собой случайную величину, описываемую в приближении Максвелла гауссовским законом распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией kT/m [Яворский, Детлаф, 1968], где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы.

Из-за непредсказуемого изменения температуры среды скорость теплового движения молекулы статистически неустойчива и может быть описана гиперслучайной величиной, границы дисперсии которой равны kT_1/m, kT_2/m.

Молекулы, сталкиваясь с частицей, вызывают ее перемещение. В каждый фиксированный момент времени происходит большое число таких столкновений. Силу удара $N(t)$, вызывающего движение частицы вдоль заданного направления, и скорость движения частицы $V(t)$ можно рассматривать как гиперслучайные функции гауссовского типа.

Если при фиксированных статистических условиях g_t (температуре среды) сила удара описывается гауссовской случайной функцией $N(t;g_t)$ в виде гауссовского белого шума с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$, то на основании второго закона Ньютона скорость движения частицы $V(t;g_t)$ описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}v(t;g_t)}{\mathrm{d}t} = n(t;g_t). \tag{12.7}$$

Решением уравнения при нулевом начальном условии ($v(0;g_0)=0$) является *чисто диффузионный* (*винеровский*) *гиперслучайный процесс*:

$$v(t;g_t) = \int_0^t n(t_1;g_{t_1})\,\mathrm{d}t_1. \tag{12.8}$$

Из выражения (12.8) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t определяется множеством статистических условий в момент времени t и предшествующие ему моменты времени $t_1 < t$. Это значение зависит от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий.

Гиперслучайный винеровский процесс обладает свойствами, похожими (но не идентичными) свойствам случайного винеровского процесса:

• гиперслучайный винеровский процесс является центрированным ($m_v(t) = \mathrm{M}[V(t,g_t)] = 0$),

• дисперсия этого процесса описывается интегралом:

$$\sigma_v^2(t) = \int_0^t\int_0^t \mathrm{M}[N(t_1;g_{t_1})N(t_2;g_{t_2})]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \frac{1}{2}\int_0^t N_0(g_{t_1})\,\mathrm{d}t_1,$$

• процесс — гауссовский. Его плотность вероятностей описывается выражением

$$f_1(v;t;g_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2(t)}\right), \tag{12.9}$$

• процесс — марковский (так как описывается выражением

$$v(t_3) = v(t_2;g_{t_2}) + \int_{t_2}^{t_3} n(t,g_t)\,\mathrm{d}t),$$

• процесс имеет нулевой коэффициент сноса ($a(v;t;g_t)=0$) и коэффициент диффузии $b(v;t;g_t) = N_0(g_t)/2$, в общем случае зависящий от времени.

В частном случае, когда условия g_t не зависят от времени t ($g_t = g$), дисперсия винеровского гиперслучайного процесса $\sigma_v^2(t) = N_0(g)t/2$.

Границы дисперсии $\sigma_{iv}^2(t)$, $\sigma_{sv}^2(t)$ этого процесса описываются выражениями $\sigma_{iv}^2(t) = N_{i0}t/2$, $\sigma_{sv}^2(t) = N_{s0}t/2$, где $N_{i0}/2$ и $N_{s0}/2$ — соответственно нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности $N_0/2$ гиперслучайного гауссовского шума $N(t)$.

Отсюда следует, что диапазон изменения дисперсии винеровского гиперслучайного процесса расширяется пропорционально времени t.

Для гиперслучайного винеровского процесса с учетом приведенных свойств прямое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial f_1(v;t;g_t)}{\partial t} = \frac{1}{4} N_0(g_t) \frac{\partial^2 f_1(v;t;g_t)}{\partial v^2},$$

а его решение описывается выражением (12.9).

12.4. ГАУССОВСКИЙ МАРКОВСКИЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Обобщением рассмотренного винеровского гиперслучайного процесса является *гауссовский марковский гиперслучайный процесс* $X(t)$, случайные составляющие которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}x(t;g_t)}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t;g_t) = \gamma\, n(t;g_t), \tag{12.10}$$

где α, γ — постоянные коэффициенты.

К такому уравнению можно прийти, в частности, рассматривая предыдущую задачу с учетом вязкости среды.

Тот факт, что рассматриваемый гиперслучайный процесс $X(t)$ является гауссовским, следует из того, что $N(t;g_t)$ — гауссовский белый шум, а уравнение (12.10) — линейное. То, что гиперслучайный процесс $X(t)$ является марковским, следует из того, что случайный процесс $X(t;g_t)$ — марковский [Королюк и др., 1985].

Общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (12.10), является $x(t;g_t)=C\exp(-\alpha t)$, где C — константа. Частным решением этого уравнения является

$$x(t;g_t)=\gamma\exp(-\alpha t)\int_0^t n(t_1,g_{t_1})\exp(\alpha t_1)\mathrm{d}t_1 ,$$

а его общим решением —

$$x(t;g_t)=x(0,g_0)\exp(-\alpha t)+\gamma\exp(-\alpha t)\int_0^t n(t_1,g_{t_1})\exp(\alpha t_1)\mathrm{d}t_1, \quad (12.11)$$

где $x(0,g_0)$ — начальные условия в нулевой момент времени в условиях g_0.

Из выражения (12.11) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t так же, как и для винеровского гиперслучайного процесса, определяется множеством статистических условий g_{t_1} в предшествующие моменты времени $t_1<t$ и в момент времени t. Но в отличие от винеровского процесса это значение зависит не от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий g_{t_1}, а от последовательности следования этих условий.

Гиперслучайный гауссовский марковский процесс обладает свойствами, похожими (но не идентичными) свойствам случайного гауссовского марковского процесса:

- математическое ожидание гиперслучайного гауссовского марковского процесса не зависит от изменения во времени условий и определяется условиями g_0 в первоначальный момент времени: $m_x(t)=x(0;g_0)\exp(-\alpha t)$,
- дисперсия этого процесса

$$\sigma_x^2(t)=\frac{\gamma^2}{2}\int_0^t N_0(g_{t_1})\exp(2\alpha(t_1-t))\mathrm{d}t_1,$$

- ковариационная функция процесса

$$R_x(t_1,t_2)=\sigma_x^2(t)\exp(-\alpha|\tau|),$$

где $\tau=t_2-t_1$; $t=\min(t_1,t_2)\ge 0$,

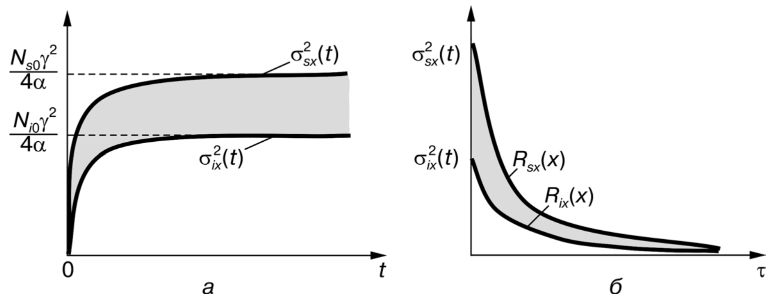


Рис. 12.1. Границы дисперсии (*а*) и границы ковариационной функции (*б*) гауссовского марковского гиперслучайного процесса

• коэффициент сноса $a(x;t;g_t) = -\alpha x(t;g_t)$, а коэффициент диффузии $b(x;t;g_t) = N_0(g_t)\gamma^2/2$.

Нетрудно убедиться, что при $\alpha > 0$ границы дисперсии, $\sigma^2_{ix}(t)$, $\sigma^2_{sx}(t)$ и границы ковариационной функции $R_{ix}(t_1,t_2)$, $R_{sx}(t_1,t_2)$ гауссовского марковского гиперслучайного процесса описываются выражениями

$$\sigma^2_{ix}(t) = \frac{N_{i0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\exp(-2\alpha t)\right),$$

$$\sigma^2_{sx}(t) = \frac{N_{s0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\exp(-2\alpha t)\right),$$

$$R_{ix}(t_1,t_2) = \sigma^2_{ix}(t)\exp(-\alpha|\tau|),$$

$$R_{sx}(t_1,t_2) = \sigma^2_{sx}(t)\exp(-\alpha|\tau|).$$

Отсюда следует, что с увеличением t диапазон изменения дисперсии гиперслучайного процесса постепенно возрастает, но при $t \to \infty$ стремится к независящему от времени интервалу $\left[N_{i0}\gamma^2/(4\alpha),\quad N_{s0}\gamma^2/(4\alpha)\right]$ (рис. 12.1, *а*). Дисперсия процесса в момент времени t определяется статистическими условиями в этот момент времени и предшествующие ему моменты времени.

При увеличении величины τ (интервала между отсчетами) диапазон изменения ковариационной функции уменьшается и при $\tau \to \infty$ стремится к нулю (рис. 12.1, *б*). При этом коэффициент корреляции процесса

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x^2(t)}=\exp(-\alpha|\tau|)$$

не зависит от изменения статистических условий во времени.

Прямое уравнение Колмогорова для плотности вероятностей гауссовского марковского гиперслучайного процесса имеет вид

$$\frac{\partial f_1(x;t;g_t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}[xf_1(x;t;g_t)]+\frac{\gamma^2 N_0(g_t)}{2}\frac{\partial^2 f_1(x;t;g_t)}{\partial x^2}.$$

Решение этого уравнения описывается гауссовской функцией

$$f_1(x;t;g_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)}\exp\left(-\frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}\right).$$

Глава 13

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Проанализированы известные способы представления гиперслучайных величин и процессов на предмет целесообразности их применения при описании различных типов преобразований. Получены соотношения, связывающие характеристики и параметры преобразованных и исходных гиперслучайных величин и процессов. Даны рекомендации по использованию различных способов описания гиперслучайных величин при линейных и нелинейных преобразованиях, а также гиперслучайных процессов при безынерционных и инерционных преобразованиях.

13.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СКАЛЯРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Гиперслучайные величины и процессы подвергаются различным преобразованиям. Естественно, возникает вопрос, как описать величину или процесс после преобразования, если известны параметры и характеристики до преобразования. Начнем рассмотрение вопроса с преобразования скалярной гиперслучайной величины.

13.1.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов

Поскольку скалярная гиперслучайная величина представляет собой множество скалярных условных случайных величин, для ее описания можно использовать известные способы описания последних. Изменения, происходящие при преобразовании, могут быть охарактеризованы с помощью характеристик и параметров условных случайных величин. К таким характеристикам и параметрам относятся, в частности, условные функции распределения, условные плотности распределения, а также центральные и нецентральные моменты этих распределений.

Если условная случайная величина X / g с плотностью распределения $f_{x/g}(x)$ подвергается однозначному преобразованию $y = \varphi(x)$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $x = \eta(y)$, то [Левин, 1974, Тихонов, Харисов, 1991, Горбань, 2003] условная плотность распределения преобразованной случайной величины Y / g записывается так:

$$f_{y/g}(y) = f_{x/g}(\eta(y))\left|\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y}\right|. \qquad (13.1)$$

Начальный $m_{y/g\nu}$ и центральный $\mu_{y/g\nu}$ моменты ν-го порядка преобразованной величины Y / g описываются формулами

$$m_{y/g\nu} = \mathrm{M}[Y^{\nu}/g]{=}\mathrm{M}[\varphi^{\nu}(X)/g],$$

$$\mu_{y/g\nu} = \mathrm{M}[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^{\nu}],$$

где $m_{y/g}$ и $m_{\varphi(x)/g}$ — математические ожидания соответственно условных случайных величин Y / g и $\varphi(X) / g$:

$$m_{y/g} = \mathrm{M}[(Y / g] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{y/g}(y)\mathrm{d}y,$$

$$m_{\varphi(x)/g} = \mathrm{M}[(\varphi(X) / g] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{x/g}(x)\mathrm{d}x.$$

Зависимость преобразованной гиперслучайной величины от исходной гиперслучайной величины проявляется также на уровне других характеристик и параметров.

13.1.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов

Теорема 1. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ с границами функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ и плотностями распределения границ $f_{Sx}(x)$, $f_{Ix}(x)$ подвергается однозначному преобразованию $y = \varphi(x)$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $x = \eta(y)$. Тогда границы функции распределения $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ и плотности распределения границ $f_{Sy}(y)$, $f_{Iy}(y)$ преобразованной гиперслучайной величины Y описываются выражениями

$$F_{Sy}(y) = F_{Sx}(\eta(y)),\; F_{Iy}(y) = F_{Ix}(\eta(y)), \qquad (13.2)$$

$$f_{Sy}(y) = f_{Sx}((y))\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y},\; f_{Iy}(y) = f_{Ix}(\eta(y))\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y}, \qquad (13.3)$$

если $\eta(y)$ — возрастающая функция, и

$$F_{Sy}(y) = 1 - F_{Ix}(\eta(y)), \quad F_{Iy}(y) = 1 - F_{Sx}(\eta(y)), \qquad (13.4)$$

$$f_{Sy}(y) = -f_{Ix}(\eta(y))\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y}, \quad f_{Iy}(y) = -f_{Sx}(\eta(y))\frac{\mathrm{d}\eta(y)}{\mathrm{d}y}, \qquad (13.5)$$

если $\eta(y)$ — убывающая функция.

Доказательство формул (13.2)—(13.5) основано на том факте, что гиперслучайные величины X и Y представляют собой соответственно семейство случайных величин X/g и Y/g $\forall g \in G$, а условная плотность распределения $f_{y/g}(y)$ преобразованной случайной величины Y/g связана с условной плотностью распределения $f_{x/g}(x)$ исходной случайной величины X/g соотношением (13.1).

Границы функции распределения $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ могут быть представлены в виде

$$F_{Sy}(y) = \sup_{g\in G}\int_{-\infty}^{y} f_{y/g}(y_1)\mathrm{d}y_1,\; F_{Iy}(y) = \inf_{g\in G}\int_{-\infty}^{y} f_{y/g}(y_1)\mathrm{d}y_1 .$$

Из этих выражений с учетом соотношения (13.1) и очевидного равенства

$$\sup_{g\in G}(a\psi(g) + b) = \begin{cases} a\sup\limits_{g\in G}\psi(g) + b, & \text{если} \quad a > 0, \\ a\inf\limits_{g\in G}\psi(g) + b, & \text{если} \quad a < 0, \\ b, \quad \text{если} \quad a = 0, \end{cases}$$

где a, b — константы, $\psi(g)$ — функция $g \in G$, получаются формулы (13.2), (13.4). Дифференцирование выражений (13.2), (13.4) приводит к формулам (13.3), (13.5).

Следствие. Из формул (13.2), (13.4) следует, что при выполнении условий теоремы границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения исходной гиперслучайной величины X трансформируются в границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения преобразованной гиперслучайной величины Y, причем, если функция $\eta(y)$ — монотонно возрастающая, то границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ преобразуются соответственно в верхнюю и нижнюю границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$, а если функция $\eta(y)$ — монотонно убывающая, то — соответственно в нижнюю и верхнюю границы $F_{Iy}(y)$, $F_{Sy}(y)$.

Не всегда границы функции распределения гиперслучайной величины X преобразуются в границы функции распределения гиперслучайной величины Y. Поэтому начальные $m_{Sy\nu}$, $m_{Iy\nu}$ и центральные $\mu_{Sy\nu}$, $\mu_{Iy\nu}$ моменты ν-го порядка границ гиперслучайной величины Y

$$m_{Sy\nu} = \mathrm{M}_{Sy}[Y^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f_{Sy}(y)\mathrm{d}y, \quad m_{Iy\nu} = \mathrm{M}_{Iy}[Y^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f_{Iy}(y)\mathrm{d}y,$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mathrm{M}_{Sy}[(Y - m_{Sy})^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{Sy})^{\nu} f_{Sy}(y)\mathrm{d}y,$$

$$\mu_{Iy\nu} = \mathrm{M}_{Iy}[(Y - m_{Iy})^{\nu}] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{Iy})^{\nu} f_{Iy}(y)\mathrm{d}y$$

могут отличаться от соответствующих моментов $m_{S\varphi(x)\nu}$, $m_{I\varphi(x)\nu}$, $\mu_{S\varphi(x)\nu}$, $\mu_{I\varphi(x)\nu}$ границ функции $\varphi^{\nu}(X)$, рассчитываемых по формулам

$$m_{S\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Sx}[\varphi^{\nu}(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{Sx}(x)\mathrm{d}x,$$

$$m_{I\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Ix}[\varphi^{\nu}(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{Ix}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mu_{S\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Sx}\left[\left(\varphi(x) - m_{S\varphi(x)}\right)^{\nu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x) - m_{S\varphi(x)}\right)^{\nu} f_{Sx}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mu_{I\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_{Ix}\left[\left(\varphi(x) - m_{I\varphi(x)}\right)^{\nu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi(x) - m_{I\varphi(x)}\right)^{\nu} f_{Ix}(x)\mathrm{d}x,$$

где $\mathrm{M}_{Sy}[\cdot]$, $\mathrm{M}_{Iy}[\cdot]$ — операторы математического ожидания границ распределения гиперслучайной величины Y; $m_{Sy} = \mathrm{M}_{Sy}[Y]$, $m_{Iy} = \mathrm{M}_{Iy}[Y]$ — математические ожидания границ гиперслучайной величины Y; $\mathrm{M}_{Sx}[\cdot]$, $\mathrm{M}_{Ix}[\cdot]$ — операторы математического ожидания границ распределения гиперслучайной величины X; $m_{S\varphi(x)} = \mathrm{M}_{Sx}[\varphi(X)]$, $m_{I\varphi(x)} = \mathrm{M}_{Ix}[\varphi(X)]$ — математические ожидания границ гиперслучайной величины $\varphi(X)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда начальные $m_{Sy\nu}$, $m_{Iy\nu}$ и центральные $\mu_{Sy\nu}$, $\mu_{Iy\nu}$ моменты ν-го порядка границ гиперслучайной величины Y связаны с соответствующими моментами $m_{S\varphi(x)\nu}$, $m_{I\varphi(x)\nu}$, $\mu_{S\varphi(x)\nu}$, $\mu_{I\varphi(x)\nu}$ ν-го порядка границ гиперслучайной величины $\varphi(X)$ следующими выражениями:

$$m_{Sy\nu} = m_{S\varphi(x)\nu}, \quad m_{Iy\nu} = m_{I\varphi(x)\nu},$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mu_{S\varphi(x)\nu}, \quad \mu_{Iy\nu} = \mu_{I\varphi(x)\nu}, \tag{13.6}$$

если $\eta(y)$ — возрастающая функция, и

$$m_{Sy\nu} = m_{I\varphi(x)\nu}, \quad m_{Iy\nu} = m_{S\varphi(x)\nu},$$

$$\mu_{Sy\nu} = \mu_{I\varphi(x)\nu}, \quad \mu_{Iy\nu} = \mu_{S\varphi(x)\nu}, \tag{13.7}$$

если $\eta(y)$ — убывающая функция.

Доказательство теоремы основано на следствии теоремы 1.

Следствие. Из выражений (13.6), (13.7) следует, что в случае преобразования $y = -x$ математические ожидания границ m_{Sy}, m_{Iy} гиперслучайной величины Y связаны с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} гиперслучайной величины X соотношениями $m_{Sy} = -m_{Ix}$, $m_{Iy} = -m_{Sx}$, а дисперсии границ D_{Sy}, D_{Iy} гиперслучайной величины Y — с дисперсиями границ D_{Sx}, D_{Ix} гиперслучайной величины X соотношениями $D_{Sy} = D_{Ix}$, $D_{Iy} = D_{Sx}$.

Иначе говоря, при изменении знака гиперслучайной величины математические ожидания верхней и нижней границ преобразованной величины равны математическим ожиданиям соответственно нижней и верхней границ исходной величины, взятым с противоположным знаком. Дисперсии же верхней и нижней границ преобразованной величины равны дисперсиям соответственно нижней и верхней границ исходной величины.

13.1.3. Описание преобразования с помощью границ моментов

Теорема 3. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ с условными плотностями распределения $f_{x/g}(x)$ подвергается преобразованию $y = \varphi(x)$. Тогда верхняя и нижняя границы начального момента ν-го порядка $m_{sy\nu}$, $m_{iy\nu}$ гиперслучайной величины Y равны соответственно верхней и нижней границам $m_{s\varphi(x)\nu}$, $m_{i\varphi(x)\nu}$ математического ожидания функции $\varphi^{\nu}(X)$: $m_{sy\nu} = m_{s\varphi(x)\nu}$, $m_{iy\nu} = m_{i\varphi(x)\nu}$, а верхняя и нижняя границы центрального момента ν-го порядка $\mu_{sy\nu}$, $\mu_{iy\nu}$ гиперслучайной величины Y — соответствующим границам $m_{s\varphi(x)\nu}$, $m_{i\varphi(x)\nu}$ центрального момента ν-го порядка функции $\varphi(X)$: $\mu_{sy\nu} = \mu_{s\varphi(x)\nu}$, $\mu_{iy\nu} = \mu_{i\varphi(x)\nu}$, где

$$m_{sy\nu} = \mathrm{M}_s[Y^{\nu}] = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[(Y / g)^{\nu}],$$

$$m_{iy\nu} = \mathrm{M}_i[Y^{\nu}] = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[(Y / g)^{\nu}],$$

$$m_{s\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_s[\varphi^{\nu}(x)] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{x/g}(x) \mathrm{d}x,$$

$$m_{i\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_i[\varphi^{\nu}(x)] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\nu}(x) f_{x/g}(x) \mathrm{d}x,$$

$$\mu_{sy\nu} = \mathrm{M}_s[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[(Y / g - m_{y/g})^{\nu}],$$

$$\mu_{iy\nu} = \mathrm{M}_i[(Y - m_{y/g})^{\nu}] = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[(Y / g - m_{y/g})^{\nu}],$$

$$\mu_{s\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_s[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^\nu] = \sup_{g\in G} \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^\nu],$$

$$\mu_{i\varphi(x)\nu} = \mathrm{M}_i[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^\nu] = \inf_{g\in G} \mathrm{M}[(\varphi(X)/g - m_{\varphi(x)/g})^\nu], \quad (13.8)$$

$\mathrm{M}_s[\cdot]$, $\mathrm{M}_i[\cdot]$ — операторы границ математического ожидания.

Теорема доказывается на основе определений (13.8) границ моментов.

Следствие 1. Из теоремы следует, что границы математического ожидания m_{sy}, m_{iy} преобразованной гиперслучайной величины Y равны соответственно границам математического ожидания $m_{s\varphi(x)}$, $m_{i\varphi(x)}$ функции $\varphi(X)$: $m_{sy} = m_{s\varphi(x)} = \mathrm{M}_s[\varphi(X)]$, $m_{iy} = m_{i\varphi(x)} = \mathrm{M}_i[\varphi(X)]$, а границы дисперсии D_{sy}, D_{iy} — соответственно границам дисперсии $D_{s\varphi(x)}$, $D_{i\varphi(x)}$ функции $\varphi(X)$:

$$D_{sy} = D_{s\varphi(x)} = \mathrm{M}_s[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^2],$$

$$D_{iy} = D_{i\varphi(x)} = \mathrm{M}_i[(\varphi(X) - m_{\varphi(x)/g})^2].$$

Следствие 2. В случае преобразования $y = -x$ границы математического ожидания m_{sy}, m_{sy} гиперслучайной величины Y связаны с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix} гиперслучайной величины X соотношениями $m_{sy} = -m_{ix}$, $m_{iy} = -m_{sx}$, а границы дисперсии D_{sy}, D_{iy} величины Y связаны с границами дисперсии D_{sx}, D_{ix} величины X соотношениями $D_{sy} = D_{sx}$, $D_{iy} = D_{ix}$.

Таким образом, при изменении знака гиперслучайной величины верхняя и нижняя границы математического ожидания преобразованной величины равны соответственно нижней и верхней границам математического ожидания исходной величины, взятым с противоположным знаком, а верхняя и нижняя границы дисперсии преобразованной величины — соответственно верхней и нижней границам дисперсии исходной величины.

Пример 1. Рассмотрим пример, иллюстрирующий теоремы. Пусть гиперслучайная величина X подвергается линейному преобразованию $y = ax + b$. Тогда согласно выражениям (13.2)—(13.5) верхняя и нижняя границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения и плотности распределения границ $f_{Sy}(y)$, $f_{Iy}(y)$ преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с верхней и нижней границами $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения и плотностями распределения границ $f_{Sx}(x)$, $f_{Ix}(x)$ исходной гиперслучайной величины X следующими соотношениями:

$$F_{Sy}(y) = F_{Sx}((y-b)/a), \quad F_{Iy}(y) = F_{Ix}((y-b)/a),$$

$$f_{Sy}(y) = \frac{1}{a} f_{Sx}\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_{Iy}(y) = \frac{1}{a} f_{Ix}\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

если $a > 0$, и

$$F_{Sy}(y) = 1 - F_{Ix}((y-b)/a), \quad F_{Iy}(y) = 1 - F_{Sx}((y-b)/a),$$

$$f_{Sy}(y) = -\frac{1}{a} f_{Ix}\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_{Iy}(y) = -\frac{1}{a} f_{Sx}\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

если $a < 0$.

Таким образом, при преобразовании $y = ax + b$ верхняя и нижняя границы $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$ функции распределения исходной гиперслучайной величины X при положительном значении коэффициента a трансформируются соответственно в верхнюю и нижнюю границы $F_{Sy}(y)$, $F_{Iy}(y)$ функции распределения преобразованной гиперслучайной величины Y, а при отрицательном значении этого коэффициента — соответственно в нижнюю и верхнюю границы $F_{Iy}(y)$, $F_{Sy}(y)$ этой величины.

При этом согласно формулам (13.6), (13.7) математические ожидания границ m_{Sy}, m_{Iy} и дисперсии границ D_{Sy}, D_{Iy} преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} и дисперсией границ D_{Sx}, D_{Ix} исходной гиперслучайной величины X соотношениями $m_{Sy} = am_{Sx} + b$, $m_{Iy} = am_{Ix} + b$, $D_{Sy} = a^2 D_{Sx}$, $D_{Iy} = a^2 D_{Ix}$, если $a > 0$, и $m_{Sy} = am_{Ix} + b$, $m_{Iy} = am_{Sx} + b$, $D_{Sy} = a^2 D_{Ix}$, $D_{Iy} = a^2 D_{Sx}$, если $a < 0$.

С учетом следствия 1 из теоремы 3 границы математического ожидания m_{sy}, m_{iy} преобразованной гиперслучайной величины Y связаны с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix} исходной гиперслучайной величины X соотношениями $m_{sy} = am_{sx} + b$,

$m_{iy} = am_{ix} + b,$ если $a > 0$, и $m_{sy} = am_{ix} + b,$ $m_{iy} = am_{sx} + b,$ если $a < 0$. Границы же дисперсии D_{sy}, D_{iy} гиперслучайной величины Y вне зависимости от знака коэффициента a связаны с границам дисперсии D_{sx}, D_{ix} гиперслучайной величины X соотношениями $D_{sy} = a^2 D_{sx}$, $D_{iy} = a^2 D_{ix}$.

13.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРНОЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

13.2.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов

Векторная гиперслучайная величина представляет собой множество векторных условных случайных величин. Поэтому преобразование векторной гиперслучайной величины можно рассматривать как независимое преобразование векторных случайных ее составляющих.

Если условная H-мерная векторная случайная величина $\vec{X}/g$ с плотностью распределения $f_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ подвергается однозначному преобразованию $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$, имеющему однозначную обратную непрерывно дифференцируемую функцию $\vec{x} = \vec{\eta}(\vec{y})$, то [Левин, 1974, Тихонов, Харисов, 1991, Горбань, 2003] плотность распределения преобразованной случайной величины $\vec{Y}/g$ могут быть представлены следующим образом:

$$f_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = f_{\vec{x}/g}(\eta_1(\vec{y}),\ldots,\eta_H(\vec{y}))\left|J_H(\vec{y})\right|,$$

где $J_H(\vec{y})$ — якобиан преобразования переменных:

$$J_H(\vec{y}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\eta_1(\vec{y})}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial\eta_1(\vec{y})}{\partial y_H} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\eta_H(\vec{y})}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial\eta_H(\vec{y})}{\partial y_H} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что зависимость между функциями распределения $F_{\vec{y}/g}(\vec{y})$, $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ преобразованной и исходной случайными величинами $\vec{Y}/g$ и $\vec{X}/g$ носит существенно более сложный характер, чем между плотностями распределения, поскольку интеграл, стоящий в правой части выражения

$$F_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = \int_{-\infty}^{y_1} \ldots \int_{-\infty}^{y_H} f_{\vec{y}/g}(\vec{y}) \mathrm{d}\vec{y} = \int \ldots \int_{V(\vec{y})} f_{\vec{x}/g}(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}$$

(где $V(\vec{y}_0)$ — область интегрирования в системе координат $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_H$, соответствующая неравенствам $y_1 < y_{01}, \ldots, y_H < y_{0H}$ в системе координат $y_1, \ldots, y_H$), в общем случае не является функцией распределения случайной величины $\vec{X}/g$.

Сложный характер зависимости имеет место даже при линейном преобразовании с поворотом осей координат. Лишь в простейшем случае покоординатного преобразования, описываемого монотонно возрастающими функциями $x_h = \eta_h(y_h)$, $h = \overline{1, H}$, получается простая зависимость $F_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = F_{\vec{x}/g}(\eta_1(y_1), \ldots$ $\ldots, \eta_H(y_H))$.

В двумерном случае, когда гиперслучайная величина $\vec{X} = (X_1, X_2)$ подвергается преобразованию, описываемому функциями $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = x_2$, имеющими непрерывно дифференцируемые однозначные обратные функции $x_1 = \eta_1(y_1, y_2)$, $x_2 = y_2$, условные плотности распределения компоненты Y_1 гиперслучайного вектора $\vec{Y}$ имеют вид $f_{y_1/g}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(\eta_1(y_1, y_2), y_2) \left| \frac{\partial \eta_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \right| \mathrm{d}y_2$.

Эта известная формула позволяет рассчитать условные плотности распределения гиперслучайной величины Y, получаемой в результате арифметических операций над гиперслучайными величинами X_1, X_2. В частности, при сложении величин условная плотность распределения

$$f_{y/g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(y - x_2, x_2) \mathrm{d}x_2,$$

при вычитании —

$$f_{y/g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{x}/g}(y + x_2, x_2) \mathrm{d}x_2,$$

при умножении —

$$f_{y/g}(y) = \int_0^\infty f_{\vec{x}/g}\left(\frac{y}{x_2}, x_2\right)\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}$$

и при делении —

$$f_{y/g}(y) = \int_0^\infty f_{\vec{x}/g}\left(yx_2, x_2\right)x_2\mathrm{d}x_2 .$$

При преобразовании $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$ начальный $m_{\vec{y}/g\nu_1,\dots,\nu_H}$ и центральный $\mu_{\vec{y}/g\nu_1,\dots,\nu_H}$ моменты $\nu_1,\dots,\nu_H$-го порядка преобразованной величины $\vec{Y}/g$ имеют следующий вид:

$$m_{\vec{y}/g\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}[Y_1^{\nu_1}\dots Y_H^{\nu_H}/g] = \mathrm{M}[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\dots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})/g],$$

$$\mu_{\vec{y}/g\nu_1,\dots,\nu_H} = \mathrm{M}[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\dots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}[(\varphi_1(\vec{X})/g - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\dots(\varphi_H(\vec{X})/g - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}], \qquad (13.9)$$

где $m_{y_h/g}$ и $m_{\varphi_h(\vec{x})/g}$ — математические ожидания h-й компоненты соответственно условных случайных величин $\vec{Y}/g$ и $\vec{\varphi}(\vec{X})/g$:

$$m_{y_h/g} = \mathrm{M}[Y_h/g] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{y_h/g}(y)\mathrm{d}y ,$$

$$m_{\varphi_h(\vec{x})/g} = \mathrm{M}[\varphi_h(\vec{X})/g] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(\vec{x}) f_{x_h/g}(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} .$$

13.2.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов

Как следует из изложенного выше, в скалярном случае характеристики и параметры границ распределения преобразованной величины достаточно просто выражаются через такие же характеристики и параметры границ исходной величины. Это значительно облегчает анализ. К сожалению, получить в векторном случае подобные простые зависимости не удается.

Вызвано это тем, что границы функции распределения преобразованной гиперслучайной величины $\vec{Y}$ сложным образом зависят от границ функции распределения исходной величины $\vec{X}$.

Расчет границ $F_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $F_{I\vec{y}}(\vec{y})$ по данным величины $\vec{X}$ требует знания условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ $\forall g \in G$ и предполагает выполнение ряда шагов:

• расчет по условным функциям распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ исходной величины $\vec{X}$ условных плотностей распределения

$$f_{\vec{x}/g}(\vec{x}) = \frac{\partial^H F_{\vec{x}/g}(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_H},$$

• нахождение условных плотностей распределения $f_{\vec{y}/g}(\vec{y})$ преобразованной величины $\vec{Y}$ с учетом якобиана преобразования переменных,

• определение условных функций распределения

$$F_{\vec{y}/g}(\vec{y}) = \int_{-\infty}^{y_1} \ldots \int_{-\infty}^{y_H} f_{\vec{y}/g}(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y},$$

• расчет верхней и нижней границ функции распределения $F_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $F_{I\vec{y}}(\vec{y})$.

