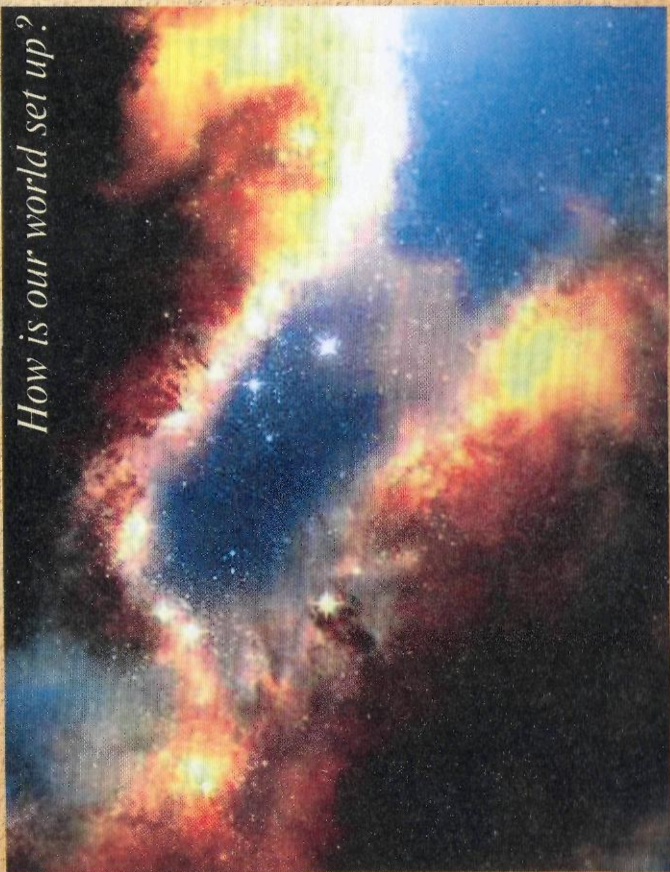
И.И. ГОРБАНЬ

ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ



Национальная академия наук Украины
Институт проблем
математических машин и систем

Госпотребстандарт Украины
ГП “УкрНИУЦ”

519.2

И. И. Горбань

Теория гиперслучайных явлений

Киев
2007

УДК 519.2.+600.1

Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – Киев, 2007. – 184 с.: ил. – 19. Библиогр.: – 33 названия.

Монография посвящена теории гиперслучайных явлений – одной из новых ветвей теории вероятности и математической статистики. Изложены математические основы новой теории и методы моделирования физических объектов с помощью гиперслучайных моделей, учитывающих непредсказуемый характер изменения свойств объектов и статистических условий их наблюдения.

Книга может представлять интерес для специалистов, занимающихся разработкой и использованием математических методов описания физических явлений, построением новых физических и математических моделей, развитием теоретической базы проведения физических измерений, разработкой новых методов оценки параметров и обнаружения сигналов.

Книга рассчитана на читателей, имеющих базовые знания по теории вероятностей и математической статистики в объеме типовых курсов технических университетов.

Рецензенты:

М.А. Попов, доктор технических наук. профессор,
заслуженный деятель науки и техники Украины;
С.Я Жук, доктор технических наук, профессор;
А.М. Резник, доктор технических наук

Рекомендована к изданию Ученым Советом Института проблем математических машин и систем НАН Украины
(протокол № 7 от 16 мая 2007 г.)

Gorban I.I. Theory of hyper-random mass phenomena. – Kiev: National Academy of Science, 2007. – 184 p.

The monograph is dedicated to the theory which describes physical phenomena in non-constant statistical conditions. The theory is a new direction in probability theory and mathematical statistics that gives new possibilities for presentation of physical world by hyper-random models. These models take into consideration the changing of object's properties, as well as uncertainty of statistical conditions.

The book may be useful for scientists and engineers that develop methods of mathematical description of physical phenomena, create new physical and mathematical models, research and develop new methods of measurement, estimation, and detection.

The book is oriented for readers which have knowledge of probability theory and mathematical statistics within base courses of technical universities.

ISBN 978-966-4367-5

Предисловие

Физический мир подчиняется определенным закономерностям, представляющим объективно существующие взаимосвязи между различными его объектами. Знание и учет этих закономерностей позволяют проектировать сложные системы, предсказывать ход развития событий, предвидеть последствия принимаемых решений.

Реальные закономерности носят сложный характер. Для их представления используют различные математические модели, чаще всего детерминированные и случайные (стохастические).

Детерминированные модели хорошо описывают многие законы физики, в частности, механики, акустики, оптики, радиофизики; случайные модели – различные массовые явления, наблюдаемые в статистически стабильных условиях.

Окружающий мир динамично развивается. При этом свойства исследуемых объектов и статистические условия их наблюдения непредсказуемо меняются. Описание массовых явлений в нестабильных условиях вызывает значительные трудности.

Поиск эффективных средств адекватного представления реального мира привел к новому классу моделей, в которых в качестве абстрактных математических объектов выступают так называемые гиперслучайные явления (события, величины и функции).

Теория гиперслучайных явлений как самостоятельное направление теории вероятностей и математической статистики начало формироваться сравнительно недавно. Изложению основ новой теории и методов моделирования физических объектов с помощью гиперслучайных моделей посвящена предлагаемая монография.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем познания является адекватное представление реального мира. Физические и математические модели, используемые для описания различных явлений, постоянно совершенствуются. С получением новых данных и развитием представлений о мире старые модели отходят на второй план, заменяются новыми, более совершенными.

Если до конца средневековья мир виделся неизменным и описывался преимущественно детерминированными моделями, то в настоящее время он рассматривается как динамично меняющаяся структура. Главным средством математического описания мира стали модели, использующие в качестве абстрактных математических объектов случайные явления: случайные события, величины, процессы и поля.

Исчерпывающей характеристикой любого случайного явления является функция распределения вероятности, определяемая для строго постоянных условий наблюдения. Обеспечить на практике полную стабильность условий нельзя, а, следовательно, нельзя задать или оценить абсолютно точно функцию распределения. Это накладывает ограничения на применение классических случайных моделей с фиксированным законом распределения. Корректное их использование оказывается возможным лишь при пренебрежимо малых изменениях условий наблюдения.

Если условия меняются существенно и непредсказуемо, в модель обычно вводят дополнительные элементы неопределенности [1 – 8]. Такой паллиатив, несмотря на некоторую искусственность, дает неплохие результаты, в особенности при решении не очень сложных задач.

Стремление найти простые средства учета неопределенности условий наблюдения играло, по всей видимости, не последнюю роль при формировании ряда относительно новых научных направлений, таких как теория нечетких множеств [9], теория нейронных сетей [10], теория хаотических динамических систем [11, 12], теория интервальных данных [13, 14] и др.