Плотность распределения границ преобразованной величины можно найти путем дифференцирования границ функции распределения:

$$f_{S\vec{y}}(\vec{y}) = \frac{\partial^H F_{S\vec{y}}(\vec{y})}{\partial x_1 \ldots \partial x_H}, \quad f_{I\vec{y}}(\vec{y}) = \frac{\partial^H F_{I\vec{y}}(\vec{y})}{\partial x_1 \ldots \partial x_H}.$$

Начальные $m_{S\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$, $m_{I\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$ и центральные $\mu_{S\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$, $\mu_{I\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$ моменты границ преобразованной векторной гиперслучайной величины вычисляются с помощью плотностей распределения границ $f_{S\vec{y}}(\vec{y})$, $f_{I\vec{y}}(\vec{y})$:

$$m_{S\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_S[Y_1^{\nu_1} \ldots Y_H^{\nu_H}], \quad m_{I\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_I[Y_1^{\nu_1} \ldots Y_H^{\nu_H}],$$

$$\mu_{S\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_S[(Y_1 - m_{Sy_1})^{\nu_1} \ldots (Y_H - m_{Sy_H})^{\nu_H}],$$

$$\mu_{I\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_I[(Y_1 - m_{Iy_1})^{\nu_1} \ldots (Y_H - m_{Iy_H})^{\nu_H}].$$

13.2.3. Описание преобразования с помощью границ моментов

Расчет границ моментов не столь сложен. Моменты границ преобразованной величины описываются следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть H-мерная гиперслучайная величина $\vec{X}$ подвергается преобразованию $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$. Тогда границы начальных $m_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$, $m_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$ и центральных $\mu_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$, $\mu_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H}$ моментов $\nu_1,\ldots,\nu_H$-го порядка преобразованной величины $\vec{Y}$ описываются формулами

$$m_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_s[Y_1^{\nu_1}\ldots Y_H^{\nu_H}]=\mathrm{M}_s[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\ldots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})]=m_{s\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$m_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_i[Y_1^{\nu_1}\ldots Y_H^{\nu_H}]=\mathrm{M}_i[\varphi_1^{\nu_1}(\vec{X})\ldots\varphi_H^{\nu_H}(\vec{X})]=m_{i\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$\mu_{s\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_s[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\ldots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}_s[(\varphi_1(\vec{X}) - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\ldots(\varphi_H(\vec{X}) - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}] = \mu_{s\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H},$$

$$\mu_{i\vec{y}\nu_1,\ldots,\nu_H} = \mathrm{M}_i[(Y_1 - m_{y_1/g})^{\nu_1}\ldots(Y_H - m_{y_H/g})^{\nu_H}] =$$

$$= \mathrm{M}_i[(\varphi_1(\vec{X}) - m_{\varphi_1(\vec{x})/g})^{\nu_1}\ldots(\varphi_H(\vec{X}) - m_{\varphi_H(\vec{x})/g})^{\nu_H}] = \mu_{i\vec{\varphi}(\vec{x})\nu_1,\ldots,\nu_H}. \quad (13.10)$$

Соотношения (13.10) следуют из формул (13.9).

Следствие. Из соотношений (13.10) видно, что границы математического ожидания m_{sy_h}, m_{iy_h} h-й компоненты гиперслучайной величины $\vec{Y}$ описываются выражениями

$$m_{sy_h} = \mathrm{M}_s\left[Y_h\right] = \mathrm{M}_s\left[\varphi_h(\vec{X})\right] = m_{s\varphi_h(\vec{x})},$$

$$m_{iy_h} = \mathrm{M}_i\left[Y_h\right] = \mathrm{M}_i\left[\varphi_h(\vec{X})\right] = m_{i\varphi_h(\vec{x})}, \quad (13.11)$$

а границы дисперсии D_{sy_h}, D_{iy_h} h-й компоненты — выражениями

$$D_{sy_h} = \mathrm{M}_s[(Y_h - m_{y_h/g})^2] = \mathrm{M}_s[(\varphi_h(\vec{X}) - m_{\varphi_h(x)/g})^2] = D_{s\varphi_h(\vec{x})},$$

$$D_{iy_h} = \mathrm{M}_i[(Y_h - m_{y_h/g})^2] = \mathrm{M}_i[(\varphi_h(\vec{X}) - m_{\varphi_h(x)/g})^2] = D_{i\varphi_h(\vec{x})}. \quad (13.12)$$

13.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

13.3.1. Безынерционное преобразование гиперслучайного процесса

При безынерционном преобразовании гиперслучайного процесса $X(t) = \{X(t) / g \in G\}$ в гиперслучайный процесс $Y(t) = \{Y(t) / g \in G\}$ каждое сечение воздействия $X(t)$ порождает соответствующее сечение отклика $Y(t)$.

Для фиксированных условий $g \in G$ M-мерное условное распределение $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$ ($\vec{x} = (x_1,\ldots,x_M)$, $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_M)$) случайного процесса $X(t)/g$ можно рассматривать как функцию распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x})$ условной векторной случайной величины $\vec{X}/g$, каждая m-я компонента которой равна сечению случайного процесса $X(t)/g$ в момент времени t_m ($m = \overline{1,M}$). Поэтому все характеристики и параметры гиперслучайного процесса $X(t)$ совпадают с характеристиками и параметрами соответствующей векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$.

Аналитическая запись характеристик и параметров гиперслучайного процесса отличается от записи характеристик и параметров гиперслучайной величины лишь формально наличием параметра, указывающего на зависимость этих характеристик и параметров от времени. Указанное совпадение характеристик и параметров позволяет использовать для описания безынерционных преобразований гиперслучайных процессов соотношения, описывающие преобразования векторных гиперслучайных величин.

13.3.2. Преобразование гиперслучайного процесса линейным инерционным оператором

Рассмотрим линейный физически реализуемый стационарный фильтр, характеризуемый импульсной переходной характеристикой $h(\tau)$. Отклик $y(t)$ такого фильтра на воздействие процесса $x(t)$ описывается сверткой

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau .$$

При поступлении на вход фильтра гиперслучайного процесса $X(t) = \{X(t) / g \in G\}$, представляемого множеством условных функций распределения $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};\vec{t})$, на выходе гиперслучайный процесс $Y(t) = \{Y(t) / g \in G\}$ описывается множеством условных функций распределения $F_{\vec{y}/g}(\vec{y};\vec{t})$. Расчет функции $F_{\vec{y}/g}(\vec{y};\vec{t})$ — непростая задача.

Однако основные характеристики отклика связаны с характеристиками входного воздействия достаточно просто. В частности, первые два момента случайного процесса $Y(t)/g$ для фиксированных условий g описываются [Левин, 1974, Горбань, 2003] следующими формулами:

$$m_{y/g}(t) = \int_0^t m_{x/g}(t-\tau)\, h(\tau) d\tau ,$$

$$K_{y/g}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{x/g}(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\, h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 ,$$

$$R_{y/g}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_{x/g}(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\, h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 , \qquad (13.13)$$

$$R_{xy/g}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} R_{x/g}(t_1, t_2-\tau)\, h(\tau) d\tau ,$$

где $m_{y/g}(t)$, $m_{x/g}(t)$ — условные математические ожидания отклика и входного воздействия; $K_{y/g}(t_1,t_2)$, $K_{x/g}(t_1,t_2)$ — условные корреляционные функции отклика и входного воздействия; $R_{y/g}(t_1,t_2)$, $R_{x/g}(t_1,t_2)$ — условные ковариационные функции отклика и входного воздействия; $R_{xy/g}(t_1,t_2)$ — условная взаимная ковариационная функция отклика и входного воздействия.

Знания условных моментов недостаточно для расчета моментов границ преобразованного процесса, но достаточно для расчета границ его моментов:

$$m_{sy}(t) = \sup_{g\in G} m_{y/g}(t) , \quad m_{iy}(t) = \inf_{g\in G} m_{y/g}(t) ,$$

$$R_{sy}(t_1,t_2) = \sup_{g \in G} R_{y/g}(t_1,t_2), \quad R_{iy}(t_1,t_2) = \inf_{g \in G} R_{y/g}(t_1,t_2)$$

и др.

В случае стационарного в широком смысле при всех условиях гиперслучайного процесса $X(t)$, когда при любом фиксированном $g \in G$ условное математическое ожидание $m_{x/g}$ не зависит от аргумента t, а условная корреляционная функция $K_{x/g}(\tau)$ зависит лишь от разности τ значений аргумента t и условий g, соотношения (13.13) имеют более простой вид:

$$m_{y/g}(t) = m_{x/g}\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau ,$$

$$K_{y/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{x/g}(t_2 - \tau_2 - (t_1 - \tau_1))h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$R_{y/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_{x/g}(t_2 - \tau_2 - (t_1 - \tau_1))\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$R_{xy/g}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} R_{x/g}(t_2 - \tau - t_1)\, h(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

Из этих выражений видно, что отклик на воздействие стационарного при всех условиях гиперслучайного процесса представляет собой в общем случае нестационарный гиперслучайный процесс. Однако при рассмотрении отклика в моменты времени, отстоящие от начала воздействия входного процесса на величину, превосходящую длительность импульсной переходной характеристики T, отклик оказывается стационарным, процессы $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарно связанными при всех условиях и формулы приобретают следующий вид:

$$m_{y/g} = m_{x/g}\int_0^T h(\tau)\mathrm{d}\tau ,$$

$$K_{y/g}(\tau) = \int_0^T\int_0^T K_{x/g}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$R_{y/g}(\tau) = \int_0^T\int_0^T R_{x/g}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$R_{xy/g}(\tau) = \int_0^T R_{x/g}(\tau - t_1)\, h(t_1)\mathrm{d}t_1 . \qquad (13.14)$$

Нетрудно убедиться, что при этом условные спектральные плотности мощности отклика $S_{y/g}(f)$ и входного воздействия $S_{x/g}(f)$ связаны между собой соотношением

$$S_{y/g}(f) = |\, K(f)\,|^2\; S_{x/g}(f)\,, \qquad (13.15)$$

где $K(f)$ — передаточная характеристика фильтра.

В стационарном случае справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть стационарный при всех условиях гиперслучайный процесс $X(t)$ с границами математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, границами спектральной плотности мощности $S_{sx}(f)$, $S_{ix}(f)$, корреляционными функциями этих границ $K_{S_{sx}}(\tau)$, $K_{S_{ix}}(\tau)$ и их ковариационными функциями $R_{S_{sx}}(\tau)$, $R_{S_{ix}}(\tau)$ подвергается фильтрации фильтром, описываемым комплексной передаточной характеристикой $\dot{K}(f)$, соответствующей импульсной переходной характеристике $h(t)$ длительностью T. Тогда отклик фильтра в момент времени $t > T$ представляет собой стационарный гиперслучайный процесс. Границы математического ожидания этого процесса $m_{sy} = K(0)m_{sx}$, $m_{iy} = K(0)m_{ix}$, если $K(0) > 0$, и $m_{sy} = K(0)m_{ix}$, $m_{iy} = K(0)m_{sx}$, если $K(0) < 0$, границы спектральной плотности мощности

$$S_{sy}(f) = \left|K(f)\right|^2 S_{sx}(f)\,,\; S_{iy}(f) = \left|K(f)\right|^2 S_{ix}(f)\,,$$

корреляционные функции границ спектральной плотности мощности

$$K_{S_{sy}}(\tau) = \int_0^T\!\!\int_0^T K_{S_{sx}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\; h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$K_{S_{iy}}(\tau) = \int_0^T\!\!\int_0^T K_{S_{ix}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\; h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

а ковариационные функции границ спектральной плотности мощности

$$R_{S_{sy}}(\tau) = \int_0^T\int_0^T R_{S_{sx}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$R_{S_{iy}}(\tau) = \int_0^T\int_0^T R_{S_{ix}}(\tau - (\tau_2 - \tau_1))\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2.$$

Доказательство теоремы основано на соотношениях (13.14) и (13.15).

Следствие. Из двух последних соотношений следует, что дисперсии границ спектральной плотности мощности отклика

$$D_{S_{sy}} = \int_0^T\int_0^T R_{S_{sx}}(\tau_2 - \tau_1)\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

$$D_{S_{iy}} = \int_0^T\int_0^T R_{S_{ix}}(\tau_2 - \tau_1)\, h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2.$$

Пример 2. Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему. При поступлении на вход фильтра гиперслучайного белого при всех условиях шума, описываемого условными спектральными мощностями $S_{n/g} = N_g/2$, где N_g — константа, определяемая условиями g, границы математического ожидания отклика $m_{sy} = m_{iy} = m_{sx} = m_{ix} = 0$, границы спектральной плотности мощности процесса на выходе $S_{sy}(f) = |K(f)|^2 N_s/2$, $S_{iy}(f) = |K(f)|^2 N_i/2$, а корреляционные и ковариационные функции границ спектральной плотности мощности

$$K_{S_{sy}}(\tau) = R_{S_{sy}}(\tau) = \frac{N_s}{2}\int_0^T h(\tau - \tau_2)\, h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2,$$

$$K_{S_{iy}}(\tau) = R_{S_{iy}}(\tau) = \frac{N_i}{2}\int_0^T h(\tau - \tau_2)\, h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2,$$

где N_s и N_i — соответственно верхняя и нижняя границы константы N_g.

* * *

Анализ известных способов представления гиперслучайных величин и процессов (с помощью условных функций распределения (условных плотностей распределения) и их моментов, границ функции распределения и их моментов и границ моментов распределения) показывает:

- все способы представления гиперслучайных величин могут быть эффективно использованы для описания преобразований скалярных гиперслучайных величин;
- для описания преобразований векторных гиперслучайных величин удобными оказываются способы представления величин с помощью условных функций распределения и условных моментов, а также с помощью границ моментов;
- возможности использования границ функции распределения и моментов границ для описания преобразования векторных гиперслучайных величин ограничены, что вызвано значительными вычислительными трудностями расчета характеристик и параметров границ преобразованной векторной гиперслучайной величины по данным исходной векторной гиперслучайной величины;
- для описания безынерционных преобразований гиперслучайных процессов можно использовать соотношения, описывающие преобразования векторных гиперслучайных величин;
- при инерционных преобразованиях основными способами представления гиперслучайных процессов являются условные моменты распределения (в первую очередь условные математические ожидания и условные ковариационные функции), границы этих моментов, а также границы спектральной плотности мощности.

* * *

Разработанный математический аппарат гиперслучайных явлений может быть использован для описания различных реальных физических явлений с учетом присущей им статистической неустойчивости.

Для корректного применения этого математического аппарата на практике необходима формализация перехода от физических моделей к соответствующим гиперслучайным математическим моделям. К рассмотрению этого вопроса мы и приступим.

ЧАСТЬ III

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Глава 14

ФИЗИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Сформулированы основные физические гипотезы теории гиперслучайных явлений, обеспечивающие корректное ее использование на практике: гипотеза ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений и гипотеза адекватного описания физических явлений гиперслучайными моделями. Рассмотрена концепция гиперслучайного устройства мира. Сопоставлены гиперслучайные и случайные модели. Очерчены области их практического применения.

14.1. ГИПОТЕЗЫ ГИПЕРСЛУЧАЙНОСТИ

Результаты экспериментальных исследований феномена статистической устойчивости реальных физических явлений, описанные в главе 4, и материалы множества других исследований свидетельствуют об отсутствии абсолютной статистической устойчивости. Наблюдается лишь ограниченная статистическая устойчивость.

Можно предположить, что нарушение статистической устойчивости — эффект, присущий всем реальным физическим явлениям.

Таким образом, выдвигается *физическая гипотеза ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений*.

Эта гипотеза может быть формализована различными способами, один из которых — с помощью гиперслучайных математических моделей.

Корректное использование гиперслучайных моделей на практике требует принятия *гиперслучайной аксиомы адекватности — физической гипотезы, предполагающей возможность адекватного описания физических явлений гиперслучайными моделями*.

Гипотезы гиперслучайности — гипотеза ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений и гиперслучайная аксиома адекватности — являются базовыми гипотезами теории гиперслучайных явлений, обеспечивающими корректное ее применение на практике.

Принимая гиперслучайную аксиому адекватности, мы не только признаем гипотезу ограниченной статистической устойчивости реальных физических явлений, но также допускаем возможность *существования в реальном мире статистически непрогнозируемых* (*непредсказуемых*) *явлений*.

Это допущение не такое абсурдное, как может показаться на первый взгляд. Существование статистически непрогнозируемых явлений можно объяснить тем, что реальный мир — не *замкнутая*, а *открытая система*.

В открытой системе информация о любом физическом явлении, полученная даже на бесконечном интервале наблюдения, не может гарантировать абсолютно точный прогноз будущего, так как в такой системе не исключена возможность появления новых не действовавших ранее факторов, которые могут в корне изменить ситуацию.

Основными методами прогнозирования являются статистические методы, экспертные оценки и моделирование.

Во всех случаях прогнозирование базируется на допущении, что условия получения данных, используемых для прогноза, пренебрежимо мало отличаются от условий, для которых осуществляется прогноз [1]. Аварии, катастрофы и катаклизмы, как правило, связаны с существенным непрогнозируемым изменением условий.

Делая тот или иной статистический прогноз, мы принимаем (хотя и не всегда осознанно) гипотезу статистической устойчивости рассматриваемых физических явлений.

Подавляющее число теорий естествознания разрабатывались для закрытых систем в предположении, что условия (не только статистические) фиксированы. К числу таких теорий относится и классическая теория вероятностей, в которой гипотеза статистической устойчивости играет первостепенную роль.

Теория гиперслучайных явлений ориентирована на описание открытых систем. Она исходит из того, что реальные условия могут изменяться. Этим теория гиперслучайных явлений корен-

---

[1] Или, если и изменяются, то предсказуемо.

ным образом отличается от многих других известных теорий, в том числе и от классической теории вероятностей.

Необходимость учета нарушения стабильности реальных условий осознавалась давно. Это нашло отражение в ряде теорий, сформировавшихся за последние полвека, таких как теория нечетких множеств [Заде, 1976, Zadeh L.A., Kacprzyk, 1992, Дюбуа, Прад, 1990, Кофман, 1982, Орловский, 1981, Бочарников, 2001 и др.], теория интервального анализа [Канторович, 1962, Шокин, 1981, Шарый, 2010, Алефельд, Херцбергер, 1987, Moore, 1966, Sunaga, 1958, Neumaier, 1990], теории неопределенности, субъективных и интервальных вероятностей, интервальной статистики [Иваненко, Лабковский, 1990, Kyburg, 1998 — 2000, Walley, 1991, Кунцевич, 2006, Орлов, 2002, 2006, Вощинин, Сотиров, 1989, Kreinovich, 2005, Кузнецов, 1991 и др.], теория динамического хаоса [Crownover, 1995, Sharkovsky и др., 1995, Пригожин, Стенгерс, 2009, Гринченко и др., 2005], будстреп-анализа [Эфрон, 1988] и пр.

Среди множества этих теорий хотелось бы выделить теорию интервального анализа и связанные с ней теории.

Интервальная математика начала интенсивно развиваться с середины прошлого столетия. Объектом ее изучения являются интервалы.

В настоящее время интервальные подходы применяются не только для построения детерминированных, но и вероятностных математических моделей [Орлов, 2004, Шарый, 2010, Kyburg, 1998 — 2000, Walley, 1991, Kreinovich и др., 2005]. Эти подходы близки по духу, хотя и не идентичны, к подходам, разрабатываемым в теории гиперслучайных явлений.

Теория гиперслучайных явлений предполагает, что статистические условия могут изменяться в рамках заранее оговоренного множества условий, которое может быть конечным, счетным или несчетным.

Одним из частных случаев несчетного множества является множество, представляющее интервал. Поэтому теорию гиперслучайных явлений можно рассматривать не только как обобщение теории вероятностей, но также как обобщение ряда других теорий, использующих интервально-вероятностные модели.

Представление о связи моделей различного типа друг с другом дает рис. 14.1.

Этот рисунок отражает тот факт, что вырожденным случаем гиперслучайных моделей являются случайные модели, вырож-

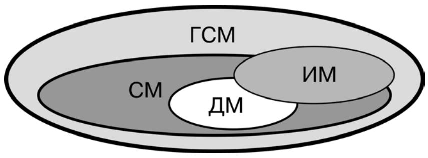


Рис. 14.1. Связь моделей друг с другом: гиперслучайных (ГСМ), случайных (СМ), детерминированных (ДМ) и интервальных (ИМ)

денным случаем случайных моделей — детерминированные модели, а интервальные модели могут присутствовать в любом из перечисленных классов моделей.

14.2. КОНЦЕПЦИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО УСТРОЙСТВА МИРА

Современная теория вероятностей базируется на концепции устройства мира на случайных принципах. Об этом шла речь в параграфе 2.1.

Теория гиперслучайных явлений исходит из другой концепции — *концепции гиперслучайного устройства мира*, предполагающей, что гиперслучайные гипотезы, рассмотренные в параграфе 14.1, справедливы для широкого круга физических явлений.

Исключение могут составлять некоторые фундаментальные физические константы, такие как скорость света в вакууме, гравитационная постоянная и др.[1, 2]

Принятие концепции гиперслучайного устройства мира означает признание того, что в основе мироздания лежат статистически непрогнозируемые явления, проявляющиеся во всех реальных событиях, величинах, процессах и полях.

Отсюда следует, что возможности познания мира статистическим путем ограничены. Иначе говоря, в мире существуют области знаний, проникнуть в которые путем обработки накопленных данных нельзя.

[1] В современной физике значения некоторых (в том числе перечисленных) фундаментальных физических постоянных считаются по определению абсолютно точными, а значения других физических постоянных принимаются с определенной погрешностью (неопределенностью) [Фундаментальные физические константы].

[2] Если рассматривать детерминированные величины как вырожденный случай гиперслучайных величин, вопрос об исключительном статусе каких-либо констант вообще не стоит.

Не будем далее углубляться в философию, отметим лишь, что идея, предполагающая наличие в мире непредсказуемых явлений, выдвигалась и обсуждалась многими философами. Но, насколько известно автору, она не была разработана до уровня формализованных физических и математических моделей, позволяющих делать строгие логические выводы. Новизна и специфика теории гиперслучайных явлений состоит главным образом в том, что она формализует эту идею на физическом уровне и предлагает математический аппарат для решения практических задач.

14.3. СЛУЧАЙНЫЕ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ МОДЕЛИ

Естественно возникает вопрос: чем гиперслучайные модели лучше случайных? Что они могут дать при решении практических задач?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим конкретный пример прецизионного измерения диаметра цилиндрической детали круглого сечения. Эта совершенно тривиальная на первый взгляд задача таит в себе немало подводных камней.

Заметим, что изготовить деталь абсолютно круглого сечения невозможно. Ее сечение всегда отличается от идеального круга: во-первых, из-за эллипсоидального или иного отклонения от идеальной круговой формы, а во-вторых, из-за неровности поверхности. Следует также иметь в виду, что разные сечения по оси цилиндра отличаются между собой. Физическая модель измеряемой величины должна учитывать и отклонение от идеальной круговой формы сечения детали, и шероховатость поверхности, и различие сечений вдоль ее оси.

Для математического описания физической модели можно использовать как общепринятую случайную, так и гиперслучайную модели.

Случайная модель базируется на предположении, что вероятностные характеристики размера детали не имеют разброса. Конечно, в пределах небольших локальных областей они могут быть приблизительно одинаковыми, однако в целом существенно зависят от рассматриваемого сечения и направления, вдоль которого проводится измерение. Поэтому гиперслучайная модель измеряемой величины, учитывающая вариабельность функций распределения, более адекватно, чем случайная модель, описывает все нюансы, связанные с объективно существующей статистической неустойчивостью.

Любые измерения проводятся в условиях воздействия различных мешающих факторов (помех). В рассматриваемой задаче в таком качестве выступает загрязнение поверхности детали. Пыль и грязь на поверхности собираются неравномерно. В пределах небольших локальных областей толщину загрязненного слоя приближенно можно описать случайной величиной. Но для разных областей законы распределения разные. Предвидеть, какой закон распределения имеет место в каждой области, невозможно. Поэтому более адекватное описание толщины загрязненного слоя дает гиперслучайная величина.

Идеальных, абсолютно точных, средств измерения в мире не существует. Ни штангенциркуль, ни микрометр, ни какой-либо другой измерительный инструмент не в состоянии обеспечить измерения с бесконечно высокой точностью. В каждом конкретном случае действуют разные источники погрешности. Для микрометра, например, таковыми оказываются конечные размеры поверхностей, соприкасающиеся с деталью, люфт микрометрических винтов, перекосы и др. Объединяющим свойством факторов, ограничивающих точность инструментальных средств, является их статистическая неустойчивость. Поэтому при построении модели средства измерения также имеет смысл воспользоваться гиперслучайной моделью.

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что гиперслучайные модели позволяют учесть все особенности, описываемые случайными моделями, и в тоже время учесть некоторые особенности, игнорируемые ими. В первую очередь, это вариабельность статистических характеристик объектов измерения и вариабельность статистических характеристик условий измерения.

Возможность учета нарушений статистической устойчивости характеристик является существенным преимуществом гиперслучайных моделей по сравнению с классическими случайными моделями.

Конечно, когда нарушения статистической устойчивости проявляются слабо (а это обычно имеет место при небольшом объеме выборки), использовать гиперслучайные модели не имеет смысла. Здесь прекрасно работают классические вероятностные модели. Однако, когда нарушения статистической устойчивости значительны, применение гиперслучайных моделей оказывается оправданным.

Особую роль в познании мира играет измерение. Поэтому чрезвычайно важным вопросом является представление реальных явлений и оценок адекватными моделями, предназначенными для использования при проведении физических измерений.

Результат измерения представляет собой оценку смеси реального значения измеряемой величины, процесса или поля и помех, мешающих проведению наблюдений.

Принимаемая в рамках теории гиперслучайных явлений гипотеза адекватного описания физических явлений гиперслучайными моделями применима к различным реальным явлениям, в том числе величинам, процессам и полям, подлежащим измерению, действующим помехам, а также погрешностям измерения.

Если помеха носит гиперслучайный характер, то даже в том случае, когда измеряемая величина является мировой константой, результат измерения оказывается величиной гиперслучайного типа.

Гиперслучайный характер оценки проявляется в первую очередь в непредсказуемом дрейфе смещения, которое в силу непрогнозируемого характера изменений скомпенсировать невозможно.

Этим можно объяснить, почему все реальные оценки величин, процессов и полей имеют ограниченную точность.

Границы точности определяются не только количеством используемых результатов одиночных измерений и их случайным разбросом, но и, главное, изменчивым характером вероятностных характеристик объекта измерения и помех.

Это важное обстоятельство, о котором не следует забывать. Прежде чем переходить к детальному его исследованию, остановимся на базовых понятиях статистики гиперслучайных явлений, законе больших чисел и центральной предельной теореме, обеспечивающих связь физической и математической частей теории гиперслучайных явлений.

Глава 15

ОСНОВЫ СТАТИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Формализовано понятие гиперслучайной выборки и определены ее свойства. Описана методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины. Исследована сходимость гиперслучайных оценок к соответствующим точным характеристикам.

15.1. ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ВЫБОРКА

Гиперслучайную величину X в общем случае можно представить множеством случайных величин X/g, наблюдаемых в условиях $g \in G$: $X = \{X/g \in G\}$. В частном случае, когда X/g представляет собой детерминированную величину, однозначно связанную с условием $g \in G$, гиперслучайная величина $X = \{X/g \in G\}$ вырождается во множество детерминированных величин.

Генеральной совокупностью гиперслучайной величины $X = \{X/g \in G\}$ будем называть бесконечное множество всех ее реализаций (членов или элементов), наблюдаемых во всех условиях $g \in G$. Это множество может быть как счетным, так и несчетным.

Генеральную совокупность можно описать с помощью функции распределения $F_x(x)$ гиперслучайной величины X, множества условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ ($g \in G$), верхней и нижней границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моментов границ, границ моментов и других характеристик.

Конечное множество членов генеральной совокупности

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_N) = \left\{\vec{x} / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$$

гиперслучайной величины X, полученное при конечном числе N опытов в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$, где $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$ — вектор условий, $\vec{G} = (\underbrace{G, \ldots, G}_{N \text{ раз}})$, будем называть *выборкой из генеральной совокупности*, а ее элементы $x_1, ..., x_N$ — *выборочными значениями* или *реализациями*. Каждая компонента x_n / g_n $(n = \overline{1, N})$ вектора $\vec{x} / \vec{g}$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ представляет собой детерминированную величину, а каждая реализация x_n вектора $\vec{X}$ без конкретизации условий — множество детерминированных величин.

В частном случае рассматриваемая выборка может формироваться в неизменных условиях $g \in G$. При этом $\vec{x} = \{\vec{x} / g \in G\}$.

Будем полагать, что выборка $x_1, ..., x_N$ принадлежит гиперслучайной величине $X = \{X / g \in G\}$ с условными функциями распределения $F_{x/g}(x)$ ($g \in G$), если она получена из генеральной совокупности, описываемой при фиксированных условиях g функцией распределения $F_{x/g}(x)$.

Бесконечное множество выборок $\vec{x} = (x_1, ..., x_N) = \left\{\vec{x} / \vec{g} \in \vec{G}\right\}$ объемом N, сформированных из одной генеральной совокупности, представляет собой N-мерный гиперслучайный вектор:

$$\vec{X} = (X_1, ..., X_N) = \left\{\vec{X} / \vec{g} \in \vec{G}\right\},$$

называемый в дальнейшем *гиперслучайной выборкой* или *выборочной совокупностью*.

При этом считается, что все элементы гиперслучайного вектора описываются одной и той же функцией распределения $F_x(x)$. Компоненты X_n / g_n $(n = \overline{1, N})$ этого вектора в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ представляют собой случайные величины, описываемые законами распределения $F_{x/g_n}(x)$ случайных составляющих генеральной совокупности. Функции распределения $F_{x/g_n}(x)$ зависят от номера элемента выборки опосредственно (через условия g_n).

Такая выборка — *однородная*. Другой тип выборки — *неоднородная*. Неоднородная выборка формируется из разных генеральных совокупностей. Каждый ее элемент описывается своей гиперслучайной величиной. Поэтому закон распределения $F_{x_n / g_n}(x)$ случайной компоненты X_n / g_n неоднородной выборки прямо зависит от номера элемента выборки n.

Компоненты X_n гиперслучайной выборки $\vec{X}$ будем полагать взаимно независимыми при всех условиях, если не оговорено противное. При взаимной независимости компонент условная функция распределения $F_{\vec{x} / \vec{g}}(\vec{x})$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ допускает представление в виде

$$F_{\vec{x} / \vec{g}}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_{x_n / g_n}(x_n) .$$

Статистикой будем называть произвольную функцию $Y = Y(\vec{X})$ выборки $\vec{X}$, *вариационным* (*статистическим*) *рядом* в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ — реализации выборки $\vec{x} / \vec{g}$, упорядоченные по возрастанию или убыванию, а *ранжированным рядом* в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ — реализации выборки $\vec{x} / \vec{g}$, упорядоченные по убыванию.

По генеральной совокупности гиперслучайной величины можно вычислить различные ее характеристики, например, условные функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, условные математические ожидания $m_{x/g}$, математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, границы математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, условные дисперсии $D_{x/g}$, дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, границы дисперсии D_{sx}, D_{ix} и пр. По реализациям с использованием определенных статистик можно вычислить оценки этих же характеристик, в частности, оценки условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценки границ функции распределения $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, оценки условных математических ожиданий $m^*_{x/g}$, оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки границ математического ожидания m^*_{sx}, m^*_{ix}, оценки условных дисперсий $D^*_{x/g}$, оценки дисперсии границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, оценки границ дисперсии D^*_{sx}, D^*_{ix} и др.

Заметим, что описанные выше статистические понятия естественно обобщаются на гиперслучайные события и функции подобно тому, как в классической теории вероятностей статистические понятия случайных величин обобщаются на случайные события и функции.

15.2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ И ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЫБОРОК

В статистике случайных явлений рассматриваются не одиночные случайные события и величины, а последовательности событий и величин (рис. 15.1, *а* — *г*). Они могут быть как однородными (имеющими одинаковые законы распределения: рис. 15.1, *а*, *в*), так и неоднородными (имеющими разные законы распределения: рис. 15.1, *б*, *г*).

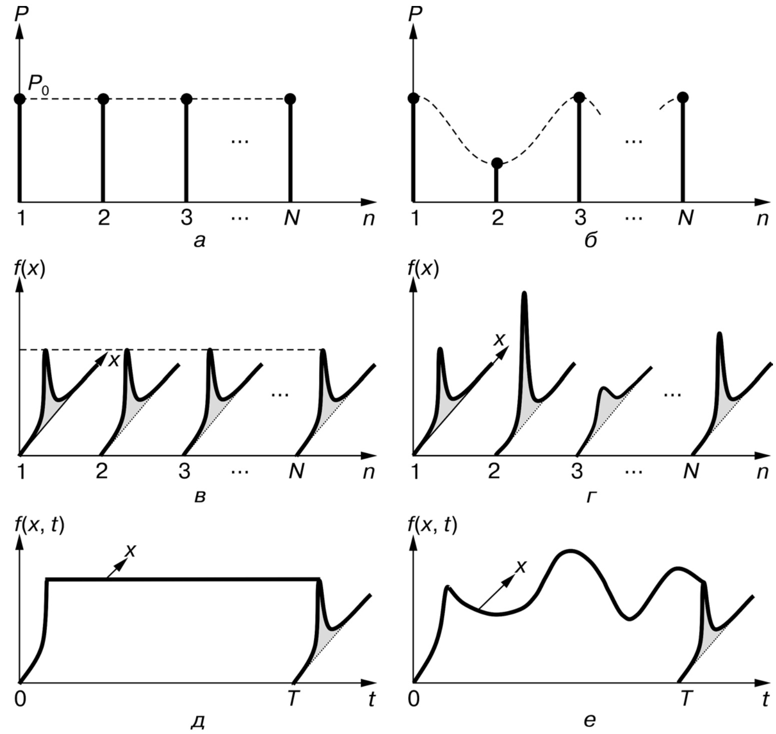


Рис. 15.1. Последовательности случайных событий (однородных (*а*) и неоднородных (*б*)), последовательности случайных величин (однородных (*в*) и неоднородных (*г*)) и случайные процессы (стационарный (*д*) и нестационарный (*е*))

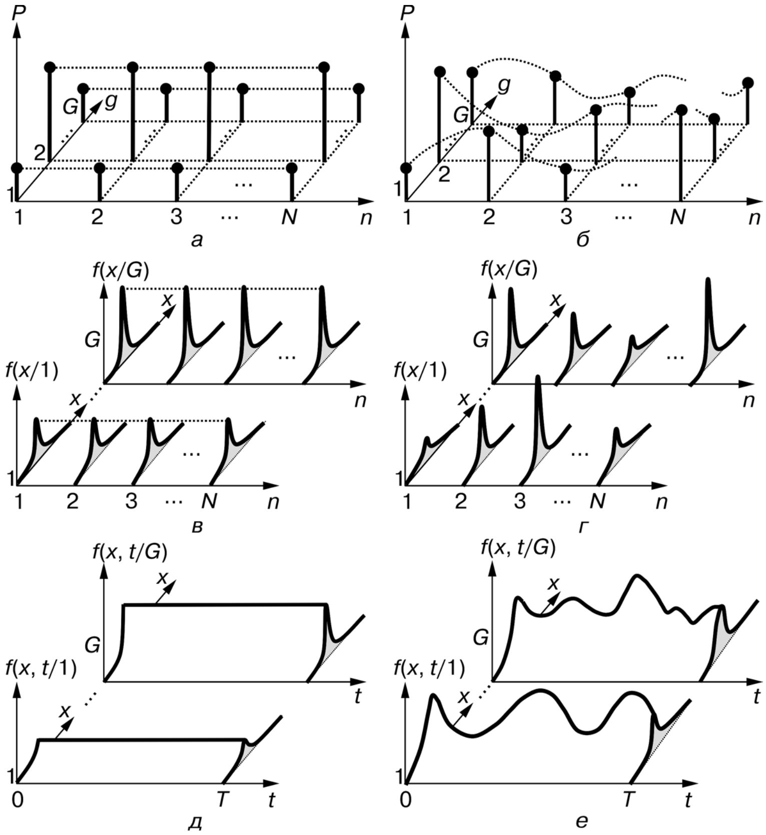


Рис. 15.2. Последовательности гиперслучайных событий (однородных (*а*) и неоднородных (*б*)), последовательности гиперслучайных величин (однородных (*в*) и неоднородных (*г*)) и гиперслучайные процессы (стационарный (*д*) и нестационарный (*е*))

Случайные функции одной переменных (процессы) могут быть стационарными (рис. 15.1, *д*) и нестационарными (рис. 15.1, *е*), а случайные функции нескольких переменных (поля) — могут быть однородными и неоднородными.

Последовательность случайных событий или величин можно интерпретировать как случайный процесс $X(t)$, у которого область определения T — дискретное множество точек $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Для последовательности случайных событий пространство состояний дискретно (принимает два значения, соответствующих наступлению или не наступлению события), а для последовательности случайных величин оно может быть как непрерывным, так и дискретным.

В статистике гиперслучайных явлений рассматриваются последовательности гиперслучайных событий и величин (рис. 15.2, *а—г*). Они могут быть как однородными (имеющими одинаковые законы распределения при фиксированных статистических условиях: рис. 15.2, *а*, *в*), так и неоднородными (имеющими разные законы распределения при фиксированных условиях: рис. 15.2, *б*, *г*).

Гиперслучайные процессы могут быть стационарными (описываться одним законом распределения при фиксированных статистических условиях: рис. 15.2, *д*) и нестационарными (описываться изменяющимся во времени законом распределения при фиксированных условиях: рис. 15.2, *е*). Также и гиперслучайные поля могут быть однородными и неоднородными.

15.3. ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моменты $m_{x/g}$, m_{Sx}, m_{Ix}, m_{sx}, m_{ix}, $D_{x/g}$, D_{Sx}, D_{Ix}, D_{sx}, D_{ix} и пр. являются детерминированными характеристиками. Соответствующие же оценки $F^*_{x/g}(x)$, $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, $m^*_{x/g}$, m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, m^*_{sx}, m^*_{ix}, $D^*_{x/g}$, D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, D^*_{sx}, D^*_{ix} и пр. являются детерминированными, если получены по конкретной реализации гиперслучайной выборки $\vec{X}$, и гиперслучайными, если рассчитаны по генеральной совокупности гиперслучайной величины X.

Процедура формирования указанных оценок может строиться по следующей схеме. Для всего множества G условий g формируются выборки

$$\vec{x} = \{x_1, ..., x_N / g \in G\}.$$

По выборкам для каждого условия g в отдельности рассчитываются оценки условных характеристик и параметров: оценка условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценка условного математического ожидания $m^*_{x/g}$, оценка условной дисперсии

$D^*_{x/g}$ и др. По оценкам условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$ $\forall g \in G$ вычисляются оценки границ функции распределения:

$$F^*_{Sx}(x) = \sup_{g \in G} F^*_{x/g}(x), \qquad F^*_{Ix}(x) = \inf_{g \in G} F^*_{x/g}(x)$$

и оценки характеристик, характеризующие эти границы: математические ожидания границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки дисперсий границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix} и пр. По оценкам условных величин определяются оценки границ соответствующих величин, например, по оценкам математических ожиданий $m^*_{x/g}$ — оценки границ математического ожидания $m^*_{sx} = \sup_{g \in G} m^*_{x/g}$, $m^*_{ix} = \inf_{g \in G} m^*_{x/g}$, по оценкам условных дисперсий $D^*_{x/g}$ — оценки границ дисперсии $D^*_{sx} = \sup_{g \in G} D^*_{x/g}$, $D^*_{ix} = \inf_{g \in G} D^*_{x/g}$ и т.д.

Определенные трудности можно ожидать при формировании требуемой выборки $\vec{x} = \{x_1, ..., x_N / g \in G\}$ из-за сложности обеспечения, контроля и поддержания условий $g \in G$. Однако вопрос облегчается тем, что для расчета ряда искомых характеристик не требуются знания того, в каких именно условиях получены условные характеристики. Главное, чтобы на уровне условных характеристик были представлены все возможные условия g множества G и в массив данных, используемый для расчета условных характеристик, не попадали данные, соответствующие другим условиям.

Обычно последнее требование можно обеспечить ограничением объема данных N, поскольку условия, хотя и меняются зачастую непрерывно, но изменяются достаточно медленно, и поэтому на основе некоторой априорной информации оказывается возможным указать максимальное число последовательных элементов $N_{\max}$, для которых условия можно считать практически неизменными (рис. 15.3).

Это позволяет собирать данные на достаточно большом интервале наблюдения, не заботясь о том, каковы в конкретный момент времени условия и в какой последовательности они чередуются. Далее полученные данные можно разделять на фраг-

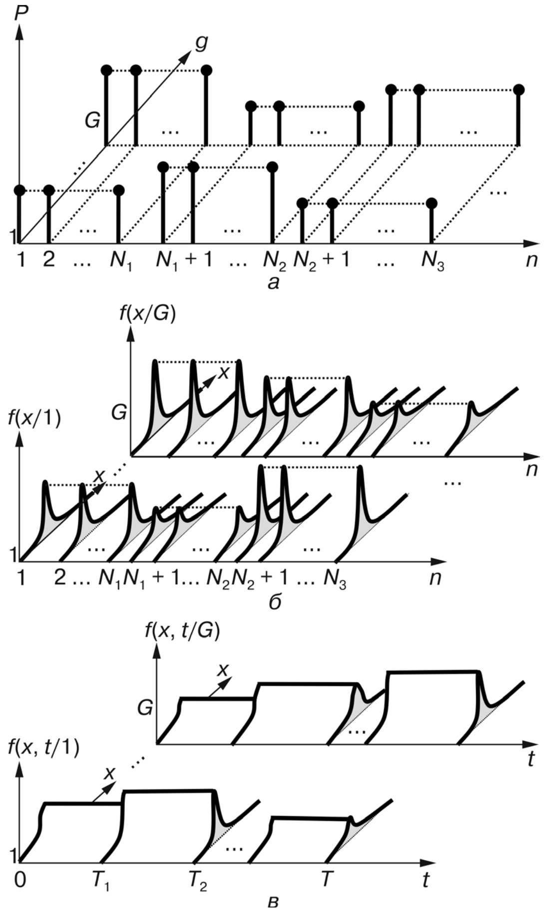


Рис. 15.3. Модели последовательности гиперслучайных событий (*а*), последовательности гиперслучайных величин (*б*) и гиперслучайного процесса (*в*) при медленном изменении условий

менты по $N_{\max}$ последовательных элементов (или на фрагменты, заключенные в непересекающихся интервалах определенной длительности) и использовать для расчета искомых оценок. Главное при таком подходе — обеспечить охват всех возможных условий наблюдения.

15.4. СХОДИМОСТЬ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК

Важным свойством ряда гиперслучайных оценок является то, что при увеличении объема выборки они сходятся к соответствующим величинам и характеристикам.

Поскольку гиперслучайное явление представляет собой множество случайных явлений, то сходимость гиперслучайных оценок имеет место при сходимости соответствующих случайных составляющих оценок.

Рассмотрим, например, гиперслучайную величину X. Пусть $X_1,...,X_N$ — выборка гиперслучайной величины X объемом N, Θ^*/g — сформированная по выборке в условиях g случайная оценка, обладающая свойством сходимости по вероятности к параметру θ/g.

Тогда гиперслучайная оценка $\Theta^*=\{\Theta^*/g\in G\}$ сходится по вероятности к множеству величин $\theta=\{\theta/g\in G\}$, а границы оценки $\Theta_s^*=\sup\limits_{g\in G}\Theta^*/g$, $\Theta_i^*=\inf\limits_{g\in G}\Theta^*/g$ — к соответствующим границам $\theta_s=\sup\limits_{g\in G}\theta/g$, $\theta_i=\inf\limits_{g\in G}\theta/g$. В частности, оценки границ математического ожидания m_{sx}^*, m_{ix}^* сходятся к границам математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, а оценки границ дисперсии D_{sx}^*, D_{ix}^* — к границам дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Для случайной величины сходимость оценки функции распределения к самой функции распределения определяется основной теоремой математической статистики (*теоремой Гливенко*).

Теорема Гливенко. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, а $F^*(x)$ — эмпирическая функция распределения результатов N наблюдений этой величины. Тогда при $N\to\infty$ функция $F^*(x)$ сходится к $F(x)$ почти наверное (с вероятностью единица):

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F^*(x)-F(x)\right|\to 0\right\}=1.$$

Отметим, что поскольку сходимость с вероятностью единица более сильная, чем сходимость по вероятности, то $F^*(x)$ сходится к $F(x)$ и по вероятности.

Из теоремы Гливенко следует, что при $N\to\infty$ оценки эмпирических условных функций распределения $F_{x/g}^*(x)$ $\forall g\in G$ гиперслучайной величины X сходятся к условным функциям распределения $F_{x/g}(x)$. Поэтому оценки границ гиперслучайной функции распределения $F_S^*(x)$, $F_I^*(x)$ сходятся к границам функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$, оценки моментов границ — к моментам границ, а оценки границ моментов — к границам моментов.

В частности, оценки математического ожидания границ m_{Sx}^*, m_{Ix}^* сходятся к математическому ожиданию границ m_{Sx}, m_{Ix}, оценки дисперсии границ D_{Sx}^*, D_{Ix}^* — к дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix} и т.д.

Способ оценки характеристик и параметров распределения гиперслучайной величины, описанный в текущем и предыдущем параграфах, достаточно прост и прозрачен. Однако остается невыясненным ряд вопросов, в частности, каковы свойства гиперслучайных оценок, каким образом их вычислять при быстрой смене статистических условий и др.

Теоретической основой ответов на эти вопросы служат закон больших чисел и центральная предельная теорема для гиперслучайных величин, рассматриваемые в двух последующих главах.

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сформулирован закон больших чисел для гиперслучайных величин, определяющий условия сходимости границ выборочного среднего гиперслучайной величины. Доказана теорема для гиперслучайных событий, аналогичная теореме Бернулли для случайных событий.

16.1. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ВЕЛИЧИН

Основой статистики служит *закон больших чисел для случайных явлений*, первоначальная версия которого была опубликована в посмертной работе Я. Бернулли в 1713 г. [Бернулли, 1986]. Этот закон был доказан Я. Бернулли для *последовательности случайных событий* в виде теоремы, современная интерпретация которой следующая.

Теорема 1 (*Бернулли*). Пусть вероятность появления события в серии опытов постоянна и равна p_0 (см. рис. 15.1, *а*). Тогда при неограниченном увеличении числа опытов N частота N_0 / N появления события сходится по вероятности (практически достоверно) к вероятности p_0:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{N_0}{N} - p_0\right| > \varepsilon\right\} = 0 ,$$

где N_0 — число опытов, при котором произошло событие, ε — произвольное, как угодно малое положительное число.

За минувшие три столетия закон больших чисел детально изучался и обобщался. Выяснилось, что он справедлив и для более широкого комплекса условий, чем полагал Я. Бернулли, в частности — в модифицированном виде для неоднородной последовательности случайных событий, а также последовательности случайных величин и функций.

Известно много вариантов закона больших чисел для *последовательности случайных величин* [Гнеденко, 1988]. Напомним некоторые из них.

Теорема 2 (*Чебышева*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $m_1, m_2, \ldots, m_N$ и ограниченными дисперсиями. Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности среднее выборочных значений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к среднему математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Теорема 3 (*Хинчина*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием m. Тогда при устремлении объема выборки N к бесконечности среднее выборочных значений $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к математическому ожиданию m:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - m\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Для неоднородной последовательности необязательно независимых случайных величин закон больших чисел был доказан А.А. Марковым.

Теорема 4 (*Маркова*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность случайных величин таковых, что при устремлении объема выборки N к бесконечности

$$\frac{1}{N^2}\mathrm{D}\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] \to 0,$$

где $\mathrm{D}[\cdot]$ — оператор дисперсии. Тогда среднее элементов $X_1, X_2, \ldots, X_N$ стремится по вероятности к среднему их математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_n\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Необходимое и достаточное условия применимости закона больших чисел для последовательности как угодно зависимых случайных величин определяется следующей теоремой.

Теорема 5. Необходимым и достаточным условием сходимости по вероятности среднего случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$ к среднему их математических ожиданий $m_1, m_2, \ldots, m_N$ при устремлении объема выборки N к бесконечности является стремление к нулю величины

$$\mathrm{M}\left[\frac{\overset{\circ}{m}{}^{*2}_{\bar{x}}}{1+\overset{\circ}{m}{}^{*2}_{\bar{x}}}\right],$$

где $\overset{\circ}{m}{}^{*}_{\bar{x}}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n - m_n)$ — среднее центрированных величин последовательности.

А.Н. Колмогоровым был доказан так называемый *усиленный закон больших чисел*, под которым понимается сходимость с вероятностью единица.

Теорема 6 (*Колмогорова*). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{D}[X_n] < \infty ,$$

Тогда она подчиняется усиленному закону больших чисел.

Необходимое и достаточное условие справедливости усиленного закона больших чисел для однородной последовательности взаимно независимых случайных величин дает теорема, доказанная также А.Н. Колмогоровым.

Теорема 7 (*Колмогорова*). Необходимым и достаточным условием применимости усиленного закона больших чисел для однородной последовательности взаимно независимых случайных величин является существование математического ожидания.

Следует обратить внимание на чрезвычайно важное обстоятельство, о котором шла речь в параграфе 3.2: закон больших чисел для последовательности случайных величин *не гарантирует*, что выборочное среднее $m_x^* = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$ и среднее математических ожиданий $m_x = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}m_n$ имеют пределы. Этот закон утвер-

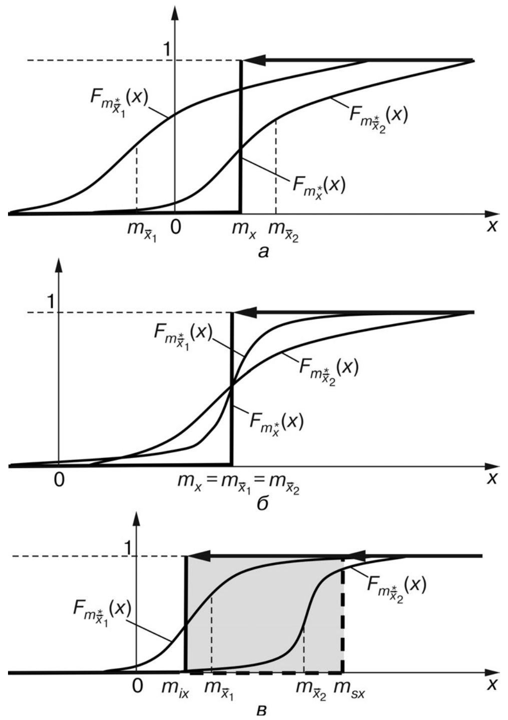


Рис. 16.1. Схемы формирования функции распределения $F_{m^*_x}(x)$ выборочного среднего случайной величины при $N \to \infty$, когда выборочное среднее m^*_x и среднее математических ожиданий m_x — фиксированные величины (*а* — при разных, *б* — при одинаковых математических ожиданиях элементов выборки), а также когда m^*_x и m_x — конечные интервалы (*в*)

ждает лишь сходимость выборочного среднего к среднему математических ожиданий, *не требуя при этом их сходимости к определенным фиксированным величинам.*

Возможны два случая:

1) когда имеет место сходимость выборочного среднего m^*_x и среднего математических ожиданий m_x к определенным фиксированным величинам (числам),

2) когда такой сходимости нет.

Рассмотрим оба случая. Прежде всего отметим, что при конечном объеме выборки величина m^*_x — случайная. Ее можно описать функцией распределения $F_{m^*_x}(x)$.

В первом случае предел среднего математических ожиданий m_x может быть описан функцией распределения в виде функции единичного скачка в точке m_x. К ней стремится функция распределения $F_{m^*_x}(x)$ выборочного среднего m^*_x при $N \to \infty$ (рис. 16.1, *а*, *б*).

Математические ожидания выборочного среднего, соответствующие разным выборкам, могут различаться (рис. 16.1, *а*), а могут и совпадать (рис. 16.1, *б*). Совпадение математических ожиданий выборочного среднего имеет место в том случае, когда выборка однородна или когда она хотя и неоднородна, но математические ожидания ее элементов одинаковы. На рисунке кривыми $F_{m^*_{\tilde{x}_1}}(x)$, $F_{m^*_{\tilde{x}_2}}(x)$ изображены функции распределения среднего для двух выборок разных объемов, а точками $m_{\tilde{x}_1}$, $m_{\tilde{x}_2}$ на оси x — соответствующие математические ожидания.

Во втором случае при $N \to \infty$ выборочное среднее m^*_x и среднее математических ожиданий m_x могут либо стремиться к плюс или минус бесконечности, либо флуктуировать в определенных интервалах.

Вариант, когда при $N \to \infty$ величины m^*_x и m_x — *интервалы*, представляют особый интерес. Рассматриваемые интервалы могут быть конечными или бесконечными. Если интервалы конечны, то существуют границы m^*_{ix}, m^*_{sx} выборочного среднего m^*_x и границы m_{ix}, m_{sx} среднего математических ожиданий m_x. Эти границы можно описать функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках m^*_{ix}, m^*_{sx}, m_{ix}, m_{sx}.

На основании закона больших чисел m^*_{ix} стремится к m_{ix}, а m^*_{sx} — к m_{sx} (рис. 16.1, *в*). Интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$ — область, в которой флуктуирует выборочное среднее при $N \to \infty$.

Таким образом, выборочное среднее случайных величин может сходиться к определенному числу, стремиться к плюс или минус бесконечности или флуктуировать в определенном интервале. В последнем случае можно говорить о *сходимости выборочного среднего к интервалу.*

16.2. ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ГРАНИЦ СРЕДНЕГО ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

Рассмотрим модификации *закона больших чисел для последовательностей гиперслучайных величин.*

Теорема 8 (аналогичная теореме 2). Пусть гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ представляет собой совокупность случайных величин X / g для различных статистических условий $g \in G$ с условными математическими ожиданиями $m_{x/g}$ и ограниченными условными дисперсиями $D_{x/g}$. Нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X равны соответственно m_{ix}, m_{sx}. Из генеральной совокупности гиперслучайной величины X, полученной в неконтролируемо изменяющихся статистических условиях, формируется гиперслучайная выборка $\{X_1, \ldots, X_N\}$ объемом N с взаимно независимыми для всех условий элементами. По этой выборке рассчитывается гиперслучайное выборочное среднее:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n .$$

Тогда при устремлении объема выборки к бесконечности ($N \to \infty$) гиперслучайное выборочное среднее m_x^* сходится по вероятности к множеству $m_x = \{m_{x/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$, представляющему собой множество средних $m_{x/\vec{g}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_{x/g_n}$ условных математических ожиданий $m_{x/g_1}, \ldots, m_{x/g_N}$ случайных величин $X / g_1, \ldots, X / g_N$, соответствующих всевозможным условиям $g_n \in G,\ n = \overline{1, N}$, а нижняя и верхняя границы этого выборочного среднего сходятся по вероятности соответственно к нижней и верхней границам математического ожидания гиперслучайной величины X:

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{ \left| \inf_{\vec{g} \in \vec{G}} m_x^* - m_{ix} \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{ \left| \sup_{\vec{g} \in \vec{G}} m_x^* - m_{sx} \right| > \varepsilon \right\} = 0, \qquad (16.1)$$

где ε — как угодно малое положительное число.

Для доказательства теоремы рассмотрим случайную выборку $\{X / g_1, \ldots, X / g_N\}$, полученную при фиксированной последовательности условий $(g_1, \ldots, g_N) \in \vec{G}$. Рассчитанное по ней выборочное среднее $m_{x/\vec{g}}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X / g_n$ при устремлении объема выборки N к бесконечности согласно теореме Чебышева для случайных величин сходится по вероятности к среднему условных математических ожиданий $m_{x/\vec{g}}$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m^*_{x/\vec{g}} - m_{x/\vec{g}}\right| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Сходимость величины $m^*_{x/\vec{g}}$ к $m_{x/\vec{g}}$ для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ означает равномерную сходимость по вероятности относительно параметра $\vec{g}$ случайной величины $m^*_{x/\vec{g}}$ к величине $m_{x/\vec{g}}$. Это означает, что имеет место сходимость по вероятности гиперслучайного выборочного среднего $m^*_x = \{m^*_{x/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$ к множеству $m_x = \{m_{x/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$.

При любой фиксированной последовательности условий и $N \to \infty$ выборочное среднее $m^*_{x/\vec{g}}$ ограничено интервалом $[m^*_{ix}, m^*_{sx}]$, где $m^*_{ix} = \inf\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} m^*_{x/\vec{g}}$, $m^*_{sx} = \sup\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} m^*_{x/\vec{g}}$, а среднее условных математических ожиданий $m_{x/\vec{g}}$ — интервалом $[m_{ix},\ m_{sx}]$. При этом минимальному среднему значению m_{ix} среднего математического ожидания соответствует нижняя граница $\inf\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} m^*_x$ выборочного среднего, а максимальному среднему значению m_{sx} — верхняя граница $\sup\limits_{\vec{g}\in\vec{G}} m^*_x$ выборочного среднего, т. е. справедливо равенство (16.1).

Нетрудно убедиться, что рассмотренные в параграфе 16.1 модификации закона больших чисел для последовательности случайных величин допускают обобщения на случай последовательности гиперслучайных величин, в частности теорема 5, определяющие необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей по вероятности (усиленный закон больших чисел).

Эта теорема формулируется для неоднородной выборки гиперслучайных величин.

Теорема 9 (аналогичная теореме 5). Пусть $X_1,\ldots,X_N$ — гиперслучайная выборка, m^*_{ix}, m^*_{sx} — границы гиперслучайного выборочного среднего $m^*_x = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$, а m_{ix}, m_{sx} — границы гиперслучайной величины $m_x = \{m_{\vec{x}/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$, представляющей собой множество средних $m_{\vec{x}/\vec{g}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n/g_n}$ условных математических ожиданий $m_{x_1/g_1},\ldots,m_{x_N/g_N}$ случайных величин $X_1/g_1,\ldots,X_N/g_N$.

Тогда необходимым и достаточным условием сходимости по вероятности выборочного среднего m_x^* к множеству m_x средних условных математических ожиданий при устремлении объема выборки N к бесконечности и сходимости по вероятности границ m_{ix}^*, m_{sx}^* этого выборочного среднего соответственно к границам m_{ix}, m_{sx} является стремление к нулю для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ величин

$$\mathrm{M}\left[\frac{\overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{\vec{x}/\vec{g}}}{1+\overset{\circ}{m}{}^{*\,2}_{\vec{x}/\vec{g}}}\right], \tag{16.2}$$

где $\overset{\circ}{m}{}^*_{\vec{x}/\vec{g}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n/g_n - m_{x_n/g_n})$ — среднее центрированных условных случайных величин $X_1/g_1,\ldots,X_N/g_N$.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 8. Различие между доказательствами состоит лишь в том, что вместо использования утверждения теоремы Чебышева используется утверждение теоремы 5.

Обратим внимание, что пределы условных средних математических ожиданий $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ при фиксированных $\vec{g} \in \vec{G}$ могут существовать, а могут не существовать.

Если они существуют для всех $\vec{g} \in \vec{G}$, то гиперслучайное выборочное среднее m_x^* сходится к множеству детерминированных величин m_x. Отсутствие предела для какого-нибудь $\vec{g} \in \vec{G}$ означает, что соответствующее условное среднее математических ожиданий либо стремится к плюс или минус бесконечности, либо сходится к интервалу (см. параграф 16.1).

В случае существования пределов условных средних математических ожиданий $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ для всех $\vec{g} \in \vec{G}$ множество чисел m_x может быть описано множеством условных функций распределения в виде функций единичного скачка в точках $m_{\vec{x}/\vec{g}}$. Границы этого множества m_{ix}, m_{sx} описываются функциями распреде-

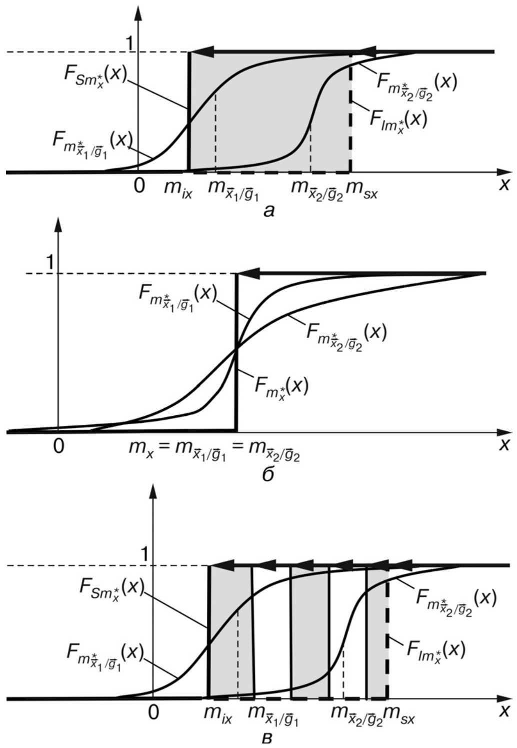


Рис. 16.2. Схема формирования границ функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ выборочного среднего гиперслучайной величины при $N \to \infty$, когда выборочное среднее m_x^* и среднее математических ожиданий m_x — множества чисел (*а* — при разных условных математических ожиданиях $m_{\vec{x}/\vec{g}}$, всюду плотно заполняющих интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$, *б* — при одинаковых $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$), а также когда m_x^* и m_x — конечные мультиинтервалы (*в*)

ления в виде функций единичного скачка в точках m_{ix}, m_{sx}, совпадающих с математическими ожиданиями границ m_{Sx}, m_{Ix} ($m_{ix} = m_{Sx}$, $m_{sx} = m_{Ix}$) (рис. 16.2, *а*).

На рисунке кривыми $F_{m^*_{\vec{x}_1/\vec{g}_1}}(x)$, $F_{m^*_{\vec{x}_2/\vec{g}_2}}(x)$ изображены функции распределения среднего для двух разных выборок конечного объема в условиях $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, а точками $m_{\vec{x}_1/\vec{g}_1}$, $m_{\vec{x}_2/\vec{g}_2}$ на оси x — соответствующие им математические ожидания.

Когда условные математические ожидания $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ всюду плотно заполняют интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$, гиперслучайное выборочное среднее приближается при $N \to \infty$ к *интервальной* величине $[m_{ix}, m_{sx}]$, показанной на рис. 16.2, *а* затемненной областью.

Интересен вырожденный случай, когда условные математические ожидания $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ одинаковы ($m_{\vec{x}/\vec{g}} = m_x$). При этом границы математического ожидания m_{ix}, m_{sx} совпадают ($m_{ix} = m_{sx} = m_x$) и при увеличении объема выборки к бесконечности выборочное среднее гиперслучайной величины стремится к *детерминированной* величине m_x (рис. 16.2, *б*).

В случае сходимости при $N \to \infty$ всех условных средних математического ожидания $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ к интервалам (рис. 16, *в*) гиперслучайная величина m_x представляет собой *мультиинтервал* (многосвязный интервал [Шарый, 2010]) — множество конечных интервалов, изображенных на рисунке затемненными областями.

Если отдельные интервалы мультиинтервала полностью перекрываются, то мультиинтервал m_x вырождается в интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$. Тогда выборочное среднее m_x^* при $N \to \infty$ флуктуирует в этом интервале, не выходя за его границы.

Таким образом, при $N \to \infty$ выборочное среднее гиперслучайной величины может сходиться к фиксированной величине, к множеству фиксированных величин (чисел), флуктуировать в непересекающихся интервалах условных границ, флуктуировать во всем интервале $[m_{ix}, m_{sx}]$ или стремиться к $+\infty$ или $-\infty$.

Факт различия типов величин, к которым стремятся выборочные средние случайных и гиперслучайных величин, играет существенную роль в приложениях. К этому вопросу мы вернемся позже.

16.3. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ОЦЕНОК ГРАНИЦ ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО

Теорема 10. Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — в общем случае неоднородная гиперслучайная выборка, m_{ix}, m_{sx} — границы гиперслучайной величины $m_x = \{m_{\vec{x}/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$, представляющей собой множество средних $m_{\vec{x}/\vec{g}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n/g_n}$ условных математических ожиданий $m_{x_1/g_1}, \ldots, m_{x_N/g_N}$ случайных величин $X_1/g_1, \ldots, X_N/g_N$, а величины, описываемые выражением (16.2), стремятся к нулю при всех $\vec{g} \in \vec{G}$.

Из генеральной совокупности в неконтролируемо меняющихся статистических условиях формируется L непересекающихся гиперслучайных выборок $(X_{11},...,X_{N1}),...,(X_{1L},...,X_{NL})$ объемом N каждая ($L \geq 2$). Пусть при $L \to \infty$ и $N \to \infty$ соответствующие этим выборкам гиперслучайные выборочные средние

$$m_{x_1}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_{n1},...,m_{x_L}^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_{nL}$$

всюду плотно заполняют интервал $[m_{ix},\ m_{sx}]$.