Постоянно продолжающийся поиск универсальных и эффективных путей адекватного математического описания явлений недавно привел к новому классу моделей, в которых в качестве абстрактных математических объектов выступают так называемые гиперслучайные явления [15].

Под гиперслучайными явлениями подразумевается семейство случайных событий, величин, функций или полей, зависящих от параметра $g \in G$, который рассматривается как независимая переменная и ассоциируется с условиями наблюдения (или условиями формирования) рассматриваемых объектов.

Математически случайные события описываются с помощью вероятностного пространства [16], задаваемого триадой ($\Omega, \Im, P$), где Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ – борелевское поле (σ – алгебра подмножеств событий) и P – вероятностная мера подмножеств событий.

При менее строгом, но более наглядном статистическом определении (по Р. фон Мизесу [17, 18]), вероятность $P(A)$ случайного события A представляется как предел частоты $p_N(A)$ его появления при проведении опытов в одинаковых условиях и устремлении количества опытов N к бесконечности: $P(A) = \lim\limits_{N \to \infty} p_N(A)$. В диапазоне небольших значениях N частота $p_N(A)$ может сильно меняться, однако по мере увеличения N постепенно стабилизируется и при $N \to \infty$ стремится к определенному пределу $P(A)$.

Гиперслучайные явления можно описать с помощью тетрады ($\Omega, \Im, G, P_g$) [15], где Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ – борелевское поле, G – множество условий $g \in G$, P_g – вероятностная мера подмножеств событий, зависящая от условия g. Таким образом, вероятностная мера задается для всех подмножеств событий и всех возможных условий $g \in G$. Мера же для условий $g \in G$ остается не определенной.

Используя менее строгий статистический подход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N не стабилизируется и при $N \to \infty$ не имеет предела.

Настоящая монография посвящена изложению основ теории гиперслучайных явлений.

Прежде чем переходить к изложению материала, представляется необходимым кратко остановиться на трех ключевых вопросах: во-первых, какие новые возможности предоставляет теория гиперслучайных явлений и чем они обусловлены, во-вторых, какие модели – случайные или гиперслучайные – более адекватно описывают реальные явления и, в-третьих, какие практические результаты следуют из новой теории?

1. Реальные объекты и их связи описываются с помощью физических моделей, которые могут быть представлены различными математическими моделями, содержащими разные математические объекты и отношения между ними.

Любая математическая модель со своими математическими объектами и отношениями (в частном случае операциями) определяется набором непротиворечивых и независимых аксиом. Новая математическая модель может быть построена либо путем введения новых объектов, отношений и аксиом, либо конструктивно с использованием уже известных математических понятий.

Примерами теорий, соответствующих конструктивным моделям, могут служить векторная алгебра или теория матриц, основанные на правилах сложения и умножения чисел.

Теория гиперслучайных явлений представляет собой теорию, описывающую математическую модель, построенную на базе математической модели случайных явлений. Все новые объекты и отношения между ними строятся с помощью известных объектов и отношений. Никакие новые аксиомы не вводятся. Поэтому теорию гиперслучайных явлений следует рассматривать как теорию, соответствующую конструктивно построенной математической модели.

Следует отметить, что решение любой задачи, описываемой средствами конструктивной математической модели, эквивалентно решению этой же задачи, описываемой средствами порождающей модели. Решение, получаемое, например, с помощью теории матриц, полностью эквивалентно решению, использующему лишь арифметические правила работы с числами.

В этой связи от теории гиперслучайных явлений нельзя ожидать получения новых решений, не эквивалентных решениям, получаемым с использованием методов теории вероятностей и математической статистики.

Вместе с тем не следует умалять значимость новой теории. Несмотря на указанные ограничения, накладываемые конструктивным характером модели, теория гиперслучайных явлений, подобно теории матриц, расширяет возможности решения практических задач. Использование в новой теории обобщенных понятий позволяет взглянуть на существующие проблемы с более общих позиций и уловить те закономерности и особенности исследуемых явлений, которые на уровне понятий порождающей модели были скрыты громоздкостью рассуждений и выкладок. Кроме того, процедура решения некоторых задач оказывается более простой и наглядной, а само решение представимо в более компактном виде.

2. В целом, реальные явления более адекватно представляются гиперслучайными моделями, чем случайными. В подтверждение этому разберем классический пример, с которого, как правило, начинается изучение теории вероятностей, – пример с подбрасыванием монеты. Обычно полагают, что исходы опытов – случайны и имеют конкретные вероятности: вероятность того, что выпадет орел, – P_o и вероятность того, что выпадет решка, – P_p. При этом считают, что $P_o = P_p = 0,5$.

Насколько корректна описанная модель? На первый взгляд кажется, что нет оснований сомневаться в ее адекватности. Но это только на первый взгляд. Разве вероятности P_o, P_p не могут быть другими? Нетрудно убедиться, что после некоторой тренировки, контролируя начальное положение монеты, можно научиться так ее бросать, что частота выпадения одной из ее сторон будет колебаться в районе определенного фиксированного значения, большего 0,5, а частота выпадения второй стороны – в районе значения, меньшего 0,5. При изменении условий бросания характеристики могут меняться как в одну, так и другую сторону. Исходы опытов в этом случае можно рассматривать как гиперслучайное событие. Таким образом, гиперслучайная модель, не отдающая предпочтение какой-то конкретной комбинации вероятностей выпадения орла и решки и учитывающая неопределенность статистических условий наблюдения, более адекватно описывает реальную ситуацию, чем случайная модель, предполагающая фиксированные значения этих вероятностей.

Рассмотрим другой пример, имеющий отношение к метрологии, – прецизионное измерение диаметра цилиндрической детали круглого сечения. Совершенно тривиальная задача при углубленном анализе оказывается очень непростой. Изготовить деталь абсолютно круглого сечения невозможно. Ее сечение всегда отличается от идеального круга: во-первых, из-за эллипсоидального или иного отклонения от идеальной круговой формы, а, во-вторых, из-за шероховатости поверхности. Следует также иметь в виду, что разные сечения по оси цилиндра отличаются. Поэтому истинный размер детали, даже без учета влияния температуры и целого ряда других факторов, оказывается разным в разных замерах.

Из-за сложной формы сечения понятие диаметра детали не имеет смысла. Поэтому измерять можно не диаметр, а усредненное сечение детали.

Физическая модель измеряемой величины должна учитывать и отклонение от идеальной круговой формы сечения детали, и шероховатость поверхности, и различие сечений по оси. Для математического описания физической модели, в принципе, можно использовать как общепринятую случайную, так и гиперслучайную модели.

Случайная модель базируется на предположении, что вероятностные характеристики размера детали постоянны. В действительности же это не так. В пределах небольших локальных областей они могут быть приблизительно постоянными, однако в целом существенно зависят от направления, вдоль которого проводится измерение, и рассматриваемого сечения. Поэтому гиперслучайная модель измеряемой величины, учитывающая вариабельность функций распределения, лучше, чем случайная модель, описывает все нюансы, связанные с объективно существующей статистической неопределенностью.