Тогда при неограниченном увеличении количества выборок и объема каждой выборки оценки границ выборочного среднего

$$m_{ix}^* = \inf_{l=\overline{1,L}} m_{x_l}^*, \qquad m_{sx}^* = \sup_{l=\overline{1,L}} m_{x_l}^* \tag{16.3}$$

сходятся по вероятности к соответствующим границам m_{ix}, m_{sx} математического ожидания гиперслучайной величины m_x:

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m_{ix}^* - m_{ix}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|m_{sx}^* - m_{sx}\right| > \varepsilon\right\} = 0 .$$[4]

Доказательство теоремы состоит в следующем. Согласно теореме 9, для любой l-й выборки при устремлении объема выборки к бесконечности границы гиперслучайного выборочного среднего $m_{x_l}^*$ стремятся по вероятности к границам математического ожидания m_{ix}, m_{sx} гиперслучайной величины m_x. Это означает, что область значений гиперслучайного выборочного среднего $m_{x_l}^*$ ограничена интервалом, стремящимся к интервалу $[m_{ix},\ m_{sx}]$.

Поскольку при $L \to \infty$ и $N \to \infty$ имеет место всюду плотное заполнение интервала $[m_{ix},\ m_{sx}]$ выборочными средними и справедливы равенства (16.3), при неограниченном увеличении количества выборок и объема каждой выборки оценки границ

---

[4] На необходимость обязательного введения в условие теоремы всюду плотного заполнения интервала $[m_{ix},\ m_{sx}]$ выборочными средними обратил внимание автора В.Н. Тутубалин.

выборочного среднего m^*_{ix}, m^*_{sx} сходятся по вероятности к тем же границам m_{ix}, m_{sx}.

Из теоремы следует, что состоятельные оценки границ математического ожидания гиперслучайной величины могут быть получены вычислением средних по множеству отсчетов для множества выборок и расчета по ним искомых границ.

Нетрудно убедиться, что таким же путем можно вычислять состоятельные оценки границ $m^*_{ix\nu} = \inf\limits_{l=\overline{1,L}} m^*_{x_l\nu}$, $m^*_{sx\nu} = \sup\limits_{l=\overline{1,L}} m^*_{x_l\nu}$ начальных моментов любого порядка ν, где $m^*_{x_l\nu}$ — оценка начального момента ν-го порядка, соответствующая l-й выборке.

Следует заметить, что рассчитывать границы центральных моментов $\mu^*_{ix\nu}$, $\mu^*_{sx\nu}$ по описанной схеме, к сожалению, нельзя из-за отсутствия необходимой для этого информации об оценках условных математических ожиданий.

16.4. ТЕОРЕМА, АНАЛОГИЧНАЯ ТЕОРЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Теорема 11 (аналогичная теореме 1). Пусть в неконтролируемо меняющихся статистических условиях проводится серия N независимых опытов, в каждом из которых может произойти некоторое событие A, рассматриваемое как гиперслучайное событие, представляемое множеством случайных событий A/g в условиях $g \in G$: $A = \{A/g \in G\}$.

Вероятность появления случайного события A/g в фиксированных условиях $g \in G$ равняется $p_{a/g}$. Нижняя и верхняя границы вероятности гиперслучайного события A соответственно равны P_{Ia}, P_{Sa}. Частота появления события A в рассматриваемой серии опытов описывается выражением $\Xi = \dfrac{N_a}{N}$, где N_a — число опытов, в которых произошло событие A. Эта частота — гиперслучайная величина, представляемая множеством случайных величин Ξ/g ($g \in G$): $\Xi = \{\Xi/g \in G\}$.

Тогда границы $F_{I\xi}(\xi)$, $F_{S\xi}(\xi)$ функции распределения $F_\xi(\xi)$

частоты Ξ при $N \to \infty$ сходятся по вероятности к функциям единичного скачка в точках P_{Ia}, P_{Sa}.

Доказательство основано на теореме 8. Гиперслучайное событие A можно рассматривать как гиперслучайную величину X, принимающую значение, равное единице, когда происходит событие A, и значение, равное нулю, когда событие не происходит.

Условное математическое ожидание $m_{x/g}$ случайной величины X/g равно $p_{a/g}$, а условная дисперсия

$$D_{x/g} = (1 - p_{a/g})^2 p_{a/g} + (0 - p_{a/g})^2 (1 - p_{a/g}) = p_{a/g}(1 - p_{a/g})$$

— величина ограниченная.

Границы математического ожидания гиперслучайной величины X равны P_{Ia}, P_{Sa}. Выборочное среднее гиперслучайной величины X представляет собой частоту $\Xi = \frac{N_a}{N}$ появления события A.

Тогда на основании теоремы 8 справедливо утверждение доказываемой теоремы.

Из теоремы следует, что при увеличении числа опытов $(N \to \infty)$ частота появления события A вне зависимости от количества условий G (если $G \neq 1$) находится в диапазоне $[P_{Ia}, P_{Sa}]$. При этом частота появления события не стремится к какому-то конкретному значению.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Доказана центральная предельная теорема для гиперслучайных величин, аналогичная центральной предельной теореме для случайных величин.

17.1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для гиперслучайных величин справедлива теорема, аналогичная центральной предельной теореме теории вероятностей. Она определяет закон распределения гиперслучайного выборочного среднего при устремлении объема выборки к бесконечности. Прежде чем переходить к рассмотрению теоремы, напомним без доказательства центральную предельную теорему для случайных величин.

Теорема 1 (*Линдеберга—Феллера*). Пусть $X_1,\ldots,X_N$ — в общем случае неоднородная случайная выборка, элементы которой взаимно независимы и описываются функциями распределения $F_{x_n}(x)$ с математическими ожиданиями m_{x_n} и дисперсиями D_{x_n} ($n=\overline{1,N}$). Выполняется условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{B_N^2}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\left|x-m_{x_n}\right|>\varepsilon B_N}(x-m_{x_n})^2\,\mathrm{d}F_{x_n}(x)=0, \qquad (17.1)$$

где $B_N^2=\sum\limits_{n=1}^{N}D_{x_n}$ — сумма дисперсий D_{x_n} случайных величин X_n.

Тогда функция распределения $P\left\{m_{\bar{x}}^* < x\right\}$ выборочного среднего $m_{\bar{x}}^*=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$ сходится равномерно к гауссовской функции распределения $F(x/m_{\bar{x}}, D_{\bar{x}}) = \Phi\left(\dfrac{x - m_{\bar{x}}}{\sqrt{D_{\bar{x}}}}\right)$ с математическим ожиданием $m_{\bar{x}} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ и дисперсией $D_{\bar{x}} = \dfrac{1}{N^2} B_N^2$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{m_{\bar{x}}^* < x\right\} = \lim_{N\to\infty} F(x/m_{\bar{x}}, D_{\bar{x}}),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)\mathrm{d}z$.

Отметим, что условие (17.1) является необходимым и достаточным условием сходимости выборочного среднего к гауссовскому распределению.

17.2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Назовем *функцию распределения фрагментарно-гауссовской,* если она описывается фрагментами гауссовских функций распределений. Аналитически такую функцию можно представить в виде

$$G(x) = \sum_{j=0}^{J-1} F(x/m_j, D_j)\mathrm{rect}\left[\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right],$$

где $\mathrm{rect}[x]$ — П-образная функция:

$$\mathrm{rect}[x] = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x \le 0, \ x > 1, \\ 1 \ \text{ при } \ 0 < x \le 1, \end{cases}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_J$ — последовательный ряд точек на оси x, в которых происходит изменение вида распределения, $x_0 \to -\infty$, $x_J \to \infty$.

Функцию распределения назовем *предельной фрагментарно-гауссовской*, если она получена из фрагментарно-гауссовской функции распределения при бесконечно большом количестве точек, в которых происходит изменение вида распределения.

Теорема 2. Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — в общем случае неоднородная гиперслучайная выборка с взаимно независимыми при всех условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ элементами, n-й элемент выборки в условиях g_n описывается функцией распределения $F_{x_n/g_n}(x)$ с математическим ожиданием m_{x_n/g_n} и дисперсией D_{x_n/x_n}. При всех условиях $\vec{g} \in \vec{G}$ выполняется условие Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{B_N^2} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\left|x - m_{x_n/g_n}\right| > \varepsilon B_N} (x - m_{x_n/g_n})^2 \mathrm{d}F_{x_n/g_n}(x) = 0 ,$$

где $B_N^2 = \sum_{n=1}^{N} D_{x_n/g_n}$ — сумма дисперсий D_{x_n/g_n} случайных величин X_n / g_n ($n = \overline{1, N}$).

Тогда при $N \to \infty$ верхняя и нижняя границы $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ функции распределения гиперслучайного выборочного среднего $m_x^* = \left\{ m_{\vec{x}/\vec{g}}^*, \vec{g} \in \vec{G} \right\}$, где $m_{\vec{x}/\vec{g}}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n / g_n$ — случайное среднее в условиях $\vec{g} \in \vec{G}$, равномерно стремятся к предельным фрагментарно-гауссовским функциям распределения.

Доказательство теоремы основано на центральной предельной теореме для случайных величин (теореме Линдеберга—Феллера).

В соответствии с центральной предельной теоремой для случайных величин функция распределения $F_{m_{\vec{x}/\vec{g}}^*}(x)$ случайного выборочного среднего $m_{\vec{x}/\vec{g}}^*$ при $N \to \infty$ равномерно стремится к гауссовскому распределению с математическим ожиданием $m_{\vec{x}/\vec{g}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} m_{x_n/g_n}$ и дисперсией $D_{\vec{x}/\vec{g}} = \frac{1}{N^2} B_N^2$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{ m_{\vec{x}/\vec{g}}^* < x \right\} = \lim_{N\to\infty} F(x / m_{\vec{x}/\vec{g}}, D_{\vec{x}/\vec{g}}) \quad \forall \vec{g} \in \vec{G}.$$

Границы функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ гиперслучайного среднего m_x^* формируются из фрагментов функций распределения $F_{m_{\vec{x}/\vec{g}}^*}(x)$ случайных средних $m_{\vec{x}/\vec{g}}^*$, $\vec{g} \in \vec{G}$ (рис. 17.1).

При большом N эти функции распределения приближаются к гауссовским распределениям. Поскольку две разные гауссовские функции распределения пересекаются не более чем в одной точке, границы функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ гипер-

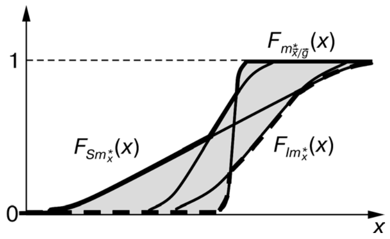


Рис. 17.1. Веер функций распределения $F_{m^*_{\vec{x}/\vec{g}}}(x)$ случайных средних $m^*_{\vec{x}/\vec{g}}$ (тонкие кривые), верхняя $F_{Sm^*_x}(x)$ (жирная сплошная кривая) и нижняя $F_{Im^*_x}(x)$ (жирная штриховая кривая) границы функции распределения гиперслучайного среднего m^*_x, $N = \text{const}$

случайного среднего m^*_x при $N \to \infty$ равномерно стремятся к предельным фрагментарно-гауссовским функциям распределения.

Заметим, что рассматриваемая теорема, утверждающая, что в случае выполнения условия Линдеберга при устремлении объема выборки к бесконечности имеет место фрагментарно-гауссовский характер границ функции распределения выборочного среднего, не противоречит теореме 8 предыдущей главы, утверждающей сходимость этих границ к фиксированным величинам (границам выборочного среднего m_{ix}, m_{sx}).

Иначе говоря, в случае выполнения условия Линдеберга функции распределения границ выборочного среднего при увеличении объема выборки N приближаются к функциям, описываемым фрагментарно-гауссовскими распределениями, которые при $N \to \infty$ переходят в функции единичного скачка в точках m_{ix} и m_{sx}.

Глава 18

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Описаны различные модели измерения физических величин. Исследована детерминированно-гиперслучайная модель измерения. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок — понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Показано, что из-за неконтролируемой изменчивости условий наблюдения гиперслучайные оценки детерминированных величин не состоятельны, а точность измерения — ограничена.

18.1. МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

При построении физических моделей измеряемых величин и их оценок, как правило, предполагают, что величины, подлежащие измерению, носят детерминированный, а их оценки из-за воздействия различных мешающих факторов — случайный характер. Поэтому для математического описания измеряемых величин часто используют детерминированные математические модели, а для описания их оценок — случайные (стохастические) модели с определенными законами распределения. На этом построена вся современная классическая теория измерений, являющаяся теоретической базой повсеместно используемой прикладной метрологии.

Иногда полагают, что не только оценка, но и измеряемая величина носит случайный характер.

На рис. 18.1, 18.2 для скалярной измеряемой величины и ее оценки схематично изображены функции распределения, соот-

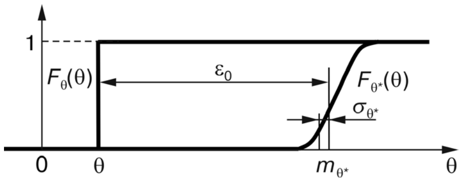


Рис. 18.1. Детерминированно-случайная модель измерения

ветствующие указанным *детерминированно-случайной* и *случайно-случайной моделям измерения*.

Приближенно детерминированную величину θ можно рассматривать как случайную величину с δ-образной плотностью распределения в точке θ. Поэтому на рис 18.1 детерминированная величина θ представлена скачкообразной функцией распределения.

На рис. 18.1, 18.2 $F_{\theta^*}(\theta)$ — функция распределения случайной оценки Θ^*; $F_\theta(\theta)$ — функция распределения измеряемой случайной величины Θ; ε_0 — смещение оценки (если измеряемая величина — детерминированная, то $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - \theta$, если случайная, то $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - m_\theta$); m_{θ^*} — математическое ожидание оценки Θ^*; m_θ — математическое ожидание измеряемой случайной величины Θ; σ_θ, σ_{θ^*} — среднеквадратические отклонения соответственно измеряемой случайной величины Θ и ее оценки Θ^*.

Обобщением детерминированно-случайной и случайно-случайной моделей являются *детерминированно-гиперслучайная* (рис. 18.3) и *случайно-гиперслучайная* (рис. 18.4) *модели*. В первой модели измеряемая величина описывается детерминированной, а во второй — случайной величиной. В обеих моделях оценка представляется гиперслучайной величиной.

На рисунках $F_{S\theta^*}(\theta)$ и $F_{I\theta^*}(\theta)$ — соответственно верхняя и нижняя границы функции распределения гиперслучайной оценки Θ^*; ε_{S0} и ε_{I0} — смещения верхней и нижней границ функции

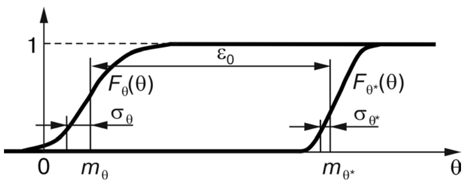


Рис. 18.2. Случайно-случайная модель измерения

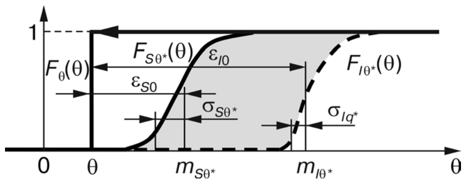


Рис. 18.3. Детерминированно-гиперслучайная модель измерения

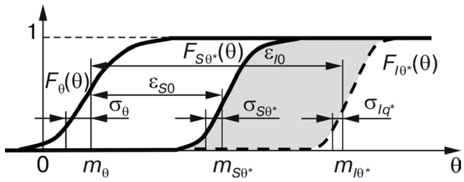


Рис. 18.4. Случайно-гиперслучайная модель измерения

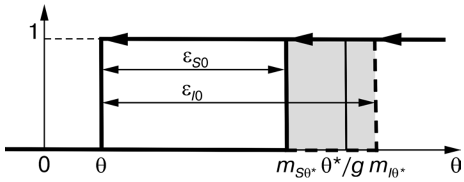


Рис. 18.5. Детерминированно-интервальная модель измерения

распределения гиперслучайной оценки относительно измеряемой величины (если эта величина — детерминированная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - \theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - \theta$, если случайная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - m_\theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - m_\theta$); $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ — математические ожидания верхней и нижней границ гиперслучайной оценки; $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ — среднеквадратические отклонения соответствующих границ гиперслучайной оценки. Зона неопределенности гиперслучайной оценки показана затемненной областью.

Определенный интерес представляет *детерминированно-интервальная модель измерения*, в которой измеряемая величина рассматривается как детерминированная, а оценка — как интервальная величина.

На рис. 18.5 для величины θ и интервальной оценки Θ^* схематично изображена такая модель. Зона неопределенности интервальной величины представлена затемненной областью.

Следующим шагом обобщения можно считать *гиперслучайно-гиперслучайную модель измерения*, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами. Эта модель наиболее точно и адекватно описывает процедуру измерения.

Начнем рассмотрение моделей измерения с детерминированно-гиперслучайной модели.

18.2. ТОЧЕЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим задачу оценки детерминированной величины θ по результатам наблюдения гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$. *Точечную гиперслучайную оценку* Θ^* будем рассматривать как некоторую статистику — функцию выборки $\vec{X}$ объема N из гиперслучайной генеральной совокупности. Оценку Θ^* можно описать множеством случайных величин Θ^* / g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\Theta^* = \{\Theta^* / g \in G\}$. Случайная оценка Θ^* / g является функцией случайной выборки $\vec{X} / g$.

Конкретную величину θ^* гиперслучайной оценки Θ^* можно представить множеством детерминированных величин θ^* / g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\theta^* = \{\theta^* / g \in G\}$.

В зависимости от постановки задачи *точность точечной оценки* можно характеризовать по-разному. В общем случае точность характеризует *гиперслучайная погрешность* $Z = \Theta^* - \theta$. При фиксированном условии g в качестве параметра точности оценки Θ^* может выступать величина $\Delta^2_{z/g}$ — математическое ожидание среднего квадрата *случайной погрешности* $Z/g = \Theta^* / g - \theta$:

$$\Delta^2_{z/g} = \mathrm{M}\left[\left|\Theta^* / g - \theta\right|^2\right].$$

Для характеристики точности оценки без конкретизации условий можно использовать интервал, в котором находится величина $\Delta^2_{z/g}$. Оценка θ^* / g может быть как больше, так и меньше измеряемой величины. Поэтому верхняя граница этого интервала

$$\Delta^2_{\max} = \max[\Delta^2_{Sz}, \Delta^2_{Iz}],$$

где $\Delta^2_{Sz} = \mathrm{M}_S[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$, $\Delta^2_{Iz} = \mathrm{M}_I[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$ — *средние квадраты по-*

грешности Z, рассчитанные с использованием соответственно верхней $F_{S\theta^*}(\theta)$ и нижней $F_{S\theta^*}(\theta)$ границ функции распределения.

Точность точечной оценки можно охарактеризовать также *границами среднего квадрата погрешности* Z:

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G} \mathrm{M}[|\Theta^* / g - \theta|^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G} \mathrm{M}[|\Theta^* / g - \theta|^2].$$

18.3. НЕСМЕЩЕННАЯ И СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Гиперслучайную оценку Θ^* детерминированной величины θ будем называть *несмещенной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\Theta^* / g]$ условной случайной величины Θ^* / g равно оцениваемой величине: $m_{\theta^* / g} = \theta$. В противном случае оценку будем называть смещенной. Величина смещения (*систематическая погрешность*) в условиях g описывается выражением $\varepsilon_{0/g} = m_{\theta^* / g} - \theta$.

Необходимым условием несмещенности гиперслучайной оценки является равенство между собой математических ожиданий $m_{\theta^*/g}$ $\forall g \in G$. При различных математических ожиданиях $m_{\theta^*/g}$ для разных условий g оценка Θ^* оказывается смещенной.

Следует обратить внимание, что даже для несмещенной оценки математические ожидания границ $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ не всегда равны математическим ожиданиям $m_{\theta^*/g}$ условных случайных величин Θ^* / g. Равенство имеет место, если условия постоянны (при этом гиперслучайная величина вырождается в случайную величину).

Границы Δ_{Sz}^2, Δ_{Iz}^2 и Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 можно представить следующим образом:

$$\Delta_{Sz}^2 = m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2, \qquad \Delta_{Iz}^2 = m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2,$$

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2], \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}[m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2],$$

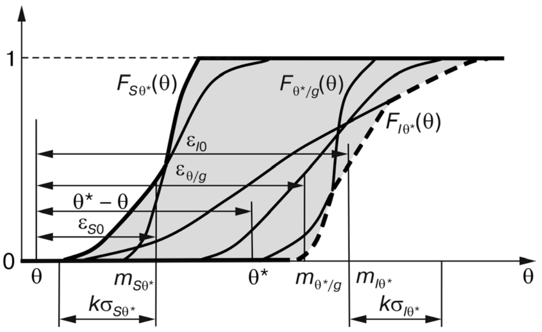


Рис. 18.6. Веер условных функций распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ (тонкие кривые) для различных условий g, верхняя $F_{S\theta^*}(\theta)$ (жирная сплошная кривая) и нижняя $F_{I\theta^*}(\theta)$ (жирная пунктирная кривая) границы функции распределения

где $m_{Sz} = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$, $m_{Iz} = m_{I\theta^*} - \theta = \varepsilon_{I0}$ — математические ожидания границ погрешности, представляющие собой смещения оценки относительно соответственно верхней и нижней границ функции распределения; $\sigma_{Sz}^2 = \mathrm{M}_S\left[\left(Z - m_{Sz}\right)^2\right]$, $\sigma_{Iz}^2 = \mathrm{M}_I\left[\left(Z - m_{Iz}\right)^2\right]$ — дисперсии границ погрешности; $\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 = \mathrm{M}\left[\left(\Theta^*/g - m_{\theta^*/g}\right)^2\right]$ — условная дисперсия погрешности, совпадающая с условной дисперсией оценки (рис. 18.6).

Погрешность в неопределенных условиях z/g описывается неравенством

$$\varepsilon_{S0} - k\sigma_{Sz} < z/g < \varepsilon_{I0} + k\sigma_{Iz}, \qquad (18.1)$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ при наличии оценки θ^*/g — неравенством

$$\theta^*/g - \varepsilon_{I0} - k\sigma_{Iz} < \theta < \theta^*/g - \varepsilon_{S0} + k\sigma_{Sz}, \qquad (18.2)$$

где k — константа, определяющая степень доверия.

Если условные функции распределения оценки Θ^*/g не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ их условные дисперсии $\sigma_{\theta^*/g}^2$ увеличиваются (тип распределения «*а*» в соответствии с классификацией, введенной в параграфе 6.5) или уменьшаются (тип распределения «*б*»), этот интервал определяется границами смещения ε_{i0}, ε_{s0} и границами среднеквадратического отклонения оценки $\sigma_{i\theta^*}$, $\sigma_{s\theta^*}$. Для распределения типа «*а*» он равен

$$[\theta^* / g - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{s\theta^*}, \theta^* / g - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{i\theta^*}],$$

а для распределения типа «*б*» —

$$[\theta^* / g - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{i\theta^*}, \theta^* / g - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{s\theta^*}].$$

Гиперслучайную оценку Θ^* *детерминированной величины* θ назовем *состоятельной*, если при всех условиях $g \in G$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N \to \infty} P\{|\Theta^* / g - \theta| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall g \in G,$$

где N — объем выборки для каждого g; $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

Далеко не все гиперслучайные оценки состоятельны. В параграфах 16.2, 16.3 обращалось внимание на то, что в общем случае при увеличении объема выборки гиперслучайное среднее стремится не к определенному числу, а к множеству чисел. Лишь в исключительном случае оно стремится к числу. Это означает, что оценки, сохраняющие гиперслучайный характер при $N \to \infty$, могут быть не состоятельными.

Несостоятельные гиперслучайные оценки будем называть *оценками гиперслучайного типа*, а состоятельные — *случайного типа*.

Следует отметить, что реальные статистические условия наблюдения величин постоянно изменяются. Поэтому представляется весьма правдоподобным предположение, что оценки всех реальных детерминированных величин, обычно рассматриваемые как случайные и состоятельные, в действительности носят *гиперслучайный характер* и *свойством состоятельности не обладают.*

При использовании детерминированно-случайной модели измерения погрешность представляет собой случайную величину. Она может быть описана двумя составляющими: систематической, не изменяющейся в процессе формирования выборки, и случайной составляющей с нулевым математическим ожиданием, изменяющейся от опыта к опыту. Эти составляющие можно охарактеризовать двумя параметрами: смещением ε_0 и среднеквадратическим отклонением σ_z. При этом погрешность z конкретного измерения может быть описана неравенством

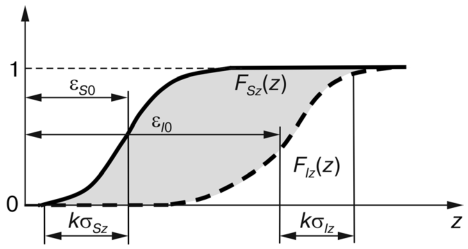


Рис. 18.7. Модель погрешности измерения

$$\varepsilon_0 - k\sigma_z < z < \varepsilon_0 + k\sigma_z .$$

В случае детерминированно-гиперслучайной модели измерений погрешность представляет собой гиперслучайную величину. Она определяется зоной неопределенности и описывается неравенством (18.1), в котором фигурируют четыре параметра: $\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}, \sigma_{Sz}, \sigma_{Iz}$. Эти параметры задают на оси погрешности местоположение и размер зоны неопределенности (рис. 18.7).

В частном случае, когда границы функции распределения различаются лишь математическими ожиданиями (тогда $\sigma_{Sz} = \sigma_{Iz} = \sigma_z$), погрешность Z может быть представлена аддитивной моделью $Z = z_0 + \tilde{Z}$ с двумя составляющими: *неопределенной составляющей* z_0, характеризующей местоположение и протяженность зоны неопределенности, и *случайной составляющей* $\tilde{Z}$, характеризующей форму этой зоны.

Неопределенная составляющая z_0 — *статистически непрогнозируемая* — может быть описана интервальной величиной $[\varepsilon_{S0}, \varepsilon_{I0}]$, а случайная составляющая $\tilde{Z}$ — среднеквадратическим отклонением σ_z.

Неопределенная составляющая z_0 может быть представлена в виде суммы систематической составляющей $z_0' = \varepsilon_{S0}$, характеризующей начало зоны неопределенности, и интервальной величины $z_0'' = [0, \varepsilon_{I0} - \varepsilon_{S0}]$, характеризующей протяженность этой зоны неопределенности. При этом погрешность имеет три составляющие: *систематическую*, *случайную* и *интервальную*.

Таким образом, в детерминированно-случайной и детерминированно-гиперслучайной моделях измерения погрешности оказываются разными. В первом случае погрешность носит случайный характер и содержит систематическую и случайную составляющие. Во втором случае она носит гиперслучайный характер и в общем случае не может быть разложена на указанные систематическую и случайную составляющие. В частном случае погрешность может быть представлена тремя составляющими: систематической, случайной и интервальной.

18.4. ЭФФЕКТИВНАЯ И ДОСТАТОЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Важной характеристикой оценки является ее эффективность. *Гиперслучайную оценку* Θ_e^* *детерминированной величины* θ назовем *эффективной* (*при всех условиях* $g \in G$), если условные математические ожидания квадрата отклонения оценки Θ_e^* / g от величины θ по совокупности выборок заданного объема N не больше, чем для любых других оценок Θ_i^* / g:

$$\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2] \le \mathrm{M}[(\Theta_i^* / g - \theta)^2],$$
$$i = 1, 2, \ldots, \quad \forall g \in G. \tag{18.3}$$

Величина $\mathrm{M}\left[(\Theta^* / g - \theta)^2\right]$ в общем случае не является дисперсией оценки $\sigma^2_{\theta^* / g}$. Она оказывается таковой лишь для несмещенных оценок. Для таких оценок условие эффективности может быть записано в виде $\sigma^2_{\theta_e^* / g} \le \sigma^2_{\theta_i^* / g}$, $i = 1, 2, \ldots \quad \forall g \in G$.

Эффективность оценки, как и несмещенность, зависит от наличия априорных данных о распределении гиперслучайной величины X и от вида распределения.

Мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_s, l_i, определяемые как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения эффективной оценки Θ_e^* к математическому ожиданию квадрата отклонения рассматриваемой оценки Θ^*:

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \theta)^2]}, \quad l_i = \inf_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \theta)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале $[0,1]$. В случае, когда оценка эффективна, $l_s = l_i = 1$.

Границы погрешности можно оценить с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \{\vec{X} / g \in G\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерной условной плотности вероятностей $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность вероятности абсолютно интегрируема по $\vec{x}$, дважды дифференцируема по θ и, кроме того, для условной случайной оценки Θ^*/g существуют первые два момента. Тогда границы среднего квадрата погрешности Δ_{sz}^2, Δ_{iz}^2 и границы $\sigma_{s\theta^*}^2$, $\sigma_{i\theta^*}^2$ условной дисперсии оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$ определяются неравенствами

$$\Delta_{sz}^2 \geq \sigma_{s\theta^*}^2 \geq \sup_{g \in G}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}\right],$$

$$\Delta_{iz}^2 \geq \sigma_{i\theta^*}^2 \geq \inf_{g \in G}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}\right], \qquad (18.4)$$

где J_g — *информация по Фишеру*:

$$J_g = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2}\right],$$

$\mathrm{M}[\cdot]$ — оператор математического ожидания, действующий в данном случае на вектор $\vec{X}$.

Доказательство теоремы основано на известном *неравенстве Крамера—Рао для случайных оценок* [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003]. При выполнении указанных условий для случайных величин Θ^*/g справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{M}\left[(\Theta^* - \theta)^2 / g\right] \geq \sigma_{\theta^*/g}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}. \qquad (18.5)$$

На его основании справедливы неравенства (18.4).

Из выражения (18.4) видно, что для обеспечения нулевой дисперсии величина $\partial \varepsilon_{0/g} / \partial \theta$ должна быть равной -1. Отсюда следует, что так же, как и в случае случайных оценок, невозможно одновременно обеспечить нулевое смещение и нулевую дисперсию.

Для однородной независимой выборки

$$f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} f_{x_n/\theta,g}(x_n) \text{ и } J_g = -N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{x/\theta,g}(X)}{\partial\theta^2}\right].$$

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки можно ввести другое определение.

Эффективной оценкой Θ_e^* назовем оценку Θ^*, для которой границы математического ожидания определяются равенствами

$$\mathrm{M}_s\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \sup_{g\in G}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{0/g}}{\partial\theta}\right)^2 J_g^{-1}\right],$$

$$\mathrm{M}_i\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \inf_{g\in G}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{0/g}}{\partial\theta}\right)^2 J_g^{-1}\right]. \quad (18.6)$$

В общем случае определения (18.3) и (18.6) не эквивалентны. Если эффективная оценка в соответствии с выражениями (18.6) всегда удовлетворяет неравенству (18.3), то эффективная оценка в соответствии с выражением (18.3) не всегда удовлетворяет равенствам (18.6). Если не существует эффективной оценки в соответствии с выражениями (18.6), то эти выражения характеризуют не потенциальную точность оценки, а верхнюю границу точности оценки.

Границы функции распределения гиперслучайного вектора $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X}/g_S$ и $\vec{X}/g_I$, соответствующие некоторым виртуальным граничным условиям g_S и g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G.

Теорема 2. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g\in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \left\{\vec{X}/g\in G\right\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерных плотностей вероятностей границ $f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{x})$,

$f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, плотности вероятностей границ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для гиперслучайной оценки Θ^* существуют первые два момента границ. Тогда средние относительно границ квадраты абсолютной погрешности Δ_{Sz}^2, Δ_{Iz}^2 и дисперсии границ $\sigma_{S\theta^*}^2$, $\sigma_{I\theta^*}^2$ определяются неравенствами

$$\Delta_{Sz}^2 \geq \sigma_{S\theta^*}^2 \geq \left(1+\frac{\partial\varepsilon_{S0}}{\partial\theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1},$$

$$\Delta_{Iz}^2 \geq \sigma_{I\theta^*}^2 \geq \left(1+\frac{\partial\varepsilon_{I0}}{\partial\theta}\right)^2 J_{g_I}^{-1}, \tag{18.7}$$

где J_{g_S}, J_{g_I} — информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{X})}{\partial\theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{X})}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на неравенстве (18.5). На основании неравенства (18.5) справедливы неравенства (18.7).

Гиперслучайную оценку Θ^* *детерминированной величины* θ будем называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятностей $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1,...,x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о θ.

Если оценка эффективная, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

18.5. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим *гиперслучайную интервальную оценку детерминированной величины.*

Пусть для детерминированной величины θ существует гиперслучайная оценка Θ^*, границы функции распределения погрешности $Z = \Theta^* - \theta$ этой оценки описываются выражениями $F_{Sz}(\theta^* - \theta)$, $F_{Iz}(\theta^* - \theta)$, а плотности распределения границ — выражениями $f_{Sz}(\theta^* - \theta)$, $f_{Iz}(\theta^* - \theta)$ (рис. 18.8).

Вероятность того, что погрешность оценки не больше $-\varepsilon$, определяется двойным неравенством

$$\alpha_I \le P(\Theta^* / g - \theta \le -\varepsilon) \le \alpha_S ,$$

а вероятность того, что она не меньше ε, — неравенством

$$\beta_S \le P(\Theta^* / g - \theta \ge \varepsilon) \le \beta_I ,$$

где $\alpha_I = \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z$, $\alpha_S = \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z$,

$$\beta_S = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z ,\ \beta_I = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z .$$

Отсюда следует, что *границы доверительной вероятности*

$$P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon / g)$$

нахождения истинного значения величины θ в *доверительном интервале* $I = (\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon / g)$ определяются двойным неравенством

$$1 - (\alpha_S + \beta_I) \le P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon / g) \le 1 - (\alpha_I + \beta_S) .$$

Подобно интервалу $[m_{S\theta^*} - k\sigma_{S\theta^*},\ m_{I\theta^*} + k\sigma_{I\theta^*}]$, это неравенство характеризует точность гиперслучайной оценки.

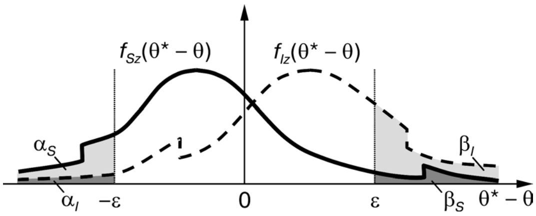


Рис. 18.8. Плотности распределения границ погрешности $Z = \Theta^* - \theta$

* * *

Таким образом, из-за изменений статистических условий наблюдения физических величин реальные оценки носят гиперслучайный характер. При этом они не обладают свойством состоятельности.

В рамках детерминированно-гиперслучайной модели измерения погрешность описывается гиперслучайной величиной. Ее нельзя разложить на систематическую и случайную составляющие. В частном случае (при совпадении формы границ функции распределения погрешности) погрешность можно представить в виде суммы трех составляющих: систематической, интервальной и случайной.

Глава 19

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрена гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем и частных случаях. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

19.1. ГИПЕРСЛУЧАЙНО-ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Под *гиперслучайно-гиперслучайной моделью измерения* понимается модель, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами.

Пусть множество G охватывает множество всех вариантов условий формирования измеряемой величины и оценки. За время взятия выборки в фиксированных условиях $g \in G$ значение измеряемой величины не изменяется. Измеряемая гиперслучайная величина Θ представляет собой множество случайных величин Θ/g, описывающих измеряемую величину при фиксированных условиях $g \in G$: $\Theta = \{\Theta / g \in G\}$ (рис. 19.1). Случайная величина Θ/g может принимать множество конкретных значений $\{\theta/g\}$. Множество гиперслучайных величин $\{\Theta\}$ образует пространство Θ_0.

Гиперслучайная оценка Θ^*, соответствующая измеряемой гиперслучайной величине Θ, представляет собой множество случайных величин Θ^*/g, описывающих оценки случайных величин Θ/g в условиях $g \in G$: $\Theta^* = \{\Theta^* / g \in G\}$. Функция распределения случайной величины Θ^*/g определяется законом распределения

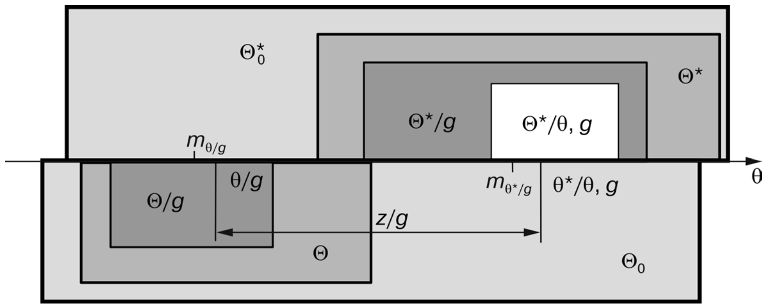


Рис. 19.1. Качественное представление измеряемой величины и оценки

случайной величины $\Theta^*/\theta,g$, описывающим оценку при конкретном значении измеряемой величины θ/g, и законом распределения случайной величины Θ/g. Случайная величина $\Theta^*/\theta,g$ может принимать множество конкретных значений $\{\theta^*/\theta,g\}$. Множество гиперслучайных оценок $\{\Theta^*\}$ образует пространство Θ_0^*.

Гиперслучайная оценка Θ^* формируется на основе гиперслучайной выборки данных $\vec{X} = \{\vec{X}/g \in G\}$ из генеральной совокупности гиперслучайной величины $X = \{X/g \in G\}$, доступной для непосредственного измерения. Гиперслучайная оценка Θ^* является функцией (статистикой) гиперслучайной выборки $\vec{X}$, случайные оценки Θ^*/g и $\Theta^*/\theta,g$ — функциями соответственно случайных выборок $\vec{X}/g$ и $\vec{X}/\theta,g$, а конкретная оценка $\theta^*/\theta,g$ — функцией конкретной выборки $\vec{x}/\theta,g$.

Величины Θ, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g и Θ^* описываются следующим образом.

Гиперслучайная величина Θ представляется вероятностными характеристиками (условными функциями распределения $F_{\theta/g}(\theta)$ для всех $g \in G$, условными плотностями $f_{\theta/g}(\theta)$, границами функции распределения $F_{S\theta}(\theta)$, $F_{I\theta}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta/g}$, среднеквадратическим

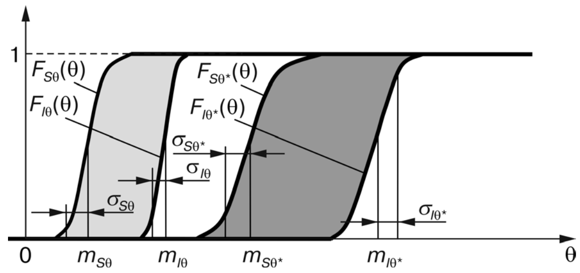


Рис. 19.2. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

отклонением $\sigma_{\theta/g}$ и т.д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}$, $m_{I\theta}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta}$, $\sigma_{I\theta}$ и др.).

Случайная оценка $\Theta^* / \theta, g$ характеризуется вероятностными характеристиками (функцией распределения $F_{\theta^* / \theta, g}(\theta)$, плотностью распределения $f_{\theta^* / \theta, g}(\theta)$ и пр.) и числовыми параметрами: математическим ожиданием $m_{\theta^* / \theta, g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^* / \theta, g}$ и т.д., а случайная оценка Θ^* / g — функцией распределения $F_{\theta^* / g}(\theta)$, математическим ожиданием $m_{\theta^* / g} = \mathrm{M}[m_{\theta^* / \Theta, g}]$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^* / g}$ и пр., где в данном случае оператор математического ожидания $\mathrm{M}[\cdot]$ действует на случайную величину Θ/g.

Гиперслучайная оценка Θ^* описывается вероятностными характеристиками (условными функциями распределения $F_{\theta^* / g}(\theta)$ $\forall g \in G$, границами функции распределения $F_{S\theta^*}(\theta)$, $F_{I\theta^*}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta^*/g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^* / g}$ для всех $g \in G$ и т.д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ и др.).

Схематично гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения изображена на рис. 19.2.

Одна из основных задач измерения гиперслучайной величины Θ состоит в том, чтобы, имея в своем распоряжении конкретную выборку $\vec{x}/\theta,g$, соответствующую неизвестной величине θ и неизвестным условиям $g \in G$, а также априорную информацию о параметрах и характеристиках оценки и измеряемой величины, вычислить оценку и оценить точность измерения.

Оценку можно рассматривать как *точечную* или как *интервальную*. В первом случае необходимо сформировать по выборке $\vec{x}/\theta,g$ конкретную оценку $\theta^*/\theta,g$ и для неопределенных условий указать границы погрешности, соответствующие гиперслучайной величине Θ и гиперслучайной оценке Θ^*. Во втором случае с учетом гиперслучайных свойств погрешности надо рассчитать границы доверительного интервала, накрывающего измеряемую гиперслучайную величину Θ. Рассмотрим оба типа оценок.

19.2. ТОЧЕЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В фиксированных условиях g о близости случайной оценки Θ^*/g к случайной величине Θ/g можно судить по условной функции распределения $F_{z/g}(z)$ *погрешности* $Z/g = \Theta^*/g - \Theta/g$. В качестве метрики можно использовать корень из среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/g} = \sqrt{\mathrm{M}\left[\left|\Theta^*/g - \Theta/g\right|^2\right]}$ (или квадрат этой величины).

Величина $\Delta_{z/g}$ связана с математическим ожиданием $m_{z/g}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{z/g}$ погрешности зависимостью $\Delta_{z/g} = \sqrt{m_{z/g}^2 + \sigma_{z/g}^2}$. Нетрудно убедиться, что величина $m_{z/g}$ представляет собой смещение оценки $\varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки следующей зависимостью:

$$\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g},$$

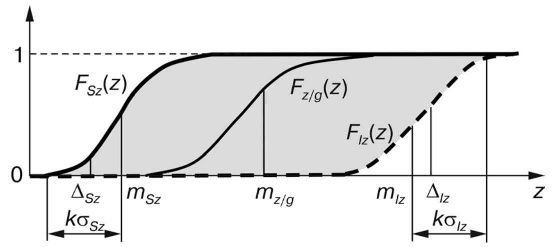


Рис. 19.3. Характеристики и параметры погрешности

где $R_{\theta^*\theta/g} = \mathrm{M}[(\Theta^*/g - m_{\theta^*/g})(\Theta/g - m_{\theta/g})]$ — условный ковариационный момент оценки и измеряемой величины.

В неопределенных условиях точность измерения характеризуют границы функции распределения погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$, а также величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz}, представляющие собой корни из средних относительно границ квадратов погрешности (рис. 19.3):

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z)\mathrm{d}z}\,, \quad \Delta_{Iz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z)\mathrm{d}z}\,,$$

где $f_{Sz}(z)$, $f_{Iz}(z)$ — плотности распределения границ, соответствующие функциям распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$.

Величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} определяются математическими ожиданиями m_{Sz}, m_{Iz} границ функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ и среднеквадратическими отклонениями границ σ_{Sz}, σ_{Iz}:

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2}\,, \quad \Delta_{Iz} = \sqrt{m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2}\,.$$

В зависимости от значений параметров $m_{Sz}, m_{Iz}, \sigma_{Sz}, \sigma_{Iz}$ величина Δ_{Sz} может быть как больше, так и меньше величины Δ_{Iz} (рис. 19.3).

Погрешность конкретного измерения $z/g = \theta^*/\theta, g - \theta/g$ в неизвестных условиях g можно оценить неравенством

$$m_{Sz} - k\sigma_{Sz} < z/g < m_{Iz} + k\sigma_{Iz}\,, \tag{19.1}$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ/g при наличии оценки $\theta^*/\theta,g$ — неравенством

$$\theta^*/\theta,g - m_{Iz} - k\sigma_{Iz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - m_{Sz} + k\sigma_{Sz}, \qquad (19.2)$$

где k — некоторая константа (см. рис. 19.3), определяемая степенью доверия к результату измерения.

Следует обратить внимание на то, что в неравенствах (19.1), (19.2) учитывается различие дисперсий границ распределения, что оказывается существенным при значительном их отличии.

Выражения (19.1), (19.2) упрощаются, когда условные функции распределения погрешности Z/g для всех $g \in G$ не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}$ ее условные дисперсии $\sigma^2_{z/g}$ увеличиваются (тип распределения «*а*» в соответствии с классификацией, введенной в параграфе 6.5) или уменьшаются (тип распределения «*б*»). Тогда интервалы (19.1), (19.2) характеризуются границами математического ожидания погрешности m_{iz}, m_{sz} и границами среднеквадратического ее отклонения σ_{iz}, σ_{sz}:

$$m_{iz} = \inf_{g\in G} m_{z/g} = \inf_{g\in G} \varepsilon_g = \varepsilon_i\,, m_{sz} = \sup_{g\in G} m_{z/g} = \sup_{g\in G} \varepsilon_g = \varepsilon_s\,,$$

$$\sigma_{iz} = \inf_{g\in G} \sigma_{z/g} = \inf_{g\in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}},$$

$$\sigma_{sz} = \sup_{g\in G} \sigma_{z/g} = \sup_{g\in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}}. \qquad (19.3)$$

Для распределения типа «*а*» неравенства (19.1), (19.2) имеют соответственно вид

$$\varepsilon_i - k\sigma_{iz} < z/g < \varepsilon_s + k\sigma_{sz},$$

$$\theta^*/\theta,g - \varepsilon_s - k\sigma_{sz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - \varepsilon_i + k\sigma_{iz}, \qquad (19.4)$$

а для распределения типа «*б*» —

$$\varepsilon_i - k\sigma_{sz} < z/g < \varepsilon_s + k\sigma_{iz},$$

$$\theta^*/\theta,g - \varepsilon_s - k\sigma_{iz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - \varepsilon_i + k\sigma_{sz}. \qquad (19.5)$$

Границы среднего квадрата погрешности Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} определяются разностью математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $m_{\theta/g}$ (смещением оценки ε_g), дисперсиями оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $\sigma^2_{\theta/g}$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g \in G} \Delta^2_{z/g} = \inf_{g \in G}(\varepsilon^2_g + \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}),$$

$$\Delta^2_{sz} = \sup_{g \in G} \Delta^2_{z/g} = \sup_{g \in G}(\varepsilon^2_g + \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}).$$

Структура неравенств (18.1), (19.1), описывающих погрешность соответственно для детерминированно-гиперслучайной и гиперслучайно-гиперслучайной моделей, одинакова. В обоих случаях погрешность может быть охарактеризована четырьмя параметрами m_{Sz}, m_{Iz}, σ_{Sz}, σ_{Iz}, задающими на оси погрешности местоположение и размеры зоны неопределенности.

В частном случае, когда границы функции распределения различаются лишь математическими ожиданиями ($\sigma_{Sz} = \sigma_{Iz} = \sigma_z$), погрешность Z может быть представлена *неопределенной* z_0 и *случайной* $\tilde{Z}$ составляющими. Неопределенная составляющая может быть описана интервальной величиной $[m_{Sz}, m_{Iz}]$, а случайная составляющая — среднеквадратическим отклонением σ_z. В этом же частном случае другой вариант представления погрешности — с помощью *систематической* m_{Sz}, *случайной* $\tilde{Z}$ и *интервальной* $[0, m_{Iz} - m_{Sz}]$ составляющих.

19.3. АДДИТИВНАЯ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ

В ряде случаев *оценка* Θ^* может быть представлена *аддитивной моделью*, описываемой суммой измеряемой гиперслучайной величины Θ и гиперслучайной помехи W. При этом смещение ε_g равно математическому ожиданию $m_{w/g}$ случайной помехи W/g, дисперсия погрешности $\sigma^2_{z/g}$ — дисперсии помехи $\sigma^2_{w/g}$, границы смещения ε_i, ε_s — соответственно границам математического ожидания помехи m_{iw}, m_{sw}, а границы дисперсии погрешности σ_{iz}^2, σ_{sz}^2 — соответствующим границам дисперсии помехи σ_{iw}^2, σ_{sw}^2.

Тогда для распределения погрешности типа «*а*» неравенства (19.4) приобретают вид

$$m_{iw} - k\sigma_{iw} < z / g < m_{sw} + k\sigma_{sw},$$

$$\theta^* / \theta, g - m_{sw} - k\sigma_{sw} < \theta / g < \theta^* / \theta, g - m_{iw} + k\sigma_{iw},$$

а для распределения типа «*б*» неравенства (19.5) —

$$m_{iw} - k\sigma_{sw} < z / g < m_{sw} + k\sigma_{iw},$$

$$\theta^* / \theta, g - m_{sw} - k\sigma_{iw} < \theta / g < \theta^* / \theta, g - m_{iw} + k\sigma_{sw}.$$

Границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2), \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2). \tag{19.6}$$

Из выражений (19.6) следует, что в случае аддитивной модели помехи гиперслучайные особенности измеряемой величины не влияют на точность измерения. Существенную роль играют лишь математическое ожидание и дисперсия помехи. При пренебрежимо малой дисперсии $\sigma_{w/g}^2$ $\forall g \in G$ границы среднего квадрата погрешности равны соответствующим границам квадрата математического ожидания помехи m_{iw}^2, m_{sw}^2.

В другом частном случае *оценка* Θ^* может быть представлена *мультипликативной моделью*, описываемой выражением $\Theta^* = (1 + \Xi)\Theta$. При этом погрешность $Z/g = (\Xi / g)(\Theta/g)$, где Ξ, Ξ/g — соответственно гиперслучайная и случайная величины, характеризующие множитель мультипликативной помехи.

Если величины Ξ/g, Θ/g независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ (смещение оценки) равно $m_{\xi/g} m_{\theta/g}$, а дисперсия

$$\sigma_{z/g}^2 = \sigma_{\xi/g}^2 \sigma_{\theta/g}^2 + m_{\xi/g}^2 \sigma_{\theta/g}^2 + \sigma_{\xi/g}^2 m_{\theta/g}^2,$$

где $m_{\xi/g}$, $\sigma_{\xi/g}^2$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия множителя Ξ / g. При этом средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g} = (m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})$, границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}[(m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})],$$

$$\Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}[(m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})],$$

а параметры границ распределения, входящие в неравенства (19.1) и (19.2), описываются следующими выражениями:

$$m_{Sz} = m_{S\xi} m_{S\theta}, \; m_{Iz} = m_{I\xi} m_{I\theta},$$

$$\sigma^2_{Sz} = \sigma^2_{S\xi}\sigma^2_{S\theta} + m^2_{S\xi}\sigma^2_{S\theta} + \sigma^2_{S\xi}m^2_{S\theta}, \; \sigma^2_{Iz} = \sigma^2_{I\xi}\sigma^2_{I\theta} + m^2_{I\xi}\sigma^2_{I\theta} + \sigma^2_{I\xi}m^2_{I\theta},$$

где $m_{S\xi}$, $m_{I\xi}$ — математические ожидания, а $\sigma^2_{S\xi}$, $\sigma^2_{I\xi}$ — дисперсии границ распределения множителя мультипликативной помехи.

Как видно, в данном случае погрешность измерения определяется параметрами двух величин: множителя мультипликативной помехи и измеряемой величины.

19.4. ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

При *косвенных измерениях* значение измеряемой (выходной) величины определяется на основании измерений других (входных) величин. Пусть выходная гиперслучайная величина Θ является известной функцией M входных гиперслучайных величин Y_m $(m = \overline{1,M})$: $\Theta = \varphi(Y_1,\dots,Y_M)$. При этом случайная величина Θ/g является функцией случайных величин Y_m/g $(m = \overline{1,M})$: $\Theta/g = \varphi(Y_1/g_1,\dots,Y_M/g)$, а случайная оценка Θ^*/g — функцией случайных оценок Y^*_m/g $(m = \overline{1,M})$: $\Theta^*/g = \varphi(Y^*_1/g,\dots,Y^*_M/g)$. Тогда в линейном приближении математические ожидания измеряемой величины и ее оценки описываются соответственно выражениями

$$m_{\theta/g} = \varphi(m_{y_1/g},\dots,m_{y_M/g}), \; m_{\theta^*/g} = \varphi(m_{y^*_1/g},\dots,m_{y^*_M/g}),$$

а моменты второго порядка — выражениями

$$\sigma^2_{\theta/g} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l} R_{y_m y_l/g},$$

$$\sigma^2_{\theta^*/g} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_l} R_{y^*_m y^*_l/g},$$

$$R_{\theta^*\theta/g} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l} R_{y^*_m y_l/g},$$

где $m_{y_m/g}$, $m_{y^*_m/g}$ — математические ожидания случайных величин Y_m/g, Y^*_m/g соответственно; $\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}$ — производные функции $\varphi(y_1,...,y_M)$ по y_m соответственно в точках $(y_1,...,y_M) = (m_{y_1/g},...,m_{y_M/g})$ и $(y_1,...,y_M) = (m_{y^*_1/g},...,m_{y^*_M/g})$; $R_{y_m y_l/g}$, $R_{y^*_m y^*_l/g}$, $R_{y^*_m y_l/g}$ — ковариационные моменты соответственно пар величин $(Y_m/g, Y_l/g)$, $(Y^*_m/g, Y^*_l/g)$, $(Y^*_m/g, Y_l/g)$.

Поскольку математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ равно смещению оценки $\varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma^2_{z/g}$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки зависимостью $\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}$, средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}$, равный $m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}$, описывается выражением

$$\Delta^2_{z/g} = [\varphi(m_{y^*_1/g},...,m_{y^*_M/g}) - \varphi(m_{y_1/g},...,m_{y_M/g})]^2 +$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_l} R_{y^*_m y^*_l/g} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l} R_{y_m y_l/g} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y^*_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l} R_{y^*_m y_l/g}\right).$$

Используя это равенство, нетрудно рассчитать границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}\Delta^2_{z/g}, \quad \Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}\Delta^2_{z/g}.$$

Глава 20

ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

20.1. НЕСМЕЩЕННАЯ И СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *несмещенной* (несмещенной при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}$ случайной величины Θ^*/g равно математическому ожиданию $m_{\theta/g}$ условной случайной величины Θ/g, т.е. если $\varepsilon_g = 0 \quad \forall g \in G$. В противном случае оценку будем называть *смещенной*.

Приведенное определение понятия несмещенной оценки для гиперслучайной величины и гиперслучайной оценки согласовано с общепринятым определением этого же понятия для детерминированной величины и случайной оценки [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003], а также для детерминированной величины и гиперслучайной оценки (см. параграф 18.3).

Следует отметить, что если оценка несмещенная, то границы математического ожидания измеряемой величины и ее оценки совпадают $m_{i\theta} = m_{i\theta^*}$, $m_{s\theta} = m_{s\theta^*}$. При этом из факта, что оценка несмещенная, не следует, что обязательно совпадают соответствующие математические ожидания границ (т.е. $m_{S\theta} = m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta} = m_{I\theta^*}$).

Совпадение имеет место лишь в некоторых частных случаях, например, когда оба распределения величин Θ и Θ^* относятся к типу «*а*» или «*б*» согласно классификации параграфа 6.5. В этих двух случаях при несмещенной оценке математические ожидания границ распределения погрешности равны нулю: $m_{Sz} = m_{Iz} = 0$.

Определенный интерес представляет частный случай смещенной оценки — смещенной на фиксированную величину ε_0 $\forall g \in G$. Тогда границы смещения $\varepsilon_i = \varepsilon_s = \varepsilon_0$.

Для детерминированной величины θ и случайной оценки Θ^*, как известно, состоятельной называется оценка, которая сходится по вероятности к величине θ [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003].

Определение состоятельной гиперслучайной оценки Θ^*/θ детерминированной величины θ дано в параграфе 18.3.

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *состоятельной*, если для всех условий $g \in G$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\Theta^*/g - \Theta/g\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \forall g \in G,$$

где N — объем выборки для каждого условия g.

Сходимость по распределению более слабая, чем сходимость по вероятности [Гнеденко, 1988]. Поэтому необходимым условием сходимости гиперслучайной оценки Θ^* к гиперслучайной величине Θ является сходимость функции распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ к функции распределения $F_{\theta/g}(\theta)$.

Частным случаем вводимого понятия является *состоятельная случайная оценка* Θ^* *случайной величины* Θ, определяемая при постоянных и единственных условиях наблюдения следующим образом:

$$\lim_{N\to\infty} P\{\left|\Theta^* - \Theta\right| > \varepsilon\} = 0.$$

Смысл этого выражения понятен. Случайную погрешность $Z = \Theta^* - \Theta$ при объеме выборки N можно рассматривать как параметрическое семейство случайных величин, описываемых функцией распределения $F_{zN}(z)$, зависящей от параметра N. При устремлении N к бесконечности функция распределения $F_{zN}(z)$ приближается к функции единичного скачка $F_{z\infty}(z)$ в точке 0.

Нетрудно убедиться, что гиперслучайная оценка случайной величины, сохраняющая гиперслучайный характер при $N \to \infty$, так же, как и гиперслучайная оценка детерминированной величины, несостоятельна (является гиперслучайной оценкой гиперслучайного типа).

В случае гиперслучайной оценки гиперслучайной величины дело обстоит несколько иначе. Если гиперслучайная оценка Θ^* гиперслучайной величины Θ сохраняет при $N \to \infty$ гиперслучайный характер, то теоретически оценка может быть как состоятельной, так и несостоятельной. Необходимым условием состоятельности оценки является согласованное изменение измеряемой величины и оценки при изменении условий, что практически нереально.

Поэтому, принимая адекватность описания реальных процедур измерения гиперслучайно-гиперслучайными моделями, следует признать, *что все реальные оценки несостоятельны, т.е. являются оценками гиперслучайного типа.*

Отсюда следует фундаментальный вывод: *достичь бесконечно высокой точности измерения реальных величин принципиально нельзя ни при каких условиях, даже при бесконечно большом объеме данных.* Подтверждением этого служат следствия из теорем, доказанных в следующем параграфе.

В заключение настоящего параграфа отметим, что так же, как и в случае детерминированно-гиперслучайной модели измерения, когда границы функции распределения погрешности различаются лишь математическими ожиданиями (см. параграф 18.3), погрешность может быть представлена в виде суммы неопределенной и случайной составляющих, описываемых соответственно интервальной и случайной величинами.

20.2. ЭФФЕКТИВНАЯ И ДОСТАТОЧНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Гиперслучайную оценку Θ_e^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *эффективной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание квадрата отклонения оценки Θ_e^* / g от величины Θ / g по совокупности выборок заданного объема N (т.е. средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2$) не больше, чем для любых других оценок Θ_i^* / g:

$$\Delta_{z_e/g}^2 \le \Delta_{z_i/g}^2, \ i = 1,2,..., \ \forall g \in G, \tag{20.1}$$

где

$$\Delta_{z_e/g}^2 = \mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \Theta / g)^2], \ \Delta_{z_i/g}^2 = \mathrm{M}[(\Theta_i^* / g - \Theta / g)^2].$$

Как и для детерминированно-гиперслучайной модели измерения, мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_i, l_s, определяемые в данном случае как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения от Θ/g эффективной оценки Θ_e^* / g к математическому ожиданию квадрата отклонения от Θ / g рассматриваемой оценки Θ^* / g:

$$l_i = \inf_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \Theta / g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \Theta / g)^2]},$$

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \Theta / g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^* / g - \Theta / g)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. Когда оценка эффективна, $l_i = l_s = 1$.

Границы точности измерения определяются следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условной плотностью вероятностей $f_{\theta/g}(\theta)$. При этом ($N+1$)-мерная условная плотность распределения $f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)$ дважды дифференцируема по θ, производные $\dfrac{\partial f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta}$ и $\dfrac{\partial^2 f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta^2}$ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и θ, а

$$\lim_{\theta\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\theta^*-\theta)f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)\,\mathrm{d}\vec{x}=0\,.$$

Тогда границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2\ge\inf_{g\in G}J_g^{-1},\quad \Delta_{sz}^2\ge\sup_{g\in G}J_g^{-1},\qquad(20.2)$$

где J_g — условная информация по Фишеру, определяемая выражением

$$J_g=\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial\ln f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial\Theta}\right)^2\right]=-\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2\ln f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial\Theta^2}\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на известном неравенстве Крамера—Рао для случайных оценок [Левин, 1976, Ван Трис, 1972, Горбань, 2003].

При выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие неравенства: $\Delta_{z/g}^2\ge J_g^{-1}\quad\forall g\in G$. Отсюда следуют неравенства (20.2).

Для однородной независимой выборки

$$f_{\vec{x},\theta/g}(\vec{x},\theta)=f_{\theta/g}(\theta)\prod_{n=1}^{N}f_{x/\theta,g}(x_n)\,,$$

$$J_g=-\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial^2[\ln f_{\theta/g}(\Theta)+N\ln f_{x/\theta,g}(X)]}{\partial\Theta^2}\right)\right].$$

Если элементы выборки X_n/g представляют собой аддитивную смесь случайной величины Θ/g с дисперсией $\sigma_{\theta/g}^2$ и независимой случайной однородной помехи V/g с математическим ожиданием $m_{v/g}$ и дисперсией $\sigma_{v/g}^2$, то при гауссовском распределении величин Θ / g и X_n / g условная информация по Фишеру $J_g = \dfrac{1}{\sigma^2_{\theta/g}} + \dfrac{N}{\sigma^2_{v/g}}$.

Тогда при $N \to \infty$ имеют место неравенства $\Delta^2_{iz} \geq 0$, $\Delta^2_{sz} \geq 0$.

На основании этого результата может сложиться мнение, что вывод предыдущего параграфа, касающийся предела точности измерения, неверен, что точность измерения может быть неограниченно высокой. В действительности это не так.

Более точные границы точности измерения, определяемые двумя следующими теоремами, вносят необходимую ясность в этот вопрос.

Теорема 2. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / g \in G \right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерной условной плотности распределения $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность распределения абсолютно интегрируема по $\vec{x}$ и дважды дифференцируема по θ. Кроме того, для условной случайной оценки $\Theta^* / \theta, g$ существуют два первых момента. Тогда границы $\bar{\sigma}^2_{i\theta^*}$, $\bar{\sigma}^2_{s\theta^*}$ средней дисперсии $\bar{\sigma}^2_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[\sigma^2_{\theta^*/\Theta,g}]$ дисперсии $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}$ оценки $\Theta^* / \theta, g$ определяются неравенствами

$$\bar{\sigma}^2_{i\theta^*} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right],$$

$$\bar{\sigma}^2_{s\theta^*} \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right], \qquad (20.3)$$

а границы среднего квадрата погрешности — неравенствами

$$\Delta^2_{iz} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g} + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta} \right)^2 J_g^{-1}(\Theta) \right],$$

$$\Delta_{sz}^2 \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right], \tag{20.4}$$

где $\varepsilon_{\theta/g} = (m_{\theta^*/\theta,g} - \theta/g)$ — смещение оценки $\Theta^*/\theta,g$ в условиях g относительно θ/g; $J_g(\theta)$ — информация по Фишеру для случайной оценки $\Theta^*/\theta,g$:

$$J_g(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2}\right].$$

Доказательство теоремы основано на неравенстве Крамера—Рао для случайной оценки детерминированной величины. Для случайной величины $\Theta^*/\theta,g$ при фиксированных величинах θ, g и выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие соотношения для дисперсии $\sigma_{\theta^*/\theta,g}^2$ и среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/\theta,g}^2 = \mathrm{M}[(\Theta^*/\theta,g - \theta/g)^2]$:

$$\sigma_{\theta^*/\theta,g}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\theta/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}(\theta), \quad \Delta_{z/\theta,g}^2 = \varepsilon_{\theta/g}^2 + \sigma_{\theta^*/\theta,g}^2 .$$

Тогда для средней дисперсии $\bar{\sigma}_{\theta^*/g}^2$ и среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/g}^2 = \mathrm{M}[\Delta_{z/\Theta,g}^2]$ имеем

$$\bar{\sigma}_{\theta^*/g}^2 \geq \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$

$$\Delta_{z/g}^2 \geq \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \tag{20.5}$$

Из неравенств (20.5) следуют неравенства (20.3) и (20.4).

Из выражений (20.3) видно, что для обеспечения нулевой средней дисперсии величина $\partial \varepsilon_{\theta/g} / \partial \theta$ для всех θ/g должна быть равной -1. Это означает, что невозможно одновременно обеспечить нулевое среднее смещение и нулевую среднюю дисперсию оценки.

Для однородной независимой выборки

$$J_g(\theta) = -N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{x/\theta,g}(X)}{\partial\theta^2}\right].$$

Тогда при $N \to \infty$ справедливы неравенства

$$\Delta_{iz}^2 \geq \inf_{g\in G} \mathrm{M}[\varepsilon_{\Theta/g}^2], \ \Delta_{sz}^2 \geq \sup_{g\in G} \mathrm{M}[\varepsilon_{\Theta/g}^2].$$

Отсюда следует, что потенциальная точность определяется границами среднего квадрата смещения, а бесконечно высокая точность измерения обеспечивается при бесконечно большом объеме выборки и отсутствии смещения для всех θ и условий $g \in G$.

Статистические условия формирования измеряемой величины и оценки, как правило, меняются асинхронно. Поэтому практически нереально, чтобы обеспечивалось отсутствие смещения для всех условий, а, следовательно, и бесконечно высокая точность измерения.

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки можно ввести другое определение, основанное на неравенствах (20.4): *эффективной гиперслучайной оценкой* Θ_e^* можно назвать оценку Θ^* заданного объема N, для которой границы среднего квадрата погрешности определяются равенствами

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g\in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g}}{\partial\Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g\in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g}}{\partial\Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \qquad (20.6)$$

Отметим, что в общем случае определения (20.1) и (20.6) не эквивалентны.