Любые измерения проводятся в условиях воздействия различных мешающих факторов (помех). В рассматриваемой задаче в качестве такого фактора можно рассматривать загрязнение поверхности детали. Пыль и грязь на поверхности собираются неравномерно. В пределах небольших локальных областей толщину загрязненного слоя приближенно можно описать случайной величиной, однако с учетом отличия законов распределения для разных областей лучше характеризовать ее гиперслучайной величиной.

Идеальных, абсолютно точных, средств измерения в мире не существует. Ни штангенциркуль, ни микрометр, ни какой-либо другой измерительный инструмент не может с бесконечно высокой точностью измерить размер сечения. Причины оказываются разными. Для микрометра, например, это – конечные размеры поверхностей, соприкасающиеся с деталью, люфт микрометрических винтов, перекосы и др. Объединяющим свойством факторов, ограничивающих точность, является гиперслучайный их характер. Поэтому при построении математической модели средства измерения имеет смысл отдавать предпочтение гиперслучайной модели.

Таким образом, физические модели, учитывающие в реальных, не полностью определенных и меняющихся статистических условиях, особенности измеряемых величин, помех и средств измерения, более адекватно описываются с помощью гиперслучайных математических моделей, чем случайных.

3. Приведенные выше ситуации типичны для очень широкого круга реальных явлений (объектов). Это позволяет предположить

[19], что *все реальные физические величины, процессы и поля* (*за исключением, возможно лишь, небольшого числа величин, рассматриваемых современной наукой как мировые физические константы*) *носят гиперслучайный характер.* Иными словами, *одним из основных физических свойств практически всех реальных явлений оказывается неполная их статистическая определенность.*

Выдвинутая гипотеза касается различных реальных явлений, в том числе величин, функций и полей, подлежащих измерению, действующих помех, а также погрешностей измерения. Любая оценка формируется в результате оценивания смеси истинного значения измеряемой величины, функции или поля и помех, мешающих проведению наблюдений. Поскольку помеха и погрешности измерения носят гиперслучайный характер, даже в том случае, когда измеряемая величина постоянна (является мировой константой), результат измерения оказывается величиной гиперслучайного типа. Отсюда следует [21], что *абсолютно все оценки реальных величин, процессов и полей не состоятельны и потенциальная точность любых измерений ограничена.* Предел точности определяется не только числом результатов измерения и случайным их разбросом, а и изменчивым характером вероятностных характеристик измеряемой величины, помех и погрешностей.

Задачи обнаружения и классификации могут рассматриваться как задачи измерения определенных параметров. Поэтому *абсолютно достоверное обнаружение и абсолютно достоверная классификация реальных объектов принципиально невозможны* [21].

***

Монография написана на базе статей автора, опубликованных в научных и научно-технических журналах [15, 19 – 27]. Книга состоит из двух частей. В первой части (до шестой главы) излагаются математические основы теории гиперслучайных явлений, во второй – методы моделирования физических объектов с помощью гиперслучайных моделей, учитывающих непредсказуемый характер изменения свойств объектов и статистических условий их наблюдения.

В первой главе определяются понятия гиперслучайного события и гиперслучайной величины. Для характеристики гиперслучайного события предложено использовать верхнюю и нижнюю границы вероятности, а для описания гиперслучайной величины – верхнюю и нижнюю границы функции распределения. Введены понятия плотностей распределения границ гиперслучайной величины, характеристических функций границ, а также нецентральных и центральных моментов границ. Исследованы свойства этих характеристик. Результаты, первоначально полученные для скалярных действительных гиперслучайных величин, обобщены на случай комплексных и векторных величин.

Вторая глава посвящена гиперслучайным функциям. Для их описания разработан математический аппарат, базирующийся на принципах и подходах описания гиперслучайных величин. В качестве основных характеристик гиперслучайных функций выбраны верхняя и нижняя границы функции распределения, а также плотности распределения границ и характеристические функции границ. Вспомогательными характеристиками являются математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные функции границ и др. Математический аппарат разработан для различных гиперслучайных функций: скалярных и векторных, вещественных и комплексных. Рассмотрена специфика описания скалярных, векторных и комплексных гиперслучайных функций.

В третьей главе предложен альтернативный подход к описанию гиперслучайных величин и функций, позволяющий характеризовать их, не прибегая к расчету границ функции распределения. Его основой служит вычисление границ центральных и нецентральных моментов: математического ожидания, дисперсии, корреляционного момента, ковариационного момента и др. Границы моментов гиперслучайного явления и моменты границ функции распределения – разные понятия. В общем случае границы моментов не совпадают с соответствующими моментами границ, хотя в отдельных случаях совпадение и имеет место.

Четвертая глава посвящена формализации ряда понятий, касающихся гиперслучайных явлений: стационарности и эргодичности гиперслучайной функции, гиперслучайного белого шума и др. Введены различные характеристики, описывающие стационарные и эргодические гиперслучайные функции. Исследованы свойства этих характеристик. Разработаны спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций.

В пятой главе формализовано понятие гиперслучайной выборки и определены ее свойства, предложена методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины и исследована сходимость гиперслучайных оценок к соответствующим точным характеристикам. Доказана предельная теорема, определяющая закон распределения оценок границ функции распределения среднего при стремлении объема выборки к бесконечности.

Шестая глава посвящена методам точечного и интервального оценивания детерминированных величин. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной оценки, состоятельной, эффективной и достаточной, а для интервальных гиперслучайных оценок – понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки.

Специфике оценки физических величин в условиях статистической неопределенности с использованием гиперслучайных моделей измеряемых величин и гиперслучайных моделей оценок посвящены седьмая и восьмая главы. Приведенные в них результаты обобщают материал шестой главы. Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

Девятая глава освещает круг вопросов, касающихся гиперслучайных оценок гиперслучайных функций. Дано обоснование гипотезы, что все реальные оценки физических процессов несостоятельны, а точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена.

В десятой главе рассмотрены вопросы неформализованного и формализованного описания окружающего мира. Исследованы причины, ограничивающие возможность построения моделей, адекватно представляющих физические объекты. Высказано предположение, что в основе построения физического мира лежат гиперслучайные принципы.

В список литературы вынесены книги и статьи, на которые имеются ссылки.

***

Монография может представлять интерес для специалистов, занимающихся разработкой математических методов описания физических явлений, построением новых физических и математических моделей, развитием теоретической базы проведения физических измерений, разработкой новых методов оценки параметров и обнаружения сигналов.

Книга рассчитана на читателей, имеющих базовые знания по теории вероятностей и математической статистике в объеме типовых курсов технических университетов.