Теорема 3. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерных плотностей распределения границ $f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{x})$, $f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, эти плотности распределения абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для случайной оценки $\Theta^*/\theta,g$ существуют два первых момента. Тогда *средние дисперсии границ распределения погрешности* $\bar{\sigma}^2_{S\theta^*} = \mathrm{M}[\sigma^2_{\theta^*/\Theta,g_S}]$, $\bar{\sigma}^2_{I\theta^*} = \mathrm{M}[\sigma^2_{\theta^*/\Theta,g_I}]$ описываются неравенствами

$$\bar{\sigma}^2_{S\theta^*} \ge \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial\Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_S}(\Theta)\right],$$

$$\bar{\sigma}^2_{I\theta^*} \ge \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial\Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_I}(\Theta)\right], \qquad (20.7)$$

а *средние относительно границ квадрата погрешности* Δ^2_{Sz} и Δ^2_{Iz} — неравенствами

$$\Delta^2_{Sz} \ge \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g_S} + \left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial\Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_S}(\Theta)\right],$$

$$\Delta^2_{Iz} \ge \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g_I} + \left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial\Theta}\right)^2 J^{-1}_{g_I}(\Theta)\right], \qquad (20.8)$$

где ε_{θ/g_S}, ε_{θ/g_I} — смещения оценки для верхней и нижней границ распределения; $J_{g_S}(\theta)$, $J_{g_I}(\theta)$ — информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{X})}{\partial\theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{X})}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 2. Границы функции распределения гиперслучайной выборки $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X}/g_S$, $\vec{X}/g_I$, соответствующих виртуальным условиям g_S, g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G. Учитывая неравенства (20.5), имеем неравенства (20.7), (20.8).

Для однородной независимой выборки объемом N

$$J_{g_S}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_S}(X)}{\partial\theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_I}(X)}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

Тогда средние относительно границ квадраты погрешности Δ^2_{Sz} и Δ^2_{Iz} при $N \to \infty$ стремятся соответственно к $\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}]$ и $\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]$.

Для невырожденной гиперслучайной оценки Θ^*/θ справедливы неравенства $m_{\theta^*/\theta,g_S} < m_{\theta^*/\theta,g_I}$, $\varepsilon_{\theta/g_S} < \varepsilon_{\theta/g_I}$. С учетом этого $\max\left[\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}], \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]\right] > 0$. Тогда при $N \to \infty$ максимальный средний относительно границ квадрат погрешности больше нуля. Это означает, что точность измерения гиперслучайной величины ограничена.

Следствия теорем 2, 3 дают теоретическое обоснование хорошо известного из практики факта, что *точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.*

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятностей $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1,\ldots,x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины Θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о Θ. Это определение согласовано с известным определением случайной достаточной оценки и гиперслучайной достаточной оценки детерминированной величины.

Если гиперслучайная оценка гиперслучайной величины является эффективной, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

20.3. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ ОЦЕНКА ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим *интервальную гиперслучайную оценку гиперслучайной величины*. Доверительный интервал $[z_1, z_2]$, характеризующий величину гиперслучайной погрешности Z, и предполагаемый интервал $\theta^* / \theta, g - z_2 < \theta / g < \theta^* / \theta, g - z_1$ нахождения измеряемой величины θ/g могут быть рассчитаны, исходя из границ доверительной вероятности.

Пусть

$$\alpha_S = \int_{-\infty}^{z_1} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z\,,\ \alpha_I = \int_{-\infty}^{z_1} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z\,,$$

$$\beta_S = \int_{z_2}^{\infty} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z\,,\ \beta_I = \int_{z_2}^{\infty} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z\,.$$

Тогда $\alpha_I \le P(Z \le z_1 / g) \le \alpha_S$, $\beta_S \le P(Z \ge z_2 / g) \le \beta_I$. Отсюда $\gamma_i \le P(z_1 < Z < z_2 / g) \le \gamma_s$, или

$$\gamma_i \le P(\theta^* - z_2 < \Theta < \theta^* - z_1 / g) \le \gamma_s\,,$$

где γ_i, γ_s — границы доверительной вероятности:

$$\gamma_i = 1 - (\alpha_S + \beta_I)\,,\ \gamma_s = 1 - (\alpha_I + \beta_S)\,. \qquad (20.9)$$

При известных функциях распределения границ погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ границы доверительной вероятности γ_i, γ_s определяют границы доверительного интервала z_1, z_2.

Для гауссовского распределения границ с параметрами (m_{Sz}, σ_{Sz}), (m_{Iz}, σ_{Iz}) расчет границ доверительного интервала состоит в следующем.

Учтем, что

$$\alpha_S = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right),\ \alpha_I = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right),$$

$$\beta_S = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right), \ \beta_I = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция гауссовского распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Тогда из выражения (20.9) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) - \Phi\left(\dfrac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) = \gamma_i, \\ \Phi\left(\dfrac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) - \Phi\left(\dfrac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) = \gamma_s. \end{cases}$$

Искомые границы z_1, z_2 являются решением этой системы.

20.4. КРИТИЧЕСКИЙ ОБЪЕМ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

Объем выборки имеет смысл увеличивать до тех пор, пока это приводит к ощутимому повышению точности измерения. Для гиперслучайных оценок существует *критический объем выборки*, выше которого увеличивать объем обрабатываемых данных оказывается нецелесообразным. В этом отношении гиперслучайные оценки ведут себя подобно интервальным оценкам [Орлов, 2002].

Рассмотрим простой пример. Пусть измеряемая величина Θ, оценка Θ^* и выборка $\vec{X}$ — гиперслучайны. Случайная выборка $\vec{X}/g = \{X_n/g, \quad n = \overline{1, N}\}$, соответствующая условиям $g \in G$, представляет собой аддитивную смесь случайной величины Θ/g с дисперсией $\sigma^2_{\theta/g}$ и случайной однородной помехи, описываемой вектором $\vec{V}/g$, компоненты которого независимы и имеют математические ожидания $m_{v/g}$ и дисперсии $\sigma^2_{v/g}$. Помеха не зависит от измеряемой величины и дисперсия помехи лежит в диапазоне (σ^2_{iv}, σ^2_{sv}). Статистические условия изменяются настолько медленно, что условия формирования выборки можно считать практически постоянными.

Необходимо оценить измеряемую величину θ/g в неизвестных условиях $g \in G$ и точность измерения.

Имея N подряд идущих отсчетов $x_n / \theta, g$, можно сформировать для неизвестных условий $g \in G$ оценку $\theta^* / \theta, g = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n / \theta, g$.

Средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g} = m_v^2 + \frac{\sigma^2_{v/g}}{N}$. Тогда в соответствии с выражением (19.6) эту величину можно оценить следующим неравенством:

$$|\varepsilon|_i^2 + \frac{\sigma^2_{iv}}{N} < \Delta^2_{z/g} < |\varepsilon|_s^2 + \frac{\sigma^2_{sv}}{N}, \tag{20.10}$$

где $|\varepsilon|_i^2 = \inf_{g \in G} m^2_{v/g}$, $|\varepsilon|_s^2 = \sup_{g \in G} m^2_{v/g}$ — квадраты нижней и верхней границ модуля смещения оценки.

При $N \to \infty$ имеем $|\varepsilon|_i^2 < \Delta^2_{z/g} < |\varepsilon|_s^2$.

Используя правую часть неравенства (20.10), можно оценить критический объем N_0 выборки: $N_0 > \frac{10\sigma^2_{sv}}{|\varepsilon|_s^2}$.

Отсюда следует, что с уменьшением верхней границы модуля смещения и с увеличением верхней границы дисперсии помехи σ^2_{sv} граница критического объема выборки возрастает. Если верхняя граница модуля смещения сопоставима с верхней границей среднеквадратического отклонения помехи, критический объем выборки N_0 оказывается в районе всего десяти отсчетов.

Описанные методы применимы для расчета погрешностей измерения различных детерминированных, случайных и гиперслучайных величин, наблюдаемых в неопределенных условиях. Они дают более объективную информацию об исследуемом явлении, чем традиционные методы, предполагающие определенный, например равномерный, закон распределения условий или вообще игнорирующие факт изменения условий.

* * *

Рассмотренные в главах 18—20 гиперслучайные модели измерения физических величин построены в предположении, что выборка $\vec{X}$, оценка Θ^*, а в главах 19, 20 и измеряемая величина Θ адекватно описываются гиперслучайными моделями частного вида, представляемыми множествами случайных величин в одинаковых условиях, т.е. $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / g \in G \right\}$, $\Theta^* = \left\{ \Theta^* / g \in G \right\}$ и $\Theta = \{ \Theta / g \in G \}$.

Более общие гиперслучайные модели измерения учитывают возможность изменения условий в процессе формирования выборки. При этом выборка, оценка и измеряемая величина описываются гиперслучайными моделями общего вида, представляемыми множествами случайных величин в изменяющихся условиях, т.е. $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / \vec{g} \in \vec{G} \right\}$, $\Theta^* = \left\{ \Theta^* / \vec{g} \in \vec{G} \right\}$ и $\Theta = \left\{ \Theta / \vec{g} \in \vec{G} \right\}$.

При использовании гиперслучайных моделей общего вида во всех выражениях глав 18—20, где встречается скалярная величина g, следует проставить вектор $\vec{g}$, а там, где встречается множество G, — множество $\vec{G}$.

Переход к более общим гиперслучайным моделям не привносит ничего нового, поскольку, по сути, просто одно обозначение меняется на другое.

* * *

В заключение глав, посвященных гиперслучайным моделям измерения физических величин, хотелось бы подчеркнуть, что во всех случаях из-за изменений статистических условий наблюдения физических величин реальные оценки носят гиперслучайный характер. Эти оценки не обладают свойством состоятельности. Поэтому рассмотренные гиперслучайные модели более адекватно, чем классическая детерминированно-случайная модель, описывают процедуру измерения. В рамках этих моделей погрешность измерения характеризуется гиперслучайной величиной. Эту погрешность нельзя разложить на систематическую и случайную составляющие. В частном случае (совпадения формы границ функции распределения погрешности) погрешность можно представить суммой трех составляющих: систематической, интервальной и случайной.

Глава 21

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Результаты, полученные для гиперслучайных оценок детерминированных и гиперслучайных величин, обобщены на случай гиперслучайных оценок гиперслучайных функций. Обосновано предположение, что все реальные оценки физических процессов несостоятельны, а точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена.

21.1. ГИПЕРСЛУЧАЙНО-ГИПЕРСЛУЧАЙНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

В предыдущих двух главах не ставилась задача оценки закона изменения во времени измеряемой величины. При постановке такой задачи в рамках гиперслучайных моделей объектом измерения оказывается гиперслучайная функция $\Theta(t)$. Ее оценкой является гиперслучайная функция $\Theta^*(t)$, представляющая собой статистику выборки $X(t)$, где $t \in T$ — время, T — интервал наблюдения.

Гиперслучайные функции $\Theta(t)$, $X(t)$ и $\Theta^*(t)$ можно представить множеством соответствующих случайных функций: $\Theta(t)=\{\Theta(t)/g \in G\}$, $X(t)=\{X(t)/g \in G\}$, $\Theta^*(t)=\{\Theta^*(t)/g \in G\}$. Случайные функции $\Theta(t)/g$, $X(t)/g$, $\Theta^*(t)/g$ могут принимать множество конкретных значений (реализаций) $\{\theta(t)/g\}$, $\{x(t)/g\}$, $\{\theta^*(t)/g\}$. Случайная функция $\Theta^*(t)/g$ может быть представлена множеством условных случайных функций $\{\Theta^*(t)/\theta(t), g\}$.

Случайные функции $\Theta(t)/g$, $X(t)/g$, $\Theta^*(t)/\theta(t), g$, $\Theta^*(t)/g$ и $(\Theta(t),\Theta^*(t))/g$ описываются многомерными условными функциями распределения $F_{\theta/g}(\vec{\theta};\vec{t})$, $F_{x/g}(\vec{x};\vec{t})$, $F_{\theta^*/\theta,g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $F_{\theta^*/g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $F_{\theta^*\theta/g}(\vec{\theta}^*,\vec{\theta};\vec{t}_1,\vec{t}_2)$, многомерными условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\vec{\theta};\vec{t})$, $f_{x/g}(\vec{x};\vec{t})$, $f_{\theta^*/\theta,g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $f_{\theta^*/g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $f_{\theta^*\theta/g}(\vec{\theta}^*,\vec{\theta};\vec{t}_1,\vec{t}_2)$, а также математическими ожиданиями $m_{\theta/g}(t)$, $m_{x/g}(t)$, $m_{\theta^*/\theta,g}(t)$, $m_{\theta^*/g}(t)=\mathrm{M}[m_{\theta^*/\Theta,g}(t)]$, $m_{\theta^*\theta/g}(t)$, дисперсиями $\sigma^2_{\theta/g}(t)$, $\sigma^2_{x/g}(t)$, $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}(t)$, $\sigma^2_{\theta^*/g}(t)$, ковариационным моментом

$$R_{\theta^*\theta/g}(t)=\mathrm{M}\left[\left(\Theta^*(t)/g-m_{\theta^*/g}(t)\right)\left(\Theta(t)/g-m_{\theta/g}(t)\right)\right]$$

и целым рядом других параметров.

Гиперслучайные функции $\Theta(t)$, $\Theta^*(t)/\theta(t)$, $\Theta^*(t)$ характеризуются математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}(t)$, $m_{I\theta}(t)$, $m_{S\theta^*/\theta}(t)$, $m_{I\theta^*/\theta}(t)$, $m_{S\theta^*}(t)$, $m_{I\theta^*}(t)$, дисперсиями границ $\sigma^2_{S\theta}(t)$, $\sigma^2_{I\theta}(t)$, $\sigma^2_{S\theta^*/\theta}(t)$, $\sigma^2_{I\theta^*/\theta}(t)$, $\sigma^2_{S\theta^*}(t)$, $\sigma^2_{I\theta^*}(t)$ и прочими величинами.

Обобщенное представление о случайных функциях $\Theta(t)/g$, $\Theta^*(t)/\theta(t),g$, $\Theta^*(t)/g$ и $(\Theta(t),\Theta^*(t))/g$ на интервале T дают случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g и $(\Theta,\Theta^*)/g$, функции распределения которых $F_{\theta/g}(\theta)$, $F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*)$, $F_{\theta^*/g}(\theta^*)$, $F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta)$ являются усредненными на интервале T функциями распределения соответствующих случайных функций:

$$F_{\theta/g}(\theta)=\overline{F_{\theta/g}(\theta;t)},\quad F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*)=\overline{F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*;t)},$$

$$F_{\theta^*/g}(\theta^*)=\overline{F_{\theta^*/g}(\theta^*;t)},\quad F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta)=\overline{F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta;t,t)},$$

где черта над функцией обозначает усреднение ее по времени t.

Случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g, $(\Theta^*,\Theta)/g$ порождают соответствующие гиперслучайные величины: $\Theta=\{\Theta/g\in G\}$, $\Theta^*/\theta=\{\Theta^*/\theta,g\in G\}$, $\Theta^*=\{\Theta^*/g\in G\}$, $(\Theta^*,\Theta)=\{(\Theta^*,\Theta)/g\in G\}$.

Случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g и $(\Theta,\Theta^*)/g$ описываются моментами, в частности, математическими ожиданиями $m_{\theta/g}=\overline{m_{\theta/g}(t)}$, $m_{\theta^*/\theta,g}=\overline{m_{\theta^*/\theta,g}(t)}$, $m_{\theta^*/g}=\overline{m_{\theta^*/g}(t)}$, $m_{\theta^*\theta/g}=$ $=\overline{m_{\theta^*\theta/g}(t)}$, дисперсиями $\sigma^2_{\theta/g}=\overline{\sigma^2_{\theta/g}(t)}$, $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}=\overline{\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}(t)}$, $\sigma^2_{\theta^*/g}=$ $=\overline{\sigma^2_{\theta^*/g}(t)}$, ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}=\overline{R_{\theta^*\theta/g}(t)}$ и др.

Гиперслучайные величины Θ, Θ^*/θ, Θ^* и (Θ^*,Θ) характеризуются моментами границ: математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}$, $m_{I\theta}$, $m_{S\theta^*/\theta}$, $m_{I\theta^*/\theta}$, $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$, дисперсиями границ $\sigma^2_{S\theta}$, $\sigma^2_{I\theta}$, $\sigma^2_{S\theta^*/\theta}$, $\sigma^2_{I\theta^*/\theta}$, $\sigma^2_{S\theta^*}$, $\sigma^2_{I\theta^*}$ и пр.

Задача измерения гиперслучайной функции $\Theta(t)$ аналогична задаче измерения гиперслучайной величины Θ, рассмотренной в трех предыдущих главах. Однако из-за функциональной зависимости от времени t эта задача оказывается более сложной. Ее можно описать следующим образом. Имеется конкретная выборка $x(t)/\theta(t),g$, соответствующая неизвестной функции $\theta(t)$ и неизвестным условиям $g\in G$, а также априорная информация о параметрах и характеристиках оценки и измеряемой функции. Необходимо вычислить оценку $\theta^*(t)/\theta(t),g$ и оценить точность измерения.

21.2. ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Погрешность измерения в условиях $g\in G$ описывается случайной функцией $Z(t)/g=\Theta^*(t)/g-\Theta(t)/g$ или случайной величиной $Z/g=\Theta^*/g-\Theta/g$. Близость случайной оценки $\Theta^*(t)/g$ к измеряемой функции $\Theta(t)/g$ можно охарактеризовать в каждый момент времени t функцией распределения $F_{z/g}(z;t)$ функции $Z(t)/g$ или средним квадратом погрешности

$$\Delta^2_{z/g}(t)=\mathrm{M}\left[\left(\Theta^*(t)/g-\Theta(t)/g\right)^2\right], \tag{21.1}$$

а близость случайной величины Θ^*/g к случайной величине Θ/g — функцией распределения $F_{z/g}(z)$ случайной величины Z/g или величиной

$$\Delta^2_{z/g} = \mathrm{M}\left[\left(\Theta^*/g - \Theta/g\right)^2\right]. \qquad (21.2)$$

Выражения (21.1), (21.2) могут быть представлены следующим образом:

$$\Delta^2_{z/g}(t) = m^2_{z/g}(t) + \sigma^2_{z/g}(t)\,,\ \Delta^2_{z/g} = m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}\,,$$

где $m_{z/g}(t) = \varepsilon_g(t) = m_{\theta^*/g}(t) - m_{\theta/g}(t)$ — смещение оценки, $\sigma^2_{z/g}(t) = \sigma^2_{\theta^*/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)$ — дисперсия оценки, $m_{z/g} = \varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ — смещение усредненной оценки, $\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}$ — дисперсия усредненной оценки.

В неопределенных условиях в каждый момент времени t точность измерения характеризуют границы функции распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$ случайной функции $Z(t)/g$ и функции

$$\Delta_{Sz}(t) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z;t)\mathrm{d}z}\,,\ \Delta_{Iz}(t) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z;t)\mathrm{d}z}\,, \qquad (21.3)$$

а на интервале времени T — границы функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ случайной величины Z/g и величины

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z)\mathrm{d}z}\,,\ \Delta_{Iz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z)\mathrm{d}z}\,, \qquad (21.4)$$

где $f_{Sz}(z;t)$, $f_{Iz}(z;t)$, $f_{Sz}(z)$, $f_{Iz}(z)$ — плотности распределения границ, соответствующие функциям распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$, $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$.

Функции $\Delta_{Sz}(t)$, $\Delta_{Iz}(t)$ характеризуют динамику изменения границ погрешности с течением времени, а величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} — значения границ усредненной погрешности на рассматриваемом интервале.

Функции $\Delta_{Sz}(t)$, $\Delta_{Iz}(t)$ определяются математическими ожиданиями $m_{Sz}(t)$, $m_{Iz}(t)$ границ функции распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$ и среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{Sz}(t)$,

$\sigma_{Iz}(t)$, а величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} — математическими ожиданиями m_{Sz}, m_{Iz} границ функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ и среднеквадратическими отклонениями границ σ_{Sz}, σ_{Iz}:

$$\Delta_{Sz}(t)=\sqrt{m_{Sz}^2(t)+\sigma_{Sz}^2(t)}\ ,\ \Delta_{Iz}(t)=\sqrt{m_{Iz}^2(t)+\sigma_{Iz}^2(t)}\ ,$$

$$\Delta_{Sz}=\sqrt{m_{Sz}^2+\sigma_{Sz}^2}\ ,\ \Delta_{Iz}=\sqrt{m_{Iz}^2+\sigma_{Iz}^2}\ .$$

Погрешность конкретного измерения $z(t)/g$ в неизвестных условиях g можно оценить неравенством

$$m_{Sz}(t)-k\sigma_{Sz}(t)<z(t)/g<m_{Iz}(t)+k\sigma_{Iz}(t)\ , \tag{21.5}$$

а среднюю погрешность на интервале T — неравенством

$$m_{Sz}-k\sigma_{Sz}<z/g<m_{Iz}+k\sigma_{Iz}\ . \tag{21.6}$$

Интервал нахождения измеряемой функции $\theta(t)/g$ при наличии оценки $\theta^*(t)/\theta(t),g$ описывается неравенствами

$$\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{Iz}(t)-k\sigma_{Iz}(t)<\theta(t)/g<$$

$$<\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{Sz}(t)+k\sigma_{Sz}(t), \tag{21.7}$$

$$\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{Iz}-k\sigma_{Iz}<\theta(t)/g<\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{Sz}+k\sigma_{Sz}\ , \tag{21.8}$$

где k — некоторая константа, определяемая степенью доверия к результату измерения.

В неравенствах (21.7), (21.8), как и в случае оценки гиперслучайной величины, учитывается различие дисперсий границ распределения, что существенно при значительном их отличии. Неравенства (21.6) и (21.8) дают обобщенное представление об оценке на рассматриваемом интервале, а неравенства (21.5) и (21.7), отслеживающие специфические особенности сечений, — более подробное описание.

Если для всех $t\in T$ условные функции распределения погрешности $Z(t)/g$ $\forall g\in G$ не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}(t)$ ее условные дисперсии $\sigma_{z/g}^2(t)$ увеличиваются (тип распределения «*a*» по классификации параграфа 6.3) или уменьшаются (тип распределения «*б*»), то интервалы (21.5), (21.7) характеризуются границами математического ожидания погрешности $m_{iz}(t)$, $m_{sz}(t)$ и границами дисперсии $\sigma_{iz}^2(t)$, $\sigma_{sz}^2(t)$, определяемыми следующим образом:

$$m_{iz}(t) = \inf_{g \in G} m_{z/g}(t) = \inf_{g \in G} \varepsilon_g(t) = \varepsilon_i(t),$$

$$m_{sz}(t) = \sup_{g \in G} m_{z/g}(t) = \sup_{g \in G} \varepsilon_g(t) = \varepsilon_s(t),$$

$$\sigma_{iz}^2(t) = \inf_{g \in G} \sigma_{z/g}^2(t) = \inf_{g \in G} [\sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)],$$

$$\sigma_{sz}^2(t) = \sup_{g \in G} \sigma_{z/g}^2(t) = \sup_{g \in G} [\sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)]. \quad (21.9)$$

Для распределения типа «*а*» неравенства (21.5), (21.7) имеют соответственно вид

$$\varepsilon_i(t) - k\sigma_{iz}(t) < z(t)/g < \varepsilon_s(t) + k\sigma_{sz}(t),$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s(t) - k\sigma_{sz}(t) < \theta(t)/g <$$

$$< \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i(t) + k\sigma_{iz}(t), \quad (21.10)$$

а для распределения типа «*б*» —

$$\varepsilon_i(t) - k\sigma_{sz}(t) < z(t)/g < \varepsilon_s(t) + k\sigma_{iz}(t),$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s(t) - k\sigma_{iz}(t) < \theta(t)/g <$$

$$< \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i(t) + k\sigma_{sz}(t). \quad (21.11)$$

Аналогично, если условные функции распределения усредненной погрешности Z/g $\forall g \in G$ не пересекаются и с возрастанием условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}$ ее условные дисперсии $\sigma_{z/g}^2$ увеличиваются (тип распределения «*а*») или уменьшаются (тип распределения «*б*»), то интервалы (21.6), (21.8) характеризуются границами смещения ε_i, ε_s и границами среднеквадратического отклонения погрешности σ_{iz}, σ_{sz}. При этом для распределения типа «*а*» неравенства (21.6), (21.8) имеют вид

$$\varepsilon_i - k\sigma_{iz} < z(t)/g < \varepsilon_s + k\sigma_{sz},$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s - k\sigma_{sz} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i + k\sigma_{iz}, \quad (21.12)$$

а для распределения типа «*б*» —

$$\varepsilon_i - k\sigma_{sz} < z(t)/g < \varepsilon_s + k\sigma_{iz},$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s - k\sigma_{iz} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i + k\sigma_{sz}. \quad (21.13)$$

Границы среднего квадрата погрешности $\Delta_{iz}^2(t)$, $\Delta_{sz}^2(t)$ определяются смещением оценки $\varepsilon_g(t)$, дисперсиями оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2(t)$ и измеряемой величины $\sigma_{\theta/g}^2(t)$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}(t)$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta_{iz}^2(t) = \inf_{g\in G} \Delta_{z/g}^2(t) = \inf_{g\in G}[\varepsilon_g^2(t) + \sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)],$$

$$\Delta_{sz}^2(t) = \sup_{g\in G} \Delta_{z/g}^2(t) = \sup_{g\in G}[\varepsilon_g^2(t) + \sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)].$$

Аналогично границы среднего квадрата усредненной погрешности Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 определяются смещением оценки ε_g, дисперсиями оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$ и измеряемой величины $\sigma_{\theta/g}^2$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g\in G} \Delta_{z/g}^2 = \inf_{g\in G}(\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}),$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g\in G} \Delta_{z/g}^2 = \sup_{g\in G}(\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}).$$

21.3. АДДИТИВНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ

Если оценка $\Theta^*(t)$ описывается *аддитивной моделью* в виде суммы измеряемой гиперслучайной величины $\Theta(t)$ и гиперслучайной помехи $W(t)$, то смещение $\varepsilon_g(t)$ равно математическому ожиданию $m_{w/g}(t)$ случайной помехи $W(t)/g$, дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2(t)$ — дисперсии помехи $\sigma_{w/g}^2(t)$, границы смещения $\varepsilon_i(t)$,

$\varepsilon_s(t)$ — соответственно границам математического ожидания помехи $m_{iw}(t)$, $m_{sw}(t)$, а границы дисперсии погрешности $\sigma_{iz}^2(t)$, $\sigma_{sz}^2(t)$ — соответствующим границам дисперсии помехи $\sigma_{iw}^2(t)$, $\sigma_{sw}^2(t)$.

Тогда для распределения погрешности типа «*а*» неравенства (21.10) приобретают вид

$$m_{iw}(t) - k\sigma_{iw}(t) < z(t)/g < m_{sw}(t) + k\sigma_{sw}(t),$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - m_{sw}(t) - k\sigma_{sw}(t) < \theta(t)/g <$$

$$< \theta^*(t)/\theta(t), g - m_{iw}(t) + k\sigma_{iw}(t),$$

а для распределения типа «*б*» неравенства (21.11) —

$$m_{iw}(t) - k\sigma_{sw}(t) < z(t)/g < m_{sw}(t) + k\sigma_{iw}(t),$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - m_{sw}(t) - k\sigma_{iw}(t) < \theta(t)/g <$$

$$< \theta^*(t)/\theta(t), g - m_{iw}(t) + k\sigma_{sw}(t).$$

Границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2(t) = \inf_{g\in G}(m_{w/g}^2(t) + \sigma_{w/g}^2(t)),$$

$$\Delta_{sz}^2(t) = \sup_{g\in G}(m_{w/g}^2(t) + \sigma_{w/g}^2(t)). \qquad (21.14)$$

Смещение ε_g равно математическому ожиданию $m_{w/g}$ случайной усредненной помехи W/g, соответствующей случайной функции $W(t)/g$, дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ — дисперсии помехи $\sigma_{w/g}^2$, границы смещения ε_i, ε_s — соответственно границам математического ожидания помехи m_{iw}, m_{sw}, а границы дисперсии погрешности σ_{iz}^2, σ_{sz}^2 — соответствующим границам дисперсии помехи σ_{iw}^2, σ_{sw}^2.

Тогда неравенства (21.12) и (21.13) для распределений типа «*а*» и «*б*» можно представить соответственно как

$$m_{iw} - k\sigma_{iw} < z/g < m_{sw} + k\sigma_{sw},$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - m_{sw} - k\sigma_{sw} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - m_{iw} + k\sigma_{iw}$$

и

$$m_{iw} - k\sigma_{sw} < z/g < m_{sw} + k\sigma_{iw},$$

$$\theta^*(t)/\theta(t), g - m_{sw} - k\sigma_{iw} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - m_{iw} + k\sigma_{sw},$$

а границы усредненного среднего квадрата погрешности — как

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g\in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2), \quad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g\in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2). \qquad (21.15)$$

Из выражений (21.14) и (21.15) следует, что в случае аддитивной модели помехи гиперслучайные особенности измеряемой функции не влияют на точность измерения. Существенную роль играют лишь математическое ожидание и дисперсия помехи. При пренебрежимо малой дисперсии $\sigma_{w/g}^2(t)$ $\forall g \in G$ границы $\Delta_{iz}^2(t)$, $\Delta_{sz}^2(t)$ определяются границами квадрата математического ожидания помехи $m_{iw}^2(t)$, $m_{sw}^2(t)$, а границы усредненного среднего квадрата погрешности Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 — границами квадрата математического ожидания усредненной помехи m_{iw}^2, m_{sw}^2.

21.4. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ

В другом частном случае *оценка* $\Theta^*(t)$ может быть представлена *мультипликативной моделью*, описываемой выражением $\Theta^*(t) = (1+\Xi(t))\Theta(t)$. При этом погрешность $Z(t)/g = (\Xi(t)/g)(\Theta(t)/g)$, где $\Xi(t)$, $\Xi(t)/g$ — соответственно гиперслучайная и случайная функции, характеризующие множитель мультипликативной помехи.

Если функции $\Xi(t)/g$, $\Theta(t)/g$ независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}(t)$ (смещение оценки) равно $m_{\xi/g}(t)m_{\theta/g}(t)$, а дисперсия погрешности

$$\sigma_{z/g}^2(t) = \sigma_{\xi/g}^2(t)\sigma_{\theta/g}^2(t) + m_{\xi/g}^2(t)\sigma_{\theta/g}^2(t) + \sigma_{\xi/g}^2(t)m_{\theta/g}^2(t),$$

где $m_{\xi/g}(t)$, $\sigma_{\xi/g}^2(t)$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия множителя $\Xi(t)/g$. При этом средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}(t) = \left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)$, границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz}(t) = \inf_{g\in G}\left[\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)\right],$$

$$\Delta^2_{sz}(t) = \sup_{g\in G}\left[\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)\right], \qquad (21.16)$$

а параметры границ распределения погрешности описываются следующими выражениями:

$$m_{Sz}(t) = m_{S\xi}(t) m_{S\theta}(t)\,,$$

$$m_{Iz}(t) = m_{I\xi}(t) m_{I\theta}(t)\,,$$

$$\sigma^2_{Sz}(t) = \sigma^2_{S\xi}(t)\sigma^2_{S\theta}(t) + m^2_{S\xi}(t)\sigma^2_{S\theta}(t) + \sigma^2_{S\xi}(t) m^2_{S\theta}(t)\,,$$

$$\sigma^2_{Iz}(t) = \sigma^2_{I\xi}(t)\sigma^2_{I\theta}(t) + m^2_{I\xi}(t)\sigma^2_{I\theta}(t) + \sigma^2_{I\xi}(t) m^2_{I\theta}(t)\,,$$

где $m_{S\xi}(t)$, $m_{I\xi}(t)$ — математические ожидания, а $\sigma^2_{S\xi}(t)$, $\sigma^2_{I\xi}(t)$ — дисперсии границ распределения множителя мультипликативной помехи.

Если функции $\Xi(t)/g$, $\Theta(t)/g$ независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ равно $\overline{m_{\xi/g}(t) m_{\theta/g}(t)}$, а дисперсия

$$\sigma^2_{z/g} = \overline{\sigma^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t)} + \overline{m^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t)} + \overline{\sigma^2_{\xi/g}(t) m^2_{\theta/g}(t)}\,.$$

При этом средний квадрат усредненной погрешности $\Delta^2_{z/g} = \overline{\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)}$, границы среднего квадрата усредненной погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}\left[\overline{\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)}\right],$$

$$\Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}\left[\overline{\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)}\right], \qquad (21.17)$$

а параметры границ распределения усредненной погрешности описываются выражениями

$$m_{Sz} = \overline{m_{S\xi}(t) m_{S\theta}(t)}\,,$$

$$m_{Iz} = \overline{m_{I\xi}(t) m_{I\theta}(t)}\,,$$

$$\sigma_{Sz}^2 = \overline{\sigma_{S\xi}^2(t)\sigma_{S\theta}^2(t)} + \overline{m_{S\xi}^2(t)\sigma_{S\theta}^2(t)} + \overline{\sigma_{S\xi}^2(t) m_{S\theta}^2(t)}\,,$$

$$\sigma_{Iz}^2 = \overline{\sigma_{I\xi}^2(t)\sigma_{I\theta}^2(t)} + \overline{m_{I\xi}^2(t)\sigma_{I\theta}^2(t)} + \overline{\sigma_{I\xi}^2(t) m_{I\theta}^2(t)}\,.$$

Из выражений (21.16), (21.17) видно, что в случае мультипликативной помехи погрешность измерения определяется математическими ожиданиями и дисперсиями как множителя мультипликативной помехи, так и измеряемой функции. Этим она существенно отличается от погрешности в случае аддитивной помехи.