***

Автор благодарен рецензентам – доктору технических наук, профессору М.А. Попову, доктору технических наук, профессору С.Я. Жуку и доктору технических наук А. М. Featured Резнику за критические замечания и конструктивное обсуждение рукописи, а также Г.Р. Войцеховской, взявшей на себя основную заботу по подготовке книги к изданию, корректировке и вычитыванию текста.

Монография, безусловно, отражает во многом субъективный взгляд автора на физику реальных явлений и его представления о путях эффективного решения проблемы адекватного математического их описания.

Автору интересно узнать мнение читателей о книге. С отзывами и замечаниями можно обращаться по адресу: проспект Глушкова, 42, Киев, Украина, 03187, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины или по электронной почте: igor.gorban@yahoo.com.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

ГЛАВА 1

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕЛИЧИНЫ

Введены понятия гиперслучайного события и гиперслучайной величины. Предложен ряд характеристик и параметров для описания таких событий и величин. Главными характеристиками являются условные функции распределения, верхняя и нижняя границы функции распределения, а также плотности распределения границ и характеристические функции границ. Вспомогательными характеристиками являются математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные функции границ и др.

1.1. Гиперслучайные события

Пусть заданы множество Ω элементарных событий $\omega \in \Omega$ и наименьшая σ – алгебра (борелевское поле $\Im$) подмножеств этого множества. При фиксированных условиях g каждому событию A борелевского поля ставится в соответствие вероятностная мера $P(A/g)$. В результате триада $(\Omega, \Im, P)$ задает вероятностное пространство.

Условия g могут быть детерминированными (если g полностью известно) или случайными (если определена вероятностная мера $P(g)$ $\forall g \in G$). В обоих случаях A является случайным событием – событием, для которого определена вероятностная мера.

При неопределенных условиях g, когда известно лишь множество G возможных значений g, но неизвестно, какое именно значение примет величина g в конкретном опыте, величина $P(A/g)$ оказывается неопределенной. В этом случае событие A нельзя отнести к случайным событиям. Это событие другой природы, называемое в дальнейшем гиперслучайным.

Аналитически *гиперслучайное событие* задается тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где P_g – вероятностная мера при фиксированном $g \in G$.

Гиперслучайное событие можно представить множеством случайных событий, зависящих от условий g. Для каждого из входящих в это множество событий определена вероятностная мера P_g, но для условий g мера не определена.

Для гиперслучайного события задать вероятностную меру нельзя, но можно поставить в соответствие определенные величины, количественно характеризующие диапазон изменения вероятности события: *верхнюю* $P_S(A)$ и *нижнюю* $P_I(A)$ *границы*, называемые в дальнейшем *границами вероятности.* Эти границы аналитически описываются следующими выражениями

$$P_S(A) = \sup_{g \in G} P(A/g), \quad P_I(A) = \inf_{g \in G} P(A/g). \tag{1.1}$$

Если множество условий состоит из одного элемента ($g = \mathrm{const}$) эти границы совпадают. Тогда гиперслучайное событие вырождается в случайное и величина $P(A) = P_S(A) = P_I(A)$ представляет собой вероятность случайного события A.

На основе аксиом теории вероятностей легко доказать, что

1) $P_S(A) \geq 0, \quad P_I(A) \geq 0;$ (1.2)

2) для попарно несовместных событий

$$P_S(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P_S(A_n), \quad P_I(\bigcup_n A_n) \geq \sum_n P_I(A_n); \tag{1.3}$$

3) $P_S(\Omega) = P_I(\Omega) = 1.$ (1.4)

Из выражений (1.1) – (1.4) следует, что $P_S(A)$ и $P_I(A)$ представляют собой нормированные полумеры, удовлетворяющие всем аксиомам меры, за исключением аксиомы счётной аддитивности. При этом

$$0 \le P_S(A) \le 1, \quad 0 \le P_I(A) \le 1, \quad P_S(\varnothing) = P_I(\varnothing) = 0.$$

Для гиперслучайных событий имеют место следующие соотношения:

1) если $A_m \subset A_{m+1}$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M), \quad P_I(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M); \quad (1.5)$$

2) если $A_{m+1} \subset A_m$, $m \ge 1$, то

$$P_S(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_S(A_M), \quad P_I(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{M\to\infty} P_I(A_M). \quad (1.6)$$

Доказательство равенств (1.5) основано на том, что объединение событий $A_1,...,A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \subset ... \subset A_M$, представляет собой событие A_M. Доказательство равенств (1.6) основано на аналогичном факте, что пересечение событий $A_1,...,A_M$, связанных между собой соотношением $A_1 \supset ... \supset A_M$, представляет собой событие A_M.

Для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$P_S(A_1 \cup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2) - P_I(A_1 \cap A_2), \quad (1.7)$$

$$P_I(A_1 \cup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2) - P_S(A_1 \cap A_2), \quad (1.8)$$

аналогичные выражению, описывающему *теорему сложения* для случайных событий:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Для доказательства неравенств (1.7), (1.8) рассмотрим два события A_1 и A_2, в общем случае совместных. Верхняя граница вероятности события $A_1 \cup A_2$

$$P_S(A_1 \bigcup A_2) = \sup_{g \in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g) - P(A_1 \bigcap A_2/g)) \le$$
$$\le \sup_{g \in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g)) - \inf_{g \in G}(P(A_1 \bigcap A_2/g).$$

Отсюда следует неравенство (1.7).

Нижняя граница вероятности события $A_1 \bigcup A_2$

$$P_I(A_1 \bigcup A_2) = \inf_{g \in G}(P(A_1/g) + P(A_2/g) - P(A_1 \bigcap A_2/g)).$$

Отсюда следует неравенство (1.8).

Отметим, что, когда события A_1 и A_2 несовместные, то $P_S(A_1 \bigcap A_2) = 0$, $P_I(A_1 \bigcap A_2) = 0$ и из выражений (1.7), (1.8) следует

$$\begin{aligned} &P_S(A_1 \bigcup A_2) \le P_S(A_1) + P_S(A_2), \\ &P_I(A_1 \bigcup A_2) \ge P_I(A_1) + P_I(A_2). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Когда $A_1 \subset A_2$, то, согласно соотношению (1.5),

$$P_S(A_1 \bigcup A_2) = P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \bigcup A_2) = P_I(A_2).$$

В общем случае для гиперслучайных событий A_1 и A_2 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &P_S(A_1 \bigcap A_2) \le P_S(A_1) P_S(A_2/A_1), \quad (P_S(A_1) \ne 0), \\ &P_I(A_1 \bigcap A_2) \ge P_I(A_1) P_I(A_2/A_1), \quad (P_I(A_1) \ne 0), \end{aligned} \tag{1.10}$$

аналогичные выражению

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1)\ P(A_2/A_1),$$

описывающему *теорему умножения* для случайных событий при $P(A_1) \ne 0$. В данном случае под $P_S(A_2/A_1)$ и $P_I(A_2/A_1)$ подразумеваются соответственно верхняя и нижняя границы вероятности события A_2 при условии, что произошло событие A_1. Доказательство неравенств (1.10) аналогично рассмотренному.