21.5. ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

По аналогии с гиперслучайными оценками гиперслучайных величин для гиперслучайных оценок гиперслучайных функций можно ввести понятия несмещенных, состоятельных, эффективных и достаточных оценок.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ будем называть *несмещенной* (несмещенной при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}(t)$ случайной функции $\Theta^*(t)/g$ равно математическому ожиданию $m_{\theta/g}(t)$ условной случайной функции $\Theta(t)/g$, т.е. если $\varepsilon_g(t) = 0 \quad \forall g \in G$. В противном случае оценку будем называть *смещенной*.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ можно назвать *состоятельной*, если для всех условий $g \in G$ и всех $t \in T$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \forall g \in G, \quad t \in T\,,$$

где N — объем выборки для каждого условия g.

Приведенные определения понятий несмещенной оценки и состоятельной оценки для гиперслучайной функции согласованы с определениями этих же понятий для детерминированной величины и случайной оценки, для детерминированной величины и гиперслучайной оценки, а также гиперслучайной величины и гиперслучайной оценки.

Если оценка несмещенная, то границы математического ожидания измеряемой функции и границы математического ожидания оценки совпадают: $m_{i\theta}(t) = m_{i\theta^*}(t)$, $m_{s\theta}(t) = m_{s\theta^*}(t)$. При этом из факта, что оценка несмещенная, не следует, что обязательно совпадают соответствующие математические ожидания границ (т.е. $m_{S\theta}(t) = m_{S\theta^*}(t)$, $m_{I\theta}(t) = m_{I\theta^*}(t)$).

Нетрудно убедиться, что гиперслучайная оценка случайной функции, сохраняющая гиперслучайный характер при $N \to \infty$, подобно гиперслучайной оценке детерминированной величины, а также гиперслучайной оценке случайной величины, несостоятельна.

Если гиперслучайная оценка $\Theta^*(t)$ гиперслучайной функции $\Theta(t)$ сохраняет гиперслучайный характер при $N \to \infty$, то теоретически оценка может быть состоятельной. Такая возможность имеет место, когда для всех условий $g \in G$ и всех $t \in T$ при $N \to \infty$ смещение оценки отсутствует. Такое требование на практике никогда не выполняется.

Поэтому *все реальные оценки физических процессов оказываются несостоятельными. Это означает, что точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена, причем даже при неограниченном объеме данных.*

Гиперслучайную оценку $\Theta_e^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ можно называть *эффективной,* если для всех условий $g \in G$ и всех $t \in T$ математическое ожидание квадрата отклонения оценки $\Theta_e^*(t)/g$ от величины $\Theta(t)/g$ по совокупности выборок заданного объема N (т.е. средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}(t)$) не больше, чем для любых других оценок $\Theta_i^*(t)/g$:

$$\Delta^2_{z_e/g}(t) \le \Delta^2_{z_i/g}(t), \quad i = 1,2,..., \quad \forall g \in G, \qquad (21.18)$$

где
$$\Delta^2_{z_e/g}(t) = \mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2],$$
$$\Delta^2_{z_i/g}(t) = \mathrm{M}[(\Theta_i^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2].$$

Мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_i, l_s, определяемые как границы отношения усредненного по времени математического ожидания квадрата отклонения от $\Theta(t)/g$ эффективной оценки $\Theta_e^*(t)/g$ к усредненному по времени математическому ожиданию квадрата отклонения от $\Theta(t)/g$ рассматриваемой оценки $\Theta^*(t)/g$:

$$l_i = \inf_{g \in G} \frac{\overline{\mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}{\overline{\mathrm{M}[(\Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}},$$

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\overline{\mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}{\overline{\mathrm{M}[(\Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. Когда оценка эффективна, $l_i = l_s = 1$.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ можно называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если гиперслучайные оценки гиперслучайных величин, соответствующие всем $t \in T$, являются достаточными.

Если гиперслучайная оценка гиперслучайной функции является эффективной, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

УЧЕНЫЕ О ФЕНОМЕНЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В физическом мире нет места идеальным явлениям так же, как в идеальном мире математических абстракций — реальным явлениям. Это осознавали еще мыслители древности [Пенроуз, 2007]. Физический мир и математический мир — разные миры. В них могут присутствовать похожие элементы, но не идентичные.

Физический феномен статистической устойчивости не является исключением. Используемое в теории вероятностей понятие статистической устойчивости частоты, под которым понимается абсолютная статистическая устойчивость — сходимость частоты к определенному пределу (вероятности), описывает физический феномен лишь приближенно.

Ниже приведены высказывания известных ученых, касающиеся статистической устойчивости, в которых прослеживается мысль об отсутствии в реальном мире абсолютной статистической устойчивости или не столь категоричное утверждение, что в реальном мире может не быть абсолютной статистической устойчивости.

1. Авторы известного справочника по математике [Корн, Корн, 1977, с. 607] пишут: «Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом. Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема выборки (физический закон больших чисел)».

2. А.А. Марков отмечает [Марков, 1924, с. 67]: «Из теоремы Бернулли обыкновенно заключают, что при беспредельном возрастании числа испытаний отношение числа появлений события к числу испытаний приближается к вероятности события при отдельных испытаниях. Подобное заключение нельзя, однако, признать безусловно правильным не только для тех случаев, когда условия теоремы Бернулли не выполнимы, но и для тех слу-

чаев, к которым эта теорема вполне применима. Условия теоремы Бернулли состоят в независимости испытаний и в постоянстве величины вероятности события. При этих условиях теорема Бернулли обнаруживает невероятность значительных отклонений отношения m/n от p при больших n. Но она не устраняет окончательно возможности таких отклонений; и эти невероятные отклонения могут оказаться действительными».

3. Основоположник современной аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоров в статье 1983 г. пишет [Колмогоров, 1986]: «Говоря о случайности в обыденном смысле этого слова, мы имеем ввиду те явления, в которых мы не обнаруживаем закономерностей, позволяющих нам предсказывать их поведение. Вообще нет причин предполагать, что случайные в этом смысле явления подчиняются каким-то вероятностным законам. Следовательно, нужно различать случайность в этом широком смысле и стохастическую случайность (которая является предметом теории вероятностей)».

4. В работе [Математика, ее содержание, методы и значение, 1956, с. 274, 275] А.Н. Колмогоров отмечает: «Допущение о вероятном характере испытаний, т.е. о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о «случайности» какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу $\frac{\mu}{n} \to p$ не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией».

5. А.Н. Колмогоров в своей фундаментальной работе «Основные понятия теории вероятностей» [Колмогоров, 1974, с. 12—14] пишет: «При известных условиях, в которые мы здесь не будем глубже вдаваться, можно предположить, что некоторым событиям A, которые могут наступить или же не наступить после осуществления условий σ, поставлены в соответствие определенные действительные числа $P(A)$, обладающие следующими свойствами:

А. Можно быть практически уверенным, что если комплекс условий σ будет повторяться большое число n раз и если через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий σ событие A не будет иметь места...

Примечание 1. Из практической достоверности двух утверждений следует практическая достоверность утверждения об их одновременной правильности, хотя степень достоверности при этом несколько понижается. Если, однако, число утверждений очень велико, то из практической достоверности каждого отдельного из этих утверждений вообще нельзя вывести никаких заключений относительно одновременной правильности всех этих утверждений. Поэтому из принципа А никоим образом не следует, что при очень большом числе серий по n испытаний в каждой серии отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от $P(A)$».

6. Эмиль Борель [Борель, 1961, с. 28, 29] так объясняет возможность нарушения статистической устойчивости частоты: «Если при очень большом числе испытаний эта частота не стремится к пределу, а более или менее колеблется между различными пределами, то надо утверждать, что вероятность p не остается постоянной, а изменяется в ходе испытаний. Это имеет место, например, для людской смертности в течение веков, так как успехи медицины и гигиены имеют своим следствием увеличение средней продолжительности жизни. Стало быть, вероятность p для родившегося ребенка достичь возраста 60 лет имеет тенденцию к росту. Эта эмпирическая точка зрения вполне приемлема для статистика, изучающего демографические явления, так как здесь мы должны, за неимением других научных средств для предвидения, ограничиться использованием бесчисленных наблюдений».

7. А.В. Скороход в предисловии к монографии [Иваненко, Лабковский, 1990] пишет: «Наиболее полно разработано понятие неопределенности, использующее вероятностную случайность... Замечу, что предположение, что некоторая последовательность, скажем чисел, получена независимыми наблюдениями некоторой случайной величины (неважно, известно или нет ее распре-

деление), накладывает на эту последовательность весьма жесткие ограничения, которые вряд ли выполняются во многих реальных явлениях».

8. В.Н. Тутубалин в своей книге [Тутубалин (2), 1972, с. 6, 7] отмечает: «Научная добросовестность требует от каждого исследователя применения доступных методов проверки статистической устойчивости, но наличие ее редко можно вполне гарантировать». Далее он очерчивает область применения классической теории вероятностей: «Все мыслимые эксперименты можно разделить на три группы. К первой группе относятся хорошие эксперименты, в которых обеспечивается полная устойчивость исхода опытов. Ко второй группе относятся эксперименты похуже, где полной устойчивости нет, но есть статистическая устойчивость. К третьей группе относятся совсем плохие эксперименты, когда нет и статистической устойчивости. В первой группе все ясно без теории вероятностей, в третьей группе она бесполезна. Вторая группа составляет настоящую сферу применения теории вероятностей, но мы вряд ли когда-нибудь можем быть вполне уверены, что интересующий нас эксперимент относится ко второй, а не к третьей группе».

9. Андре Анго в книге для электро- и радиоинженеров [Анго, 1967, с. 620] обращает внимание читателей на проблему ограниченной точности измерений, тесно связанной с проблемой статистической устойчивости, и дает следующие рекомендации: «Казалось бы, что, увеличивая число измерений, можно до бесконечности увеличивать точность. Однако, если теоретически можно получить еще одну значащую цифру, перейдя от одного единственного измерения к 100 измерениям, или от группы в 10 измерений к 1000 измерениям, то практически получение такого выигрыша весьма сомнительно. Действительно, следует опасаться, что при тысячном измерении измеряемая физическая величина будет уже не совсем та, что вначале. Другими словами, в условиях опыта могут иметь место небольшие изменения, которые воздействуют на результат неслучайным образом (так называемое «сползание центра рассеивания»). Это более чем вероятно, так как серия в 1000 измерений должна продолжаться значительное время. Поэтому не принято делать большие серии измерений и число n редко бывает больше 10. Все сказанное хорошо согласуется с простым здравым смыслом. Лучше усовершенствовать экспериментальный

метод, чем увеличивать число измерений; 10 хороших измерений полезнее, чем 1000 посредственных».

* * *

Ограничение точности измерений обусловлено многими причинами, среди которых следует выделить, прежде всего, изменчивость объекта измерения, изменчивость параметров и характеристик помех, а также изменчивость параметров и характеристик средств измерения. Эти и другие причины вызывают нарушение статистической устойчивости.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Гипотеза абсолютной статистической устойчивости физических явлений, породившая в свое время классическую теорию вероятностей и математическую статистику, не находит экспериментального подтверждения. Все указывает на то, что в реальном мире имеет место не абсолютная, а ограниченная статистическая устойчивость.

Поиск адекватных средств описания реальных физических событий, величин, процессов и полей с учетом нарушений статистической устойчивости привел к новой физико-математической теории гиперслучайных явлений, предлагающей новый взгляд на окружающий мир и новые пути его познания.

Первоочередные области применения новой теории, очевидно, связаны с теми разделами науки и техники, в которых классическая теория вероятностей и математическая статистика уже завоевали уверенные позиции. Прежде всего, это теория измерений, метрология, радиотехника, связь, статистическая физика, квантовая механика и др.

* * *

Все гипотезы и теории имеют ограниченный срок жизни. Невозможно заранее предвидеть, в какой мере они будут востребованы. Истинная ценность научных результатов раскрывается в ходе испытаний временем. Хотелось бы надеяться, что теория гиперслучайных явлений займет достойное место в системе человеческих знаний и позволит сделать очередной шаг в познании окружающего мира.

СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Операторы

$\mathrm{D}[X]$	— дисперсия случайной величины X
$\mathrm{D}_I[X]$, $\mathrm{D}_S[X]$	— дисперсии нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X
$\mathrm{M}[X]$	— математическое ожидание случайной величины X
$\mathrm{M}_i[X]$, $\mathrm{M}_s[X]$	— нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X
$\mathrm{M}_I[X]$, $\mathrm{M}_S[X]$	— математические ожидания нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X
$\mathrm{M}_0[X]$	— усредненное математическое ожидание границ распределения гиперслучайной величины X
$\bar{\mathrm{M}}_T[X(t)]$	— среднее по t на интервале T гиперслучайной функции $X(t)$
$P\{A\}$	— вероятность выполнения условия A
$P(A)$	— вероятность события A
$P_I(A)$, $P_S(A)$	— нижняя и верхняя границы вероятности события A

Специальные математические знаки

inf, sup	— нижняя и верхняя границы
$\lim\limits_{N\to\infty} X_N$	— сходимость гиперслучайной величины X_N с вероятностью единица (почти наверное)
$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N$	— сходимость гиперслучайной величины X_N в среднеквадратическом
rect$[x]$	— П-образная функция
sign$[x]$	— функция единичного скачка
$\{X\}$	— множество X
$\forall$	— для всех
$\bigcup$	— логическое сложение
$\bigcap$	— логическое умножение
$\varnothing$	— пустое множество
θ^*	— оценка величины θ
$(x_1,\ldots,x_N)$	— вектор с компонентами $x_1,\ldots,x_N$
$\{X_1,\ldots,X_N\}$	— множество или упорядоченное множество с элементами $X_1,\ldots,X_N$

Функции

D_{ix}, D_{sx}	—	нижняя и верхняя границы дисперсии гиперслучайной величины X
D_{Ix}, D_{Sx}	—	дисперсии нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$f(x)$	—	плотность распределения случайной величины X
$f(x/g)$ или $f_{x/g}(x)$	—	плотность распределения гиперслучайной величины X в условиях g
$f_I(x)$, $f_S(x)$	—	плотности распределения нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$f_0(x)$	—	среднее плотностей распределения границ гиперслучайной величины X
$F(x)$	—	функция распределения величины X
$F_I(x)$, $F_S(x)$	—	нижняя и верхняя границы функции распределения гиперслучайной величины X
$F(x/g)$ или $F_{x/g}(x)$	—	условная функция распределения гиперслучайной величины X в условиях g
$F(x/m, D)$	—	гауссовская функция распределения с математическим ожиданием m и дисперсией D
$\Delta F(x)$	—	разность границ функции распределения гиперслучайной величины
$F_0(x)$	—	среднее границ функции распределения гиперслучайной величины X
$K_{ix}(t_1,t_2)$, $K_{sx}(t_1,t_2)$	—	нижняя и верхняя границы корреляционной функции гиперслучайной функции $X(t)$
$K_{Ix}(t_1,t_2)$, $K_{Sx}(t_1,t_2)$	—	корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$K_{Ixy}(t_1,t_2)$, $K_{Sxy}(t_1,t_2)$	—	взаимные корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
m_{ix}, m_{sx}	—	нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X
m_{Ix}, m_{Sx}	—	математические ожидания нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$m_{i\,\nu_1\ldots\nu_L}$, $m_{s\,\nu_1\ldots\nu_L}$	—	нижняя и верхняя границы начальных моментов порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$m_{I\,\nu_1\ldots\nu_L}$, $m_{S\,\nu_1\ldots\nu_L}$	—	начальные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$Q(j\omega_x)$	—	характеристическая функция случайной величины X

$Q(\mathrm{j}\omega_x / g)$	—	условная характеристическая функция гиперслучайной величины X в условиях g
$Q_I(\mathrm{j}\omega_x)$, $Q_S(\mathrm{j}\omega_x)$	—	характеристическая функция нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X
$Q_0(\mathrm{j}\omega_x)$	—	среднее характеристических функций распределения границ гиперслучайной величины X
$r_{ix}(t_1, t_2)$, $r_{sx}(t_1, t_2)$	—	нижняя и верхняя нормированные границы ковариационной функции гиперслучайной функции $X(t)$
$r_{Ix}(t_1, t_2)$, $r_{Sx}(t_1, t_2)$	—	нормированные ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$R_{Ix}(t_1, t_2)$, $R_{Sx}(t_1, t_2)$	—	ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$S_{ixx}(f)$, $S_{sxx}(f)$	—	нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности гиперслучайной функции $X(t)$
$S_{Ixx}(f)$, $S_{Sxx}(f)$	—	спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$
$\dot{S}_{Ixy}(f)$, $\dot{S}_{Sxy}(f)$	—	взаимные спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
δ	—	дельта-функция
$\gamma^2_{ixy}(f)$, $\gamma^2_{sxy}(f)$	—	нижняя и верхняя границы функции частотной когерентности гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
$\gamma^2_{Ixy}(f)$, $\gamma^2_{Sxy}(f)$	—	функции частотной когерентности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$
$\mu_{i\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{s\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	нижняя и верхняя границы центральных моментов порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$\mu_{I\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{S\,\nu_1 \ldots \nu_L}$	—	центральные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора
$\Phi(x)$	—	гауссовская функция распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуличев В.А., Безответных В.В., Каменев С.И., Кузьмин Е.В., Моргунов Ю.Н., Нужденко А.В.* Акустическая томография динамических процессов водной среды в шельфовой зоне Японского моря // ДАН. — 2001. — Т. 381, № 2. — С. 243—246.

2. *Акуличев В.А., Безответных В.В., Каменев С.И., Леонтьев А.П., Моргунов Ю.Н.* Акустические дистанционные измерения течений на шельфе Японского моря // Акустический журнал. — 2004. — Т. 50. — С. 581—584.

3. *Акустика* океана / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 318 с.

4. *Акустика* океана / Под ред. Л. М. Бреховских, И.А. Андреевой. — М.: Наука, 1982. — 247 с.

5. *Акустика* океана / Под ред. Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1974. — 693 с.

6. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 356 с.

7. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. — М.: Знание, 1980. — 64 с.

8. *Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.* Является ли вероятность «нормальной» физической величиной // Успехи физических наук. — 1992. — Т. 162, № 7. — С. 149—182.

9. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967. — 779 с.

10. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физических наук. — Т. 175, № 2. — 2005. — С. 163—179.

11. *Бернулли Я.* О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986. — 176 с.

12. *Бернштейн С.Н.* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщения Харьковского математического общества. — 1917. — № 15. — С. 209—274.

13. *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. — М.—Л.: Гос. изд-во, 1927. — 367 с.

14. *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. — Гостехиздат, 1946. — 410 с.

15. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

16. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. — М.: Наука, 1961. — 120 с.

17. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 432 с.

18. *Бочарников В.П.* Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике. — СПб: Наука, 2001. — 328 с.

19. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. — М.: Физматгиз, 1960. — 395 с.

20. *Бриллюэн Л.* Научная неопределенность и информация. — М.: Мир, 1960. — 395 с.

21. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2003. — 399 с.

22. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. — М.: Советское радио, 1972. — Т. 1. — 743 с.; 1975. — Т. 2. — 343 с.; 1977. — Т. 3. — 662 с.

23. *Венцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

24. *Вероятность* и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

25. *Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.* Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. — 1990. — Т. 56, № 7. — С. 76—81.

26. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. — М.: МЭИ — София: Техника, 1989. — 224 с.

27. *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира: птолемеевой и коперниковой. — М.—Л., 1948. — 147 с.

28. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. — М.: Мир, 1984. — С. 188—218.

29. *Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П.А.М.* Современная квантовая механика. Три нобелевских доклада. — Л.—М.: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1934. — 76 с.

30. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 567 с.

31. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Выща шк., 1979. — 408 с.

32. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.—Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. — 264 с.

33. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. — 406 с.

34. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. — 448 с.

35. *Горбань І.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. — К.: ІПММС НАН України, 2003. — 245 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/ index.html).

36. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления и их описание // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 1—2. — С. 16—27.

37. *Горбань И.И.* Методы описания гиперслучайных величин и функций // Акустический вестник. — 2005. — Т. 8, № 3. — С. 24—33.

38. *Горбань И.И.* Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2005. — № 3. — С. 41—48.

39. *Горбань И.И.* Гиперслучайные функции и их описание // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. — № 1. — С. 3—15.

40. *Горбань І.І.* Математичний опис фізичних явищ у статистично нестабільних умовах // Стандартизація, сертифікація, якість. — 2006. — № 6. — С. 26—33.

41. *Горбань И.И.* Оценки характеристик гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 1. — С. 40—48.

42. *Горбань И.И.* Стационарные и эргодические гиперслучайные функции // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2006. — № 6. — С. 54—70.

43. *Горбань И.И.* Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин // Математические машины и системы. — 2006. — № 2. — С. 3—14.

44. *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений. — К.: ИПММС НАН Украины, 2007. — 184 с. (http://ifsc.ualr.edu/jdberleant/intprob/, http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

45. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления: определение и описание // Proceedings of XIII-th International conference KDS. — Sofia, Bulgaria, 2007. — P. 137—147.

46. *Горбань И.И.* Представление физических явлений гиперслучайными моделями // Математические машины и системы. — 2007. — № 1. — С. 34—41.

47. *Горбань И.И.* Измерение величин в статистически неопределенных условиях // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2008. — № 8. — С. 3—22.

48. *Горбань И.И.* Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 135—141.

49. *Горбань И.И.* Гиперслучайные марковские модели // Proceedings of XIII-th International conference KDS-2. — Sofia — Uzhgorod, Bulgaria — Ukraine, 2008. — P. 233—242.

50. *Горбань И.И.* Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях. — К.: Наук. думка, 2008. — 272 с. (http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).

51. *Горбань И.И.* Гипотеза гиперслучайного устройства мира и возможности познания // Математические машины и системы. — 2009. — № 3. — С. 44—66.

52. *Горбань И.И.* Закон больших чисел для гиперслучайной выборки // Proceedings of XIV-th International conference KDS-2. Book 15. — Sofia — Kiev, Bulgaria — Ukraine, 2009. — P. 251—257.

53. *Горбань И.И.* Описание физических явлений гиперслучайными моделями // Труды пятой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР ’2009». — К., 2009. — С. 5—9.

54. *Горбань И.И.* Нарушение статистической устойчивости физических процессов // Математические машины и системы. — 2010. — № 1. — С. 171—184.

55. *Горбань И.И.* Исследование нарушений статистической устойчивости курса валют // Труды пятой конференции «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС ’2010». — К., 2010. — С. 84—86.

56. *Горбань И.И.* Преобразования гиперслучайных величин и процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — № 2. — С. 3—15.

57. *Горбань И.И.* Статистическая неустойчивость магнитного поля Земли // Труды шестой дистанционной конференции «Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР ’2010». — К., 2010. — С. 189—192.

58. *Горбань И.И.* Физико-математическая теория гиперслучайных явлений с общесистемных позиций // Математические машины и системы. — 2010. — № 2. — С. 3—9.

59. *Горбань И.И.* Эффект статистической неустойчивости в гидрофизике // Труды десятой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». — СПб: Наука, 2010. — С. 199—201.

60. *ГОСТ Р 51317.3.3–99* (МЭК 61000-3-3–94). Совместимость технических средств электромагнитная. Колебания напряжения и фликер, вызываемые техническими средствами с потребляемым током не более 16 А (в одной фазе), подключаемыми к низковольтным системам электроснабжения. Нормы и методы испытаний. — М.: Госстандарт России, 1999. — 20 с.

61. *Гринченко В.Т., Маципура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. — К.: Наук. думка, 2005. — 263 с.

62. *Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т.* Основи акустики. — К.: Наук. думка, 2007. — 640 с.

63. *Гусев В.Г.* Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации. — Л.: Судостроение, 1988. — 264 с.

64. *Данные* о вариации индукции магнитного поля в районе Москвы. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН. — http://forecast.izmiran.rssi.ru/bankr.htm.

65. *Добронец Б.С.* Интервальная математика. — Красноярск: Красноярский гос. университет, 2004. — 219 с.

66. *Донченко В.* Множественные модели неопределенности: эмпирический и математический аспекты // Algorithmic and Mathematical Foundations of the Artificial Intelligence. International Book Series. Number 1 ITHEA, Sofia, Bulgaria. — 2008. — P. 127—134.

67. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 287 с.

68. *Дыхне А.М., Снарский А.А., Женировский М.И.* Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC-цепочках // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 1174, № 8. — С. 887—894.

69. *Единая* государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ. Данные Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. — http://ias.ocean.ru/esimo.

70. *Жук С.Я.* Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайными параметрами. — К.: НТУУ «КПИ», 2008. — 232 с.

71. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 168 с.

72. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решения. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с.

73. *Ильичев В.И., Калюжный А.Я., Красный Л.Г., Лапий В.Ю.* Статистическая теория обнаружения гидроакустических сигналов. — М.: Наука, 1992. — 415 с.

74. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 222 с.

75. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработки наблюдений // Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701—709.

76. *Карнап Р.* Филосовские основания физики. Введение в философию науки. — П.: Прогресс, 1971. — 390 с.

77. *Клименко В.П., Ляхов О.Л.* Інтелектуалізація розв'язання складних прикладних задач методами комп'ютерної алгебри. — К.: ІПММС НАН України, 2009. — 293 с.

78. *Клюшин Д.А., Петунин Ю.И.* Доказательная медицина. — К.: Диалектика-Вильямс, 2007. — 320 с.

79. *Клячкин В.И.* Вероятностные задачи статистической гидроакустики. Ч. 1. Гранично-контактные задачи. — СПб: Наука, 2007. — 629 с.

80. *Кнопов П.С., Голодников А.Н., Пепеляев В.А.* Оценивание параметров надежности при наличии неполной первичной информации // Компьютерная математика. — 2003. — № 1. — С. 36—37.

81. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. — К.: Наук. думка, 1981. — 151 с.

82. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М.* Случайные процессы: Справочник. — К.: Наук. думка, 1983. — 366 с.

83. *Коваленко И. Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая шк., 1973. — 368 с.

84. *Колмогоров А.Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды коммунистической академии. Математика. — 1929. — С. 8—21.

85. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: ОНТИ, 1936. — 175 с.; 1974. — 119 с.

86. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей // Математика, ее методы и значение. — М., 1956. — Т. 2. — С. 252—284.

87. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — 232 с.

88. *Колмогоров А.Н.* О логических основаниях теории вероятностей // Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. — С. 467—471.

89. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 831 с.

90. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985. — 637 с.

91. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. — К.: Либідь, 1993. — 136 с.

92. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

93. *Кравцов Ю.А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. — 1989. — Т. 158, № 1. — С. 93—122.

94. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

95. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 348 с.

96. *Кузьмичев В.Е.* Законы и формулы физики. Справочник. — К.: Наук. думка, 1989. — 862 с.

97. *Кузнецов В.П.* Интервальные статистические модели. — М.: Радио и связь, 1991. — 348 с.

98. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.

99. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 261 с.

100. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. — М.: Мир, 1985. — 519 с.

101. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — Т. 1. — 552 с.; 1976. — Т. 2. — 285 с.

102. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 454 с.

103. *Левин В.И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. — 1998. — № 6. — Эл. версия на Федеральном портале «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. 5 мая 2005. www.techno.edu.ru.

104. *Леман Е.* Проверка статистических гипотез / Пер. с англ. Ю.В. Прохорова. — М.: Наука, 1971. — 375 с.

105. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 150 с.

106. *Лоэв М.* Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962. — 720 с.

107. *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. — М., 1924.

108. *Математическое* моделирование. — http://ru.wikipedia.org/wiki/.

109. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. — М.: Сов. радио, 1962. — Т. 2. — 832 с.

110. *Мизес Р.* Вероятность и статистика. — М. — Л., 1930. — 250 с.

111. *Мир* философии. Ч. 1. Исходные философские проблемы, понятия и принципы. — М.: Изд-во политической литературы, 1991. — 672 с.

112. *Морозов А.А., Косолапов В.Л.* Інформаційно-аналітичні технології підтримки прийняття рішень на основі регіонального соціально-економічного моніторингу. — К.: Наук. думка, 2002. — 230 с.

113. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.* Вероятность. — М.: Мир, 1969. — 433 с.

114. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с.

115. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1. — 464 с.; 1987. — Т. 2. — 359 с.

116. *Ожегов С.И.* Словарь русского языка. — М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1960. — 900 с.

117. *Ольшевский В.В.* Статистические методы в гидролокации. — Л.: Судостроение, 1973. — 201 с.

118. *Ольшевский В.В.* Статистические свойства морской реверберации. — М.: Наука, 1966. — 202 с.

119. *Орлов А.И.* Эконометрика. — М.: Экзамен, 2002. — 576 с.

120. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 672 с.

121. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 112 с.

122. *О теории* вероятностей и математической статистике. Переписка А.А. Маркова и А.А. Чупрова. — М.: Наука, 1977. — 199 с.

123. *Пайерлс Р.* Построение физических моделей // УФН. — 1983, № 6. — С. 315—332.

124. *Пенроуз Р.* Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Полный путеводитель. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 912 с.

125. *Петровский В.С.* Нестационарные задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1988. — 264 с.

126. *Планк М.* Единство физической картины мира. — М.: Наука, 1966. — 282 с.

127. *Полканов К.И., Лоскутова Г.В.* Пространственно-частотные и частотно-волновые методы описания и обработки гидроакустических полей. — СПб.: Наука, 2007. — 348 с.

128. *Полников В.Г.* Нелинейная теория случайного поля волн на воде. — Изд. группа URSS, 2007. — 408 с.

129. *Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М.* Марковские процессы. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — ВИНИТИ, 1989. — 248 с.

130. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. — Книжный дом «Либроком», 2009. — 232 с.

131. *Проблемы* акустики океана / Отв. ред. Л.М. Бреховских. — М.: Наука, 1984. — 222 с.

132. *Проблемы* Гильберта / Сб. под общ. ред. П.С. Александрова. — М.: Наука, 1969. — 238 с.

133. *Пространственно*-временная обработка сигналов / Под. ред. И.Я. Кремера. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.

134. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967. — 494 с.

135. *Пуанкаре А.* Теория вероятностей (1912). — Ижевск, 1999. — 282 с.

136. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

137. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. — 883 с.

138. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979. — 469 с.

139. *Распространение* звука в флюктуирующем океане / Пер. с англ. под ред. Л.М. Бреховских. — М.: Мир, 1982. — 336 с.

140. *Резник А.М.* О структуре оптимального приемника для обнаружения локального источника сигнала в поле шумовой помехи // Радиотехника и электроника. — 1965. — № 6. — С. 979—986.

141. *Резник А.М.* О шумовом поле внутри сферы конечного радиуса, создаваемом слоем простых источников, расположенных на ее поверхности // Акустический журнал. — 1965. — Т. XI, № 1. — С. 79—83.

142. *Різник О.М.* Загальна модель розвитку // Математичні машини і системи. — 2005. — № 1. — С. 84—98.

143. *Резник А.М.* О природе интеллекта // Математические машины и системы. — 2008. — № 1. — С. 23—45.

144. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. — 432 с.

145. *Рыжиков А.В., Барсуков Ю.В.* Системы и средства обработки сигналов в гидроакустике. — СПб: ЛЭТИ, 2007. — 328 с.

146. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2: Случайные поля. — 464 с.

147. *Руководство* по выражению неопределенности измерений. — СПб: ГП «ВНИИМ» им. Д.И. Менделеева, 1999. — 126 с.

148. *Свешников А.А.* Основы теории ошибок. — Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1972. — 125 с.

149. *Скороход А.В.* Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1989. — № 43. — С. 5—145.

150. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.

151. *Скучик Е.* Основы акустики / Пер. с англ. под ред. Л.М. Лямшева. — М.: Мир, 1976. — Т. 1. — 520 с.; 1976. — Т. 2. — 542 с.

152. *Словник* з дистанційного зондування Землі / За ред. В.І. Лялько і М.О. Попова. — К.: СМП «АВЕРС», 2004. — 170 с.

153. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978. — 320 с.

154. *Степин В.С.* Теоретическое знание. — М.: Наука, 1999. — 472 с.

155. *Стрельников В.П., Федухин А.В.* Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. — К.: Логос, 2002. — 486 с.

156. *Теория* обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

157. *Теслер Г.С.* Новая кибернетики. — К.: Логос, 2004. — 404 с.

158. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.

159. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей в естествознании. — М.: Знание, 1972. — 48 с.

160. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. — 230 с.

161. *Тутубалин В.Н.* Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента // Успехи физических наук. — 1993. — Т. 163, № 7. — С. 93—109.

162. *Тюрин Н.И.* Введение в метрологию. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 279 с.

163. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ, 2010. — 154 с.

164. *Фалькович С.Е.* Оценка параметров сигналов. — М.: Сов. радио, 1970. — 336 с.

165. *Фейнман Р.* Характер физических законов. — М.: Наука, 1987. — 160 с.

166. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 498 с.; 1967. — Т. 2. — 752 с.

167. *Флатте К.* Распространение звука в флуктуирующем океане / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 336 с.

168. *Фундаментальные* физические константы. — http://physics.nist.gov/constants.