Гиперслучайные события A_1 и A_2 будем называть *независимыми*, если границы вероятности пересечения этих событий факторизуются:

$$P_S(A_1 \cap A_2) = P_S(A_1)P_S(A_2), \quad P_I(A_1 \cap A_2) = P_I(A_1)P_I(A_2). \quad (1.11)$$

Смысл формул (1.11) заключается в том, что при независимых гиперслучайных событиях A_1 и A_2 границы функции распределения пересечения событий определяются лишь границами функции распределения события A_1 и границами функции распределения события A_2. При этом несущественно, произошло или не произошло событие A_1 до выяснения, каковы границы события A_2, и произошло или не произошло событие A_2 до выяснения, каковы границы события A_1. Результат будет один и тот же.

Аналогами *формулы полной вероятности* и *теоремы гипотез* (*теоремы Байеса*) теории вероятностей служат следующие теоремы, доказываемые по рассмотренной выше схеме.

Теорема 1. Пусть событие A может произойти совместно с одним и только одним событием $H_1, \ldots, H_M$, образующим полную группу несовместных событий (гипотез). Тогда

$$\begin{aligned} P_S(A) &\le \sum_{m=1}^{M} P_S(H_m)P_S(A/H_m), \\ P_I(A) &\ge \sum_{m=1}^{M} P_I(H_m)P_I(A/H_m). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теорема 2. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ – множество попарно несовместных событий (гипотез), образующих полную группу. Тогда для каждой пары событий (H_m, A) справедливы неравенства

$$P_S(H_m/A) \le \frac{P_S(H_m \cap A)}{P_I(A)} \le \frac{P_S(H_m)P_S(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_I(H_m)P_I(A/H_m)},$$

$$P_I(H_m/A) \ge \frac{P_I(H_m \cap A)}{P_S(A)} \ge \frac{P_I(H_m)P_I(A/H_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P_S(H_m)P_S(A/H_m)}.$$

1.2. Скалярные гиперслучайные величины

Скалярной гиперслучайной величиной X будем называть произвольную числовую функцию, определенную на пространстве Ω элементарных событий ω, для которой при фиксированных условиях наблюдения $g \in G$ определена вероятностная мера, но для условий наблюдения вероятностная мера не определена. Значения x гиперслучайной величины X могут быть получены с помощью некоторой функции $x = \psi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

Гиперслучайную величину X можно представить в виде множества случайных величин X / g: $X = \{X / g \in G\}$.

Связь между гиперслучайными и случайными величинами подобна связи между векторными и скалярными величинами. Вектор может быть представлен множеством скалярных величин. Также и гиперслучайная величина может быть охарактеризована множеством случайных величин. Частным случаем вектора является скаляр, частным случаем гиперслучайной величины является случайная величина.

Для описания гиперслучайной величины X можно использовать различные вероятностные характеристики *условных случайных величин* X / g $(g \in G)$, например, функции распределения

$$F(x/g) = P\{X \le x/g\},$$

где $P\{X \le x/g\}$ – вероятность выполнения неравенства $X \le x$ в условиях g, плотности вероятности

$$f(x/g) = \frac{\mathrm{d}F(x/g)}{\mathrm{d}x},$$

характеристические функции

$$Q(\mathrm{j}\omega/g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x/g)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}x,$$

образующие функции моментов, образующие функции факториальных моментов и др., а также центральные и нецентральные моменты случайных величин X/g, в частности, математические ожидания $m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g]$, дисперсии

$$D_{x/g} = \mathrm{D}[X/g] = \mathrm{M}[(X/g - m_{x/g})^2]$$

и пр., где $\mathrm{M}[\cdot]$ и $\mathrm{D}[\cdot]$ – операторы математического ожидания и дисперсии соответственно.

Для описания гиперслучайной величины X могут быть использованы также и другие характеристики и параметры, аналогичные перечисленным.

Аналогами функции распределения являются функции, определяемые следующим образом:

$$F_S(x) = \sup_{g \in G} P\{X \le x/g\}, \quad F_I(x) = \inf_{g \in G} P\{X \le x/g\}. \quad (1.13)$$

Из выражений (1.13) видно, что функции $F_S(x)$ и $F_I(x)$ определены соответственно как верхняя и нижняя границы вероятности выполнения условия $X \le x$, т. е. являются *границами функции распределения* $F(x/g)$. Функции $F_S(x)$ и $F_I(x)$, не будучи мерами гиперслучайной величины X, обладают теми же свойствами, что и функция распределения вероятности случайной величины: они неотрицательные ($F_S(x) \ge 0$, $F_I(x) \ge 0$), ограниченные ($0 \le F_S(x) \le 1$, $0 \le F_I(x) \le 1$) и неубывающие. Кроме того, $F_S(x) \ge F_I(x)$, при минимальном значении гиперслучайной величины (если оно существует) границы совпадают и равны нулю, а при максимальном значении (если оно существует) – границы совпадают и равны единице.

Между границами функции распределения расположена *зона неопределенности* (рис. 1.1). Ее ширина определяется разностью $\Delta F(x) = F_S(x) - F_I(x)$: чем больше неопределенность, тем больше величина $\Delta F(x)$. Если X – случайная величина, то границы функции распределения совпадают и разность $\Delta F(x)$ равна нулю.

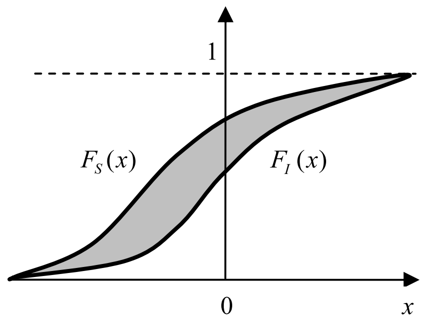


Рис. 1.1. Границы функции распределения и зона неопределенности (затемненная область)

Для выяснения особенностей границ функции распределения при высоком уровне неопределенности рассмотрим гиперслучайную величину X, определенную на интервале $[a,b]$. По мере возрастания неопределенности (приближения к полному *хаосу* [11, 12]) верхняя граница стремится к единице, а нижняя – к нулю. При этом верхнюю границу можно рассматривать, например, как функцию

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x < a, \\ (1-\varepsilon)/2 \ \text{при} \ x = a, \\ 1-\varepsilon \ \text{при} \ x \in (a,b), \\ 1-\varepsilon/2 \ \text{при} \ x = b, \\ 1 \ \text{при} \ x > b, \end{cases} \qquad (1.14)$$

а нижнюю – как функцию

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ \varepsilon/2 \text{ при } x = a, \\ \varepsilon \text{ при } x \in (a,b), \\ (1+\varepsilon)/2 \text{ при } x = b, \\ 1 \text{ при } x > b, \end{cases} \qquad (1.15)$$

где $\varepsilon \to 0$ (рис. 1.2). Определенные таким образом функции $F_S(x)$, $F_I(x)$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к функциям, имеющим единичные скачки соответственно в точках a и b. Если $a \to -\infty$, а $b \to \infty$, то эти единичные скачки находятся в бесконечности (минус бесконечности и плюс бесконечности).

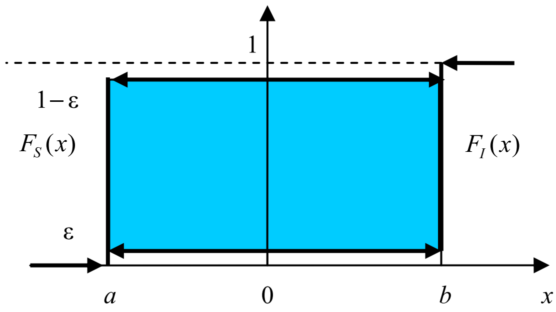


Рис. 1.2. Пример расположения границ функции распределения гиперслучайной величины X и зоны неопределенности (затемненная область) при приближении к хаосу ($\varepsilon \to 0$)

Гиперслучайную величину будем называть *непрерывной,* если на любом конечном интервале границы ее функции распределения непрерывны и существуют кусочно-непрерывные их производные.

Для непрерывной гиперслучайной величины аналогами плотности вероятности случайной величины могут служить функции

$$f_S(x) = \frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}, \quad f_I(x) = \frac{\mathrm{d}F_I(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad (1.16)$$

представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения и называемые *плотностями распределения границ*.

Используя обобщенные функции, в частности, δ-функцию, можно определить плотности распределения границ не только для непрерывных гиперслучайных величин, но и для тех, у которых границы функции распределения представляют собой кусочно-непрерывные функции, в частности, функций (1.14), (1.15).

Нетрудно убедиться, что плотности распределения границ обладают свойствами плотности вероятности случайной величины: поскольку $F_S(x)$ и $F_I(x)$ неубывающие, то плотности распределения границ неотрицательны ($f_S(x) \geq 0$, $f_I(x) \geq 0$), поскольку первообразные $F_S(x)$, $F_I(x)$ функций $f_S(x)$, $f_I(x)$ при $x \to \infty$ равны единице, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\mathrm{d}x = 1$$

и $F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_S(x)\mathrm{d}x$, $F_I(x_2) - F_I(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_I(x)\mathrm{d}x$.

Аналогами характеристической функции случайной величины могут служить *характеристические функции границ гиперслучайной величины*, под которыми понимается преобразование Фурье плотностей распределения границ:

$$\begin{aligned} Q_S(\mathrm{j}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}x, \\ Q_I(\mathrm{j}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_I(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Характеристические функции границ обладают свойствами характеристической функции: они ограничены ($|Q_S(\mathrm{j}\omega)| \leq Q_S(0) = 1$, $|Q_I(\mathrm{j}\omega)| \leq Q_I(0) = 1$) и в случае вещественных гиперслучайных величин обладают свойством комплексной сопряженности ($Q_S(-\mathrm{j}\omega) = Q_S^*(\mathrm{j}\omega)$, $Q_I(-\mathrm{j}\omega) = Q_I^*(\mathrm{j}\omega)$).

В отличие от границ функции распределения, плотности распределения границ и характеристические функции границ не столь наглядно характеризуют зону неопределенности, хотя с их помощью можно определить полезные в некоторых случаях величины

$$\Delta f(x) = f_S(x) - f_I(x),$$

$$\Delta Q(\mathrm{j}\omega) = Q_S(\mathrm{j}\omega) - Q_I(\mathrm{j}\omega).$$

Информативными характеристиками являются *средние границ:*

– *среднее границ функции распределения*

$$F_0(x) = (F_S(x) + F_I(x))/2;$$

– *среднее плотностей распределения границ*

$$f_0(x) = (f_S(x) + f_I(x))/2;$$

– *среднее характеристических функций границ*

$$Q_0(\mathrm{j}\omega) = (Q_S(\mathrm{j}\omega) + Q_I(\mathrm{j}\omega))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями:

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{d}F_0(x)}{\mathrm{d}x}, \quad Q_0(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}x.$$

Для описания гиперслучайных величин могут быть использованы также различные *числовые характеристики*, аналогичные числовым характеристикам случайных величин: аналогичные математическому ожиданию, дисперсии, среднеквадратическому отклонению и др.

Математические ожидания границ $\mathrm{M}_S[\varphi(X)]$, $\mathrm{M}_I[\varphi(X)]$ *функции* $\varphi(X)$ гиперслучайной величины X с плотностями распределения границ $f_S(x)$, $f_I(x)$ будем называть интегралы

$$\mathrm{M}_S[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_S(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{M}_I[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_I(x)\mathrm{d}x. \quad (1.18)$$

Математические ожидания границ существуют не всегда: только когда существуют (в смысле абсолютной сходимости) интегралы (1.18).

Из выражений (1.17), (1.18) видно, что характеристические функции границ – это верхняя и нижняя границы математического ожидания комплексной гиперслучайной величины $\exp\ (\mathrm{j}\omega X)$. Из выражений (1.18) следует, что *математические ожидания границ* m_{Sx}, m_{Ix} *гиперслучайной величины* X, представляемые как математические ожидания границ функции $\varphi(X) = X$, описываются выражениями

$$m_{Sx} = \mathrm{M}_S\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_S(x)\mathrm{d}x, \quad m_{Ix} = \mathrm{M}_I\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_I(x)\mathrm{d}x. \quad (1.19)$$

Для вещественной гиперслучайной величины X *дисперсии границ* D_{Sx} и D_{Ix} определим как

$$D_{Sx} = \mathrm{M}_S\left[(X - m_{Sx})^2\right], \quad D_{Ix} = \mathrm{M}_I\left[(X - m_{Ix})^2\right], \quad (1.20)$$

а *среднеквадратические отклонения границ* σ_{Sx} и σ_{Ix} – как

$$\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}, \quad \sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}. \quad (1.21)$$

Математические ожидания границ m_{Sx} и m_{Ix} гиперслучайной величины X характеризуют средние значения X, рассчитанные для верхней и нижней границ плотности распределения. Дисперсии границ D_{Sx} и D_{Ix} величины X, а также среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx} и σ_{Ix} величины X характеризуют разброс значений X относительно соответствующих математических ожиданий m_{Sx} и m_{Ix}.

Учитывая, что при $F_S(x_1) = F_I(x_2)$ имеет место неравенство $x_1 \le x_2$, нетрудно показать, что $m_{Sx} \le m_{Ix}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда гиперслучайная величина X вырождается в случайную величину. Величина же дисперсии D_{Sx} может быть больше, меньше или равна величине D_{Ix}.