169. *Хинчин А.Я.* Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. — 1929. — № 9. — С. 141—166.

170. *Хинчин А.Я.* Математические основания статистической механики. — М.: Гостехиздат, 1941. — 117 с.

171. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. — 1961, № 1. — С. 91—102; № 2. — С. 77—89.

172. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

173. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984. — 303 с.

174. *Чайковский Ю.В.* О природе случайности. — М.: Центр системных исследований—Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. — 280 с.

175. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975. — 165 с.

176. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. — XYZ: Институт вычислительных технологий, 2010. — 597 с. (http://www.nsc.ru/interval).

177. *Шейнин О.Б.* Теория вероятностей. Исторический очерк. —http://www.sheynin.de.

178. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972. — 352 с.

179. *Ширяев А.Н.* Вероятность и концепция случайности: к 75-летию выхода в свет монографии А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». — 2009. — 92 с.

180. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 574 с.

181. *Шишлянникова В.Н., Шишлянникова С.Н.* Численные и графические методы. — Рига: РИИГВФ, 1963. — 314 с.

182. *Шлезингер М.И., Главач В.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. — К.: Наук. думка, 2004. — 545 с.

183. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.

184. *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. — М.: Наука, 1976. — 422 с.

185. *Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 263 с.

186. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. — М.: Наука, 1968. — 940 с.

187. *Ярощук И.О., Попов Г.В.* Статистическое моделирование распространения волн во флуктуирующих средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 156 с.

188. *Ярощук И.О., Гулин О.Э.* Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. — Владивосток: Дальнаука, 2002. — 351 с.

189. *Batyrshin I., Kacprzyk J., Sheremetov L., Zadeh L.A.* Perception-based Data Mining and Decision Making in Economics and Finance // Studies in Computational Intelligence. — 2007. — Vol. 36. — P. 55—83.

190. *Bernoulli J.* The art of conjecturing. — 1713.

191. *Bohlmann G.* Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung inihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici. — Roma, 6—11 Aprile 1908. — Vol. III, Secione 11b.

192. *Borel E.* Sur les probabilities denombrables et leurs applications arithmetiques // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909. — N 26. — P. 247—271.

193. *Crownover R.M.* Introduction to fractals and chaos. — Boston — London: Jones and Bartlett Pub., Inc., 1995. — 195 p.

194. *Ferson S., Kreinovich V., Ginzburg L., Myers D.S., Sentz K.* Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures / SAND report SAND2002-4015. — 2003. — 143 p.

195. *FOREX.* — http://www.forexite.com.
196. *Gorban I.I.* New approach in optimization of space-time signal processing in hydroacoustics // Course notes to the Tutorial on the conference «Ocean'98». — France, IEEE, 1998. — 69 p.
197. *Gorban I.I.* Space-time signal processing algorithms for moving antenna // IEEE «Ocean'98». Conference Proceedings. — 1998. — Vol. 3. — P. 1613—1617.
198. *Gorban I.I.* Space-time signal processing for moving antennae // Elsevier, Advances in Engineering Software. — 2000. — Vol. 31. — P. 119—125.
199. *Gorban I.I.* Mobile Sonar Systems: Optimization of Space-Time Signal Processing. — Kiev: Nauk. dumka, 2008. — 240 p.
200. *Gorban I.I.* Hyper-random phenomena: definition and description // Information Theories and Applications. — 2008. — Vol. 15, N 3. — P. 203—211.
201. *Gorban I.I.* Cognition Horizon and the Theory of Hyper-random Phenomena // International Journal of Information Theories and Applications. — 2009. — Vol. 16, N 1. — P. 5—24.
202. *Gorban I.I.* Disturbance of statistical stability // Information Models of Knowledge. — Kiev — Sofia: ITHEA. — 2010. — P. 398—410.
203. *Graunt J.* Natural and political observations made upon the bills of mortality (1662). — Baltimore. — 1939.
204. *Gray R.M.* Probability, Random Processes and Ergodic Properties. — Springer Verlag, 1987. — 209 p.
205. *Hagan M.T., Demuth H.B., and Beale M.H.* Neural network design. — Boston, MA: PWS Publishing, 1996. — 345 p.
206. *Halpern J.Y.* Reasoning about uncertainty. — MIT Press, 2003. — 497 p.
207. *International* standard ISO 3534-1:2006 (E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. — 2006. — 105 p.
208. *Keller J.B.* The probability of heads // Am. Math. Monthly. — 1986. — Vol. 93. — P. 191.
209. *Kolmogorov A.N.* On logical foundations of probability // Lect. Notes. Math. — 1983. — N 1021. — P. 1—5.
210. *Kreinovich V.* Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics // Reliable Computing. — 1995. — Vol. 1, N 1. — P. 33—40.
211. *Kreinovich V., Berleant D.J., Ferson S. and Lodwick W.A.* Combining interval and probabilistic uncertainty: foundations, algorithms, challenges. — An Overview «Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks, and Genetic Algorithms FNG'05». — Tijuana, Mexico, 2005. — P. 1—10.
212. *Kyburg H.E.* Interval-valued probabilities // Imprecise Probabilities Project. — 1998—2000. — http://ippserv.rug.ac.be/.
213. *Lomnicki A.* Nouveaux fondements du calcul des probabilities // Fund. Math. — 1923. — Vol. 4. — P. 34—71.
214. *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.* Bounding approaches to system identification. — New York: Plenum Press, 1996. — 248 p.
215. *Mises R.* Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. — 1919. — Z. 5. — P. 52—99.
216. *Mises R.* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. — Wien, 1928.
217. *Mises R.* Mathematical theory of probability and statistics / Edited and complemented by H. Geiringer. — N.Y. and London: Acad. Press, 1964. — 232 p.

218. *Moor R.E.* Interval analyses. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966. — 159 p.

219. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 255 p.

220. *Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu.* Turbulence, ideal / Encyclopedia of Nonlinear Science. — N. Y. and London, 2005. — P. 955—957.

221. *Shary S.P.* A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable computing. — 2002. — N 8. — P. 321—418.

222. *Sunaga T.* Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. — 1958. — Vol. 2, Misc. II. — P. 547—564.

223. *Walley P.* Statistical reasoning with imprecise probabilities. — N.Y.: Chapman and Hall, 1991. — 706 p.

224. *Zadeh L.A. and Kacprzyk J.* Fuzzy logic for the management of uncertainty. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1992. — 256 p.

• *Публикации конца 2010—2011 гг.* •

225. *Горбань И.И.* Статистическая неустойчивость физических процессов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011 (в печати).

226. *Зіньковський Ю.Ф., Уваров Б.М.* Гіпервипадковість функціональних характеристик радіоелектронних апаратів // Вісник ЖДТУ. — 2010. — № 1. — С. 96—103.

227. *Зіньковський Ю.Ф., Уваров Б.М.* Радіоелектронна аппаратура як об'єкт теорії гіпервипадкових явищ // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 100—108.

228. *Зиньковский Ю.Ф., Уваров Б.М.* Гиперслучайность алгоритмов моделирования современной радиоэлектронной аппаратуры // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — № 3. — С. 39—46.

229. *Уваров Б.М.* Гіпервипадкові функціональні характеристики радіоелектронних засобів // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 40. — С. 113—121.

230. *Уваров Б.М.* Методы представления характеристик радиоэлектронной аппаратуры на основе теории гиперслучайных явлений // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2010. — № 10. — С. 35—42.

231. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Гіпервипадкові характеристики теплових процесів у пристроях радіоелектронної апаратури // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. — 2010. — № 41. — С. 103—108.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аксиома адекватности 42
– – гиперслучайная 199

В

Вектор среднего дисперсий границ гиперслучайного вектора 112
– – математических ожиданий границ гиперслучайного вектора 112
– – – – – функции 112
– – среднеквадратических отклонений границ гиперслучайного вектора 112
– условных дисперсий 104
– – – комплексных 117
– – математических ожиданий 104
– – среднеквадратических отклонений 104
– – – – комплексных 117
величина гиперслучайная векторная 103
– – непрерывная 96
– – скалярная 91
– интервальная 95
– случайная 45, 91
– – условная 92
– хаотическая 95
величины гиперслучайные векторные независимые при всех условиях 105
– – – независимые 109
– – некоррелированные 111
– – – при всех условиях 114, 116
– – – комплексные 116
– – ортогональные 112
– – – при всех условиях 115, 116
– – – комплексные 116
выборка гиперслучайная гиперслучайной величины 207
– из генеральной совокупности гиперслучайной величины 207
– неоднородная 46, 207
– однородная 46, 207
выборочная совокупность гиперслучайной величины 207
выборочные значения генеральной совокупности гиперслучайной величины 207

Г

Генеральная совокупность гиперслучайной величины 206
гипотеза адекватного описания реальных явлений непрерывными дифференцируемыми функциями 42
– адекватного описания реальных явлений случайными (стохастическими) моделями 42, 47
– адекватности модели 42
– гиперслучайности 200
– непрерывности физического мира 42
– ограниченной статистической устойчивости 199
– случайного характера мира 42
– статистической устойчивости (стабильности) 45

– – – реальных физических явлений 47
– – – частоты 45
– существования предела частоты 46
граница вероятности 86
– – верхняя 86
– – нижняя 86
– взаимного энергетического спектра гиперслучайных функций 160
– взаимной ковариационной функции реализаций эргодических гиперслучайных функций 166
– – корреляционной функции реализаций эргодических гиперслучайных функций 166
– дисперсии 100
– – векторной гиперслучайной величины 113
– – – – – комплексной 118
– – скалярной гиперслучайной величины 100
– – вещественной гиперслучайной функции 128
– – комплексной гиперслучайной функции 138
– доверительной вероятности 245
– ковариационной функции гиперслучайной функции 129
– – – реализаций эргодической гиперслучайной функции 165
– комплексного математического ожидания гиперслучайного вектора 117
– – – – комплексной векторной функции 118
– – среднеквадратического отклонения 119
– комплексной дисперсии 118
– корреляционной функции гиперслучайной функции 129
– – – реализаций эргодической гиперслучайной функции 165
– коэффициента корреляции 114
– математического ожидания векторной функции 113
– – – – гиперслучайной величины 113
– – – вещественной гиперслучайной функции 128
– – – комплексного вектора 117
– – – комплексной гиперслучайной функции 137
– – – – функции 137
– – – скалярной гиперслучайной величины 100
– – – функции гиперслучайной величины 100
– – – – – функции 128
– момента 100
– – ковариационного 114
– – – комплексной гиперслучайной величины 117
– – корреляционного 114
– – – комплексной гиперслучайной величины 116
– – начального 100, 114, 128
– – центрального 100, 114, 129
– плотности распределения 99
– смешанного начального момента второго порядка векторной гиперслучайной величины 114
– – центрального момента второго порядка 114
– среднего квадрата погрешности 237
– – реализаций эргодической гиперслучайной функции 165
– среднеквадратического отклонения векторной гиперслучайной величины 114
– – – – – – комплексной 119
– – – скалярной гиперслучайной величины 100
– условной функции распределения векторной гиперслучайной величины 108
– функции распределения векторной гиперслучайной величины 106
– – – гиперслучайной функции 123
– – – – – векторной 131

– – – скалярной гиперслучайной величины 94
– – частотной когерентности гиперслучайных функций 161
– энергетического спектра гиперслучайной функции 159

Д

Дисперсия границы векторной гиперслучайной функции 132
– – гиперслучайного вектора 110
– – гиперслучайной величины 98
– – – функции 126
– условная 93, 123

З

Закон больших чисел для последовательности гиперслучайных величин 220
– – – – – – – усиленный 222
– – – – – случайных величин 217
– – – – – – событий 216
– – – – – – явлений 216
– – – усиленный 218
закономерность 28
знание 31
значения выборочные (реализации) 207
– комплексной гиперслучайной функции некоррелированные 134
– – – – ортогональные 134
зона неопределенности 94

И

Измерение косвенное 255
интеграл гиперслучайной функции 145
интервал доверительный 245
информация по Фишеру 242

К

Классификация 28
ковариационная функция границы векторной гиперслучайной функции нормированная 133
– – – гиперслучайной функции 127, 132
– – – – – нормированная 127, 133
– – – комплексной гиперслучайной функции 134
– – – комплексных гиперслучайных функций взаимная 135
– – – – – – нормированная 136
компоненты векторной гиперслучайной функции независимые в совокупности 132
концепция гиперслучайного устройства мира 202
– погрешности 38
– неопределенности 38
– устройства мира на случайных принципах 47
корреляционная функция границы векторной гиперслучайной функции 133
– – – комплексной гиперслучайной функции 134
– – – комплексных гиперслучайных функций взаимная 135
– – – гиперслучайной функции 127
– – мгновенного спектра гиперслучайной функции условная 159
коэффициент диффузии 111
– корреляции границы 111
– – условный 105
– сноса 172

М

Математическое ожидание границы векторной гиперслучайной функции 132
– – – – функции гиперслучайного вектора 110
– – – гиперслучайного вектора 110
– – – гиперслучайной величины 98
– – – – функции 126
– – – функции 97, 125

– – условное 93
– – – функции векторной 104
– – – – гиперслучайной 123
метрика (расстояние) 35
мировоззрение 32
модель 28
– адекватная 37
– детерминированная 52
– измерения гиперслучайно-гиперслучайная 235, 247
– – детерминированно-гиперслучайная 234
– – детерминированно-интервальная 235
– – детерминированно-случайная 234
– – случайно-гиперслучайная 234
– – случайно-случайная 234
– колебания гармонического 56
– математическая 30
– недетерминированная (неопределенная) 52
– неформализованная 28
– оценки 32
– – аддитивная 253, 277
– – мультипликативная 254, 279
– – неформализованная 29
– физическая 30
– шума белого гауссовского 56
момент границы ковариационный 111
– – – комплексной гиперслучайной величины 116
– – корреляционный 111
– – – комплексной гиперслучайной величины 116
– – начальный 99, 111
– – распределения 97
– – центральный 99, 111
– условный ковариационный 105, 123
– – – комплексной гиперслучайной величины 115
– – корреляционный 105, 123
– – – комплексной гиперслучайной величины 115
– – начальный 104
– – центральный 105
мультиинтервал 225

Н

Неопределенность измерения 38
– по типу A 40
– по типу B 40
неравенство Крамера–Рао 242

О

Объект подобный 28
объем выборки критический 268
однородность 150
оператор 138
– гиперслучайный 139
отображение 138
отсчеты вещественной гиперслучайной функции некоррелированные при всех условиях 129
– – – – ортогональные при всех условиях 129
оценка 32
– адекватная 37
– гиперслучайная гиперслучайной величины 247
– – – – достаточная 266
– – – – интервальная 250, 267
– – – – несмещенная 257
– – – – смещенная 257
– – – – состоятельная 258
– – – – точечная 250
– – – – эффективная 260, 264
– – гиперслучайной функции 271
– – – – достаточная 283
– – – – несмещенная 281
– – – – смещенная 281
– – – – состоятельная 281
– – – – эффективная 282
– – детерминированной величины 236
– – – – достаточная 244
– – – – интервальная 244
– – – – несмещенная 237
– – – – смещенная 237

– – – – состоятельная 239
– – – – точечная 236
– – – – эффективная 241
– гиперслучайного типа 239
– модели 32
– случайная состоятельная случайной величины 258
– случайного типа 239

П

Параметр статистической неустойчивости 65, 67
– выборочного среднего 65, 67
– среднего математических ожиданий 66, 67
плотность вероятностей условная гиперслучайной величины 103
– – – случайной величины 92
– распределения границы гиперслучайной величины 96
– – – – – векторной 106
– – – – – скалярной 96
– – – – – условная 108
– – – – функции 123
– – – – – векторной 131
погрешность измерения 37
– – гиперслучайная 236, 250, 273
– – интервальная 240, 253
– – неопределенная (статистически непрогнозируемая) 240, 253
– – систематическая 38, 236, 253
– – случайная 38, 236, 253
познание 33
поле гиперслучайное 121
последовательность статистически неустойчивая (нестабильная) 54
– – устойчивая (стабильная) 53
преобразование 138
прогноз статистический абсолютно точный 47
производная гиперслучайной функции 145
пространство метрическое 35
– значений случайной величины 91
– состояний (фазовое) 120, 138
процесс гиперслучайный 121
– – винеровский (чисто диффузионный) 175
– – марковский 170
– – – гауссовский 175
– – – диффузионный 173
– – – – однородный во времени 173
– статистически неустойчивый (нестабильный) 54
– – устойчивый (стабильный) 54

Р

Расстояние (метрика) 35
реализация гиперслучайного функционала 138
– гиперслучайной функции 120
ряд вариационный (статистический) 208
– ранжированный 208

С

Сечение 122, 138
сечения гиперслучайной функции независимые 125
– – – – в совокупности 125
– – – некоррелированные 127
– – – ортогональные 127
система закрытая 200
– открытая 200
систематизация 28
событие гиперслучайное 85
– – независимое 89
– – – при всех условиях 89
– случайное 45
совокупность генеральная гиперслучайной величины 206
– выборочная 207
спектр гиперслучайной функции мгновенный 158
– границ энергетический 155
– мощности гиперслучайной функции условный 159

– – гиперслучайных функций условный взаимный 160
спектральная плотность мощности границы 155
спектральные плотности мощности границ взаимные 157
среднее границ функции распределения гиперслучайного вектора 109
– – – – скалярной гиперслучайной величины 97
– дисперсии границ распределения погрешности 265
– дисперсий границ гиперслучайной величины 99
– значение функции 166
– ковариационных моментов границ 113
– корреляционных моментов границ 113
– математических ожиданий границ гиперслучайной величины 99
– – – – функции 99
– начальных моментов границ гиперслучайного вектора 112
– относительно границы квадрата погрешности 265
– плотностей распределения границ гиперслучайного вектора 109
– – – – скалярной гиперслучайной величины 97
– среднеквадратических отклонений границ гиперслучайной величины 99
– центральных моментов границ гиперслучайного вектора 113
среднеквадратическое отклонение границы гиперслучайного вектора 110
– – – гиперслучайной величины 98
– – – – функции 126
– – – комплексное 117
средний квадрат погрешности 236
– относительно границ квадрат погрешности 265
статистика 46, 208
сходимость выборочного среднего к интервалу 220
– последовательности гиперслучайных величин в среднеквадратическом 142
– – – – по вероятности 142
– – – – – функции распределения 141
– – – – почти наверное (с вероятностью 1) 142
– – – функций в среднеквадратическом 144
– – – – по вероятности 144
– – – – почти наверное (с вероятностью 1) 144
стационарность 150

Т

Теорема, аналогичная теореме Бернулли 227
– Байеса 89
– Бернулли 216
– гипотез 89
– Гливенко 214
– Колмогорова 218
– Линдеберга–Феллера 229
– Маркова 217
– о сходимости границ среднего гиперслучайной выборки 220
– – – оценок границ выборочного среднего гиперслучайной выборки 225
– сложения 87
– умножения 88
– Хинчина 217
– Чебышева 55, 217
теория математическая 42
– физико-математическая 42
точность измерения 38
– точечной оценки 236

У

Уравнение дифференциальное стохастическое 173

– Колмогорова первое (обратное) для марковского гиперслучайного процесса 172
– – прямое (Фоккера–Планка–Колмогорова) для марковского гиперслучайного процесса 172
– Маркова обобщенное (Смолуховского) для гиперслучайного процесса 171
условие Липшица 173

Ф

Формула полной вероятности 89
фрагмент практически стационарный случайной функции 164
функции гиперслучайные комплексные некоррелированные 135
– – – ортогональные 136
– – независимые 132
– – совместно стационарно связанные в широком смысле 152
– – – – – при всех условиях 154
– случайные совместно стационарно связанные в узком смысле 149
– – – – – – широком смысле 149
функционал 138
– гиперслучайный 138
функция аргумента 138
– гиперслучайная 120
– – векторная 131
– – второго порядка 144
– – дифференцируемая в среднеквадратическом 145
– – интегрируемая 145
– – непрерывная в среднеквадратическом 144
– – общего вида 120
– – стационарная в узком смысле (строго) 151
– – – – – – при всех условиях 153
– – – в широком смысле 152
– – – – – – при всех условиях 153
– – нестационарная в узком смысле 151
– – частного вида 120
– – фрагментарно-эргодическая при всех условиях 168
– – эргодическая при всех условиях 164
– выборочная 120
– моментная границы 126
– – – начальная 126
– – – центральная 126
– распределения условная гиперслучайной величины 103
– – – – функции 122
– – – случайной величины 92
– – фрагментарно-гауссовская 230
– – – предельная 230
– случайная 45
– – стационарная в узком смысле 147
– – – – – – асимптотически 148
– – – – – – на интервале 148
– – – – – – порядка K 148
– – – – широком смысле 149
– – нестационарная 147
– – периодично стационарная (циклостационарная) 148
– – фрагментарно-эргодическая 164
– – эргодическая 162
– – – по отношению к ковариационной функции 163
– – – – – – математическому ожиданию 162
– частотной когерентности границ 158

Х

Хаос детерминированный 95
характеристическая функция границы гиперслучайной функции векторной 131
– – – – величины векторной 106
– – – – – скалярной 96
– – – – – условная 108
– – – – функции 123
– – условная гиперслучайной величины векторной 104

– – – – – скалярная 92
– – – – функции 122

Ц

Центральная предельная теорема для гиперслучайных величин 230
– – – – случайных величин 229

Ш

Шум белый гиперслучайный 157
– – – при всех условиях 160
– гиперслучайный гауссовский 174

Э

Эллипс рассеяния 112, 115
эффект многолучевого распространения колебаний 71
– многомодового распространения колебаний 71

Я

Явление гиперслучайное 16
– случайное 45
– статистически непрогнозируемое (непредсказуемое) 200

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Горбань Игорь Ильич — доктор технических наук, профессор. Родился 30 августа 1952 г. в г. Киеве. В 1975 г. окончил Киевский политехнический институт по специальности «гидроакустика», а в 1978 г. — аспирантуру по той же специальности.

В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию в ЦНИИ «Морфизприбор», в 1991 г. — докторскую в Институте кибернетики АН УССР. В 1989 г. было присвоено ученое звание старшего научного сотрудника, в 2000 г. — профессора.

До 1992 г. работал в Киевском НИИ гидроприборов, участвовал в проведении ряда опытно-конструкторских и научно-исследовательских работ. Был первым заместителем Главного конструктора гидроакустической станции (ГАС) с гибкой протяженной буксируемой антенной, ответственным за алгоритмическое обеспечение станции, Главным конструктором опытно-конструкторской работы по созданию ГАС на оптической элементной базе, научным руководителем двух тихоокеанских научных экспедиций по изучению гидроакустических сигналов.

С 1992 г. в течение 12 лет работал в Институте проблем математических машин и систем (ИПММС) НАН Украины в должности главного научного сотрудника, затем заместителя директора по научной работе. С 2004 по 2008 гг. работал в УкрНИУЦ Госпотребстандарта Украины в должности заместителя генерального директора по научной работе. В 2009 г. вернулся в ИПММС НАН Украины, где работает по настоящее время.

Активно занимается научной, научно-педагогической и научно-организационной работой. Был научным руководителем нескольких научно-исследовательских работ, преподавал в Киевском институте военно-воздушных сил, на протяжении ряда лет являлся членом экспертного совета ВАК Украины. Руководит научной работой аспирантов, член специализированных советов по защите докторских диссертаций, член редколлегий научных журналов и международных обществ, в том числе Акустического общества Америки (ASA), Института инженеров в области электротехники и электроники (IEEE) и др.

Автор трех теорий: *теории пространственно-временной обработки гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях*, *теории быстрой многоканальной обработки гидроакустических сигналов* (их изложению посвящены монографии [Gorban, 1998, Gorban, 2008, Горбань, 2008]) и *физико-математической теории гиперслучайных явлений* (ее описанию посвящена монография [Горбань, 2007] и настоящая книга).

Результаты исследований опубликованы более чем в 150 научных трудах, в том числе 8 монографиях, и внедрены в ряде гидроакустических станций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
ВВЕДЕНИЕ 7

ЧАСТЬ I. **ИСТОКИ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ** 25

Глава 1. **Принципы познания мира** 25

1.1. Основы научных теорий 25
1.2. Модели 28
1.2.1. Неформализованные модели 28
1.2.2. Физические и математические модели 30
1.3. Формирование знаний 31
1.4. Мировоззрение и мышление 32
1.5. Познание мира 33
1.6. Измерение 35
1.6.1. Метрические пространства 35
1.6.2. Расстояние 36
1.6.3. Проблема построения адекватных оценок и моделей 36
1.6.4. Погрешность измерения 37
1.6.5. Современные подходы к оценке точности измерений 38
1.7. Физико-математические теории 41

Глава 2. **Феномен статистической устойчивости** 44

2.1. Теория вероятностей: физические и математические основы 44
2.2. Экскурс в историю исследования феномена статистической устойчивости 47
2.3. Нарушения статистической устойчивости 50
2.4. Неопределенные и случайные модели 51

Глава 3. **Статистически неустойчивые последовательности и процессы** 53

3.1. Статистическая устойчивость случайных последовательностей и процессов 53
3.2. Закон больших чисел при нарушении статистической устойчивости 55

3.3. Представление о статистически неустойчивых последовательностях и процессах ...56
3.4. Причины нарушения статистической устойчивости ... 57
3.4.1. Случайные процессы с периодически изменяющимся математическим ожиданием ... 58
3.4.2. Случайные процессы со скачкообразно изменяющимся математическим ожиданием ...62
3.4.3. Случайные процессы с апериодически изменяющимся математическим ожиданием ...62
3.5. Оценка степени нарушения статистической устойчивости на конечном интервале наблюдения ... 65

Глава 4. **Экспериментальные исследования статистической устойчивости физических величин и процессов** ... 68

4.1. Примеры статистически неустойчивых явлений ... 68
4.2. Экспериментальные исследования статистической устойчивости напряжения городской электросети ...72
4.3. Экспериментальные исследования статистической устойчивости высоты морских волн и периода их следования ...77
4.4. Экспериментальные исследования статистической устойчивости магнитного поля Земли ...79
4.5. Экспериментальные исследования статистической устойчивости котировки валют ...81

ЧАСТЬ II. **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ** ... 84

Глава 5. **Гиперслучайные события** ... 84

5.1. Случайные и гиперслучайные события ... 84
5.2. Параметры гиперслучайного события и его свойства ...86
5.3. Аналоги формулы полной вероятности и теоремы гипотез ...89

Глава 6. **Скалярные гиперслучайные величины** ...91

6.1. Скалярные случайные и гиперслучайные величины ... 91
6.2. Условные вероятностные характеристики и моменты распределения скалярной гиперслучайной величины ... 92
6.3. Границы функции распределения и моменты границ скалярной гиперслучайной величины ...93
6.4. Границы вероятностных характеристик и границы моментов скалярной гиперслучайной величины ...99
6.5. Связь между границами моментов и моментами границ распределения ... 101

Глава 7. **Векторные гиперслучайные величины** ... 103

7.1. Векторная гиперслучайная величина, ее условные вероятностные характеристики и моменты ... 103
7.2. Границы функции распределения и моменты границ векторных гиперслучайных величин ...106

7.3. Границы моментов векторных гиперслучайных величин 113
7.4. Параметры скалярных комплексных гиперслучайных величин 115
7.5. Параметры векторных комплексных гиперслучайных величин 117

Глава 8. **Скалярные гиперслучайные функции** 120

8.1. Основные определения 120
8.2. Вероятностные характеристики скалярной гиперслучайной функции 122
8.3. Моментные функции границ распределения скалярной гиперслучайной функции 125
8.4. Границы моментов скалярной гиперслучайной функции 128

Глава 9. **Векторные гиперслучайные функции, гиперслучайные функционалы и операторы** 131

9.1. Векторные гиперслучайные функции 131
9.2. Параметры комплексных гиперслучайных функций 134
9.3. Гиперслучайные функционалы и операторы 138

Глава 10. **Дифференцирование и интегрирование гиперслучайных функций** 141

10.1. Сходимость последовательности гиперслучайных величин 141
10.2. Сходимость последовательности гиперслучайных функций 143
10.3. Непрерывные, дифференцируемые и интегрируемые гиперслучайные функции 144

Глава 11. **Стационарные и эргодические гиперслучайные функции** ...147

11.1. Стационарные случайные функции 147
11.2. Стационарные гиперслучайные функции.. 151
11.3. Спектральное описание стационарных гиперслучайных функций ..155
11.4. Эргодические случайные функции 161
11.5. Эргодические гиперслучайные функции 164
11.6. Фрагментарно-эргодические при всех условиях гиперслучайные функции 168

Глава 12. **Марковские гиперслучайные процессы** 170

12.1. Определение марковского гиперслучайного процесса 170
12.2. Уравнения Колмогорова для марковского гиперслучайного процесса 171
12.3. Винеровский гиперслучайный процесс 174
12.4. Гауссовский марковский гиперслучайный процесс 176

Глава 13. **Преобразование гиперслучайных величин и процессов** 180

13.1. Преобразование скалярной гиперслучайной величины 180
13.1.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов 180
13.1.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов 181
13.1.3. Описание преобразования с помощью границ моментов 185

13.2. Преобразование векторной гиперслучайной величины 188
13.2.1. Описание преобразования с помощью условных функций распределения и их моментов 188
13.2.2. Описание преобразования с помощью границ функций распределения и их моментов 190
13.2.3. Описание преобразования с помощью границ моментов 192
13.3. Преобразование гиперслучайного процесса 193
13.3.1. Безынерционное преобразование гиперслучайного процесса 193
13.3.2. Преобразование гиперслучайного процесса линейным инерционным оператором 193

ЧАСТЬ III. **ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ** 199

Глава 14. **Физические гипотезы и модели теории гиперслучайных явлений** 199

14.1. Гипотезы гиперслучайности 199
14.2. Концепция гиперслучайного устройства мира 202
14.3. Случайные и гиперслучайные модели 203

Глава 15. **Основы статистики гиперслучайных явлений** 206

15.1 Гиперслучайная выборка 206
15.2. Модели случайных и гиперслучайных выборок 209
15.3. Оценки характеристик и параметров гиперслучайной величины ... 211
15.4. Сходимость гиперслучайных оценок 213

Глава 16. **Закон больших чисел для гиперслучайных последовательностей** 216

16.1. Закон больших чисел для последовательностей случайных событий и величин 216
16.2. Теоремы о сходимости границ среднего гиперслучайной выборки . 220
16.3. Теорема о сходимости оценок границ выборочного среднего 225
16.4. Теорема, аналогичная теореме Бернулли 227

Глава 17. **Центральная предельная теорема для гиперслучайных величин** 229

17.1. Центральная предельная теорема для случайных величин 229
17.2. Центральная предельная теорема для гиперслучайных величин 230

Глава 18. **Гиперслучайные оценки детерминированных величин** 233

18.1. Модели измерения физических величин 233
18.2. Точечная гиперслучайная оценка детерминированной величины .. 236
18.3. Несмещенная и состоятельная гиперслучайные оценки детерминированной величины 237
18.4. Эффективная и достаточная гиперслучайные оценки детерминированной величины 241
18.5. Интервальная гиперслучайная оценка детерминированной величины...245

Глава 19. **Гиперслучайные оценки гиперслучайных величин** 247

19.1. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения 247
19.2. Точечная гиперслучайная оценка гиперслучайной величины 250
19.3. Аддитивная и мультипликативная модели оценки 253
19.4. Гиперслучайная оценка результатов косвенных измерений гиперслучайной величины 255

Глава 20. **Характеристики гиперслучайных оценок гиперслучайных величин** 257

20.1. Несмещенная и состоятельная гиперслучайные оценки гиперслучайной величины 257
20.2. Эффективная и достаточная гиперслучайные оценки гиперслучайной величины... 260
20.3. Интервальная гиперслучайная оценка гиперслучайной величины . 267
20.4. Критический объем гиперслучайной выборки 268

Глава 21. **Гиперслучайные оценки гиперслучайных функций** 271

21.1. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения 271
21.2. Погрешность измерения 273
21.3. Аддитивная модель оценки 277
21.4. Мультипликативная модель оценки 279
21.5. Характерные особенности гиперслучайных оценок гиперслучайной функции 281

ПРИЛОЖЕНИЕ. Ученые о феномене статистической устойчивости 284

ПОСЛЕСЛОВИЕ 289

СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 290

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 293

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ...304

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА...312

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧНИХ
МАШИН І СИСТЕМ

ГОРБАНЬ Ігор Ілліч

ТЕОРІЯ ГІПЕРВИПАДКОВИХ ЯВИЩ:
ФІЗИЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ ЗАСАДИ

(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2011

Художній редактор *І.Р. Сільман*
Технічний редактор *Г.М. Ковальова*
Коректор *Л.Г. Бузіашвілі*
Оператори *О.М. Кузьменко, О.О. Іщенко*
Комп'ютерна верстка *О.О. Балюк*

Підп. до друку 16.05.2011. Формат 60 × 90/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 20,0. Ум. фарбо-відб. 20,5.
Обл.-вид. арк. 16,0. Наклад 300 прим. Зам. № 11—395

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ, 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ фірма "Віпол"
03151 Київ 151, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001