В качестве интегральных характеристик можно предложить также *среднее математических ожиданий границ функции* $\varphi(X)$, определяемое как

$$\mathrm{M}_0\left[\varphi(X)\right]=(\mathrm{M}_S\left[\varphi(X)\right]+\mathrm{M}_I\left[\varphi(X)\right])/2,$$

среднее математических ожиданий границ гиперслучайной величины X, определяемое как $m_{0x}=(m_{Sx}+m_{Ix})/2$, *среднее дисперсий границ* $D_{0x}=\mathrm{M}_0\left[(X-m_{0x})^2\right]$ и *среднее среднеквадратических отклонений границ* $\sigma_{0x}=\sqrt{D_{0x}}$.

Кроме того, можно ввести ряд других характеристик, дающих представление о гиперслучайной величине, в частности, *начальные моменты границ* $m_{S\nu}$ и $m_{I\nu}$ $\nu-$го порядка, определив их как математические ожидания границ функции $\varphi(X)=X^\nu$, *центральные моменты границ* $\mu_{S\nu}$ и $\mu_{I\nu}$ $\nu-$го порядка, определив их как математические ожидания соответственно границ функций $\varphi(X)=(X-m_{Sx})^\nu$ и $\varphi(X)=(X-m_{Ix})^\nu$ и т. п.

1.3. Векторные гиперслучайные величины

Материалы подраздела 1.2 обобщаются на *векторные гиперслучайные величины,* каждая компонента которых представляет собой скалярную гиперслучайную величину.

Векторную гиперслучайную величину $\vec{X}$ будем рассматривать как множество случайных величин $\left\{\vec{X}/g\in G\right\}$.

Границы функции распределения векторной гиперслучайной величины $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_M)$ определим как

$$F_S(\vec{x})=\sup_{g\in G} P\left\{X_1\le x_1,\ldots,X_M\le x_M/g\right\}, \qquad (1.22)$$

$$F_I(\vec{x})=\inf_{g\in G} P\left\{X_1\le x_1,\ldots,X_M\le x_M/g\right\}, \qquad (1.23)$$

плотности распределения границ – как

$$f_S(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_S(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \quad f_I(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_I(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M}, \tag{1.24}$$

а *характеристические функции границ* – как

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x},$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}.$$

Эти характеристики обладают теми же свойствами, что и аналогичные характеристики векторных случайных величин, а также специфическими свойствами, аналогичными свойствам скалярных гиперслучайных величин. В частности, $F_S(\vec{x}) \geq F_I(\vec{x})$, причем границы гиперслучайных величин совпадают при устремлении компонент вектора $\vec{x}$ к минус и плюс бесконечности.

Рассмотрим L-мерную гиперслучайную величину $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$, состоящую из M-мерной гиперслучайной величины $\vec{X}$ и $(L-M)$-мерной гиперслучайной величины $\vec{Y}$. Введем понятия *границ условной функции распределения* $F_S(\vec{y}/\vec{x})$, $F_I(\vec{y}/\vec{x})$, *условных плотностей распределения границ* $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ и *условных характеристических функций границ* $Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_y/\vec{x})$, $Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_y/\vec{x})$ *гиперслучайной величины* $\vec{Y}$ при условии, что гиперслучайная величина $\vec{X}$ приняла конкретное значение $\vec{x}$.

Совместные плотности распределения границ $f_S(\vec{x}, \vec{y})$, $f_I(\vec{x}, \vec{y})$ системы гиперслучайных величин $\vec{Z} = (\vec{X}, \vec{Y})$ связаны с условными плотностями распределения границ $f_S(\vec{y}/\vec{x})$, $f_I(\vec{y}/\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{Y}$ и плотностями распределения границ $f_S(\vec{x})$, $f_I(\vec{x})$ гиперслучайной величины $\vec{X}$ неравенствами

$$f_S(\vec{x}, y) \le f_S(\vec{x}) f_S(\vec{y}/\vec{x}), \quad f_I(\vec{x}, \vec{y}) \ge f_I(\vec{x}) f_I(\vec{y}/\vec{x}), \qquad (1.25)$$

следующими из выражений (1.10).

Гиперслучайные величины $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ будем называть *независимыми,* если плотности распределения границ $f_S(\vec{x}, \vec{y})$ и $f_I(\vec{x}, \vec{y})$ допускают факторизацию:

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) = f_S(\vec{x}) f_S(\vec{y}), \quad f_I(\vec{x}, \vec{y}) = f_I(\vec{x}) f_I(\vec{y}). \qquad (1.26)$$

Нетрудно убедиться, что для независимых величин $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ факторизуются не только плотности распределения границ, но также границы функции распределения и характеристические функции границ:

$$F_S(\vec{x}, \vec{y}) = F_S(\vec{x}) F_S(\vec{y}), \quad F_I(\vec{x}, \vec{y}) = F_I(\vec{x}) F_I(\vec{y}),$$

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_x, \mathrm{j}\vec{\omega}_y) = Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_x) Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_y),$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_x, \mathrm{j}\vec{\omega}_y) = Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_x) Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_y).$$

Следует обратить внимание на то, что независимость гиперслучайных величин не означает, что между этими величинами отсутствует связь. На уровне рассматриваемых характеристик она просто не проявляется. Уместно отметить, что понятие независимости случайных величин, широко используемое в теории вероятностей, следует трактовать так же: связь между случайными величинами может существовать, хотя на уровне вероятностной меры она не наблюдается.

Плотности распределения границ M -мерной гиперслучайной величины $(X_1, \ldots, X_M)$ определяются следующими неравенствами:

$$f_S(x_1, \ \ldots, x_M) \le f_S(x_M/x_1, \ \ldots, x_{M-1}) \ldots f_S(x_2/x_1) f_S(x_1), \qquad (1.27)$$

$$f_I(x_1, \ \ldots, x_M) \ge f_I(x_M/x_1, \ \ldots, x_{M-1}) \ldots f_I(x_2/x_1) f_I(x_1). \qquad (1.28)$$

Здесь $f_S(x_m/x_1, \ldots, x_{m-1})$, $f_I(x_m/x_1, \ldots, x_{m-1})$, $(m = \overline{2, M})$ – одномерные условные плотности распределения границ; $f_S(x_1)$,

$f_I(x_1)$ – одномерные безусловные плотности распределения границ. Доказательство этих неравенств может быть проведено методом математической индукции с использованием неравенств (1.25).

Отметим, что в том случае, когда компоненты гиперслучайной величины независимы,

$$f_S(x_1,\ldots,x_M) = f_S(x_1)\ldots f_S(x_M),$$
$$f_I(x_1,\ldots,x_M) = f_I(x_1)\ldots f_I(x_M).$$

Для векторного M-мерного *гиперслучайного вектора* определим *среднее границ функции распределения, среднее плотностей распределения границ* и *среднее характеристических функций границ* соответственно следующим образом:

$$F_0(\vec{x}) = (F_S(\vec{x}) + F_I(\vec{x}))/2,$$
$$f_0(\vec{x}) = (f_S(\vec{x}) + f_I(\vec{x}))/2,$$
$$Q_0(\mathrm{j}\vec{\omega}) = (Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}) + Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}))/2.$$

Эти средние связаны между собой очевидными соотношениями, аналогичными скалярному случаю:

$$f_0(\vec{x}) = \frac{\partial^M F_0(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_M},$$

$$Q_0(\mathrm{j}\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\vec{x}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}.$$

В качестве основных числовых характеристик векторных гиперслучайных величин можно предложить *математические ожидания границ* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ *гиперслучайной* L-мерной *величины* $\vec{X} = (X_1,\ldots,X_L)$ с плотностями распределения границ $f_S(x_1,\ldots,x_L)$ и $f_I(x_1,\ldots,x_L)$, определяемые как

$$\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\varphi}(x_1,\ldots,x_L)\times$$
$$\times f_S(x_1,\ldots,x_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L, \tag{1.29}$$

$$\mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\varphi}(x_1,\ldots,x_L)\times$$
$$\times f_I(x_1,\ldots,x_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L \tag{1.30}$$

(если интегралы существуют).

Частным случаем характеристик (1.29), (1.30) являются *математические ожидания границ* $\vec{m}_{Sx}$ и $\vec{m}_{Ix}$ *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$, представляющие собой математические ожидания границ функции $\vec{\varphi}(\vec{X})=\vec{X}$:

$$\vec{m}_{Sx}=\mathrm{M}_S\left[\vec{X}\right],\quad \vec{m}_{Ix}=\mathrm{M}_I\left[\vec{X}\right]. \tag{1.31}$$

Для L-мерного *гиперслучайного вектора* $\vec{X}$ с вещественными компонентами характеристикой разброса могут служить *дисперсии границ* $\vec{D}_{Sx}$, $\vec{D}_{Ix}$, представляющие собой математические ожидания границ соответственно функций

$$\vec{\varphi}_S(\vec{X})=((X_l-m_{Sx_l})^2,\quad l=\overline{1,L}),$$
$$\vec{\varphi}_I(\vec{X})=((X_l-m_{Ix_l})^2,\quad l=\overline{1,L})$$

и *среднеквадратические отклонения* $\vec{\sigma}_{Sx}$, $\vec{\sigma}_{Ix}$ *границ*, компоненты которых, определены как величины, равные квадратному корню из компонент векторов $\vec{D}_{Sx}$, $\vec{D}_{Ix}$, где m_{Sx_l} и m_{Ix_l} – l-е компоненты векторов $\vec{m}_{Sx}$ и $\vec{m}_{Ix}$ соответственно.

Для L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}}=\vec{X}+\mathrm{j}\vec{Y}$ характеристикой разброса могут служить *комплексные дисперсии границ* $\dot{\vec{D}}_{Sz}$, $\dot{\vec{D}}_{Iz}$, представляющие собой L-мерные математические ожидания векторов

$$((X_l - m_{Sx_l})^2 + \mathrm{j}(Y_l - m_{Sy_l})^2, \quad l = \overline{1, L}),$$

$$((X_l - m_{Ix_l})^2 + \mathrm{j}(Y_l - m_{Iy_l})^2, \quad l = \overline{1, L})$$

и *комплексные среднеквадратические отклонения границ* $\dot{\vec{\sigma}}_{Sz}$, $\dot{\vec{\sigma}}_{Iz}$, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент комплексных дисперсий границ $\dot{\vec{D}}_{Sz}$, $\dot{\vec{D}}_{Iz}$, а мнимые – корню из соответствующих мнимых компонент этих же величин.

Весьма полезными характеристиками могут быть *начальные моменты границ* $m_{S\nu_1 \ldots \nu_L}$ и $m_{I\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ L-мерной гиперслучайной вещественной величины $\vec{X}$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{S\nu_1 \ldots \nu_L} &= \mathrm{M}_S \left[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L} \right], \\ m_{I\nu_1 \ldots \nu_L} &= \mathrm{M}_I \left[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L} \right] \end{aligned} \tag{1.32}$$

(ν_l – целое положительное число, $l = \overline{1, L}$), а также *центральные моменты границ* $\mu_{S\nu_1 \ldots \nu_L}$ и $\mu_{I\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{S\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_S \left[(X_1 - m_{Sx_1})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{Sx_L})^{\nu_L} \right], \tag{1.33}$$

$$\mu_{I\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_I \left[(X_1 - m_{Ix_1})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{Ix_L})^{\nu_L} \right]. \tag{1.34}$$

Смешанные центральные моменты границ второго порядка $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$ вещественных гиперслучайных величин X_1 и X_2 можно назвать *ковариационными моментами границ,* смешанные начальные моменты границ второго порядка $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ – *корреляционными моментами границ,* а смешанные центральные моменты второго порядка, нормированные на соответствующие среднеквадратические отклонения $\vec{\sigma}_{Sx_1}$, $\vec{\sigma}_{Sx_2}$ и $\vec{\sigma}_{Ix_1}$, $\vec{\sigma}_{Ix_2}$ границ, – *коэффициентами корреляции границ*

$$r_S = \frac{\mu_{S_{11}}}{\sigma_{Sx_1}\sigma_{Sx2}}, \qquad r_I = \frac{\mu_{I_{11}}}{\sigma_{Ix_1}\sigma_{Ix2}}. \tag{1.35}$$

Ковариационные моменты границ $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$, корреляционные моменты границ $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ и математические ожидания границ m_{Sx_1}, m_{Sx_2}, m_{Ix_1} и m_{Ix_2} двух гиперслучайных величин X_1 и X_2 связаны между собой соотношениями

$$\begin{gathered} \mu_{S_{11}} = m_{S_{11}} - m_{Sx_1} m_{Sx_2}, \\ \mu_{I_{11}} = m_{I_{11}} - m_{Ix_1} m_{Ix_2}, \end{gathered} \tag{1.36}$$

аналогичными известному соотношению для случайных величин.

Определим *корреляционные моменты границ* $m_{S_{11}}$ и $m_{I_{11}}$ *комплексной гиперслучайной величины* $\dot{Z} = X + \mathrm{j}Y$ как математические ожидания границ произведения действительной и мнимой частей этой величины:

$$m_{S_{11}} = \mathrm{M}_S[XY], \qquad m_{I_{11}} = \mathrm{M}_I[XY],$$

а *ковариационные моменты границ* $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$ – как математические ожидания границ произведения ее центрированных вещественной и мнимой частей

$$\mu_{S_{11}} = \mathrm{M}_S[(X - m_{Sx})(Y - m_{Sy})],$$
$$\mu_{I_{11}} = \mathrm{M}_I[(X - m_{Ix})(Y - m_{Iy})].$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *некоррелированными,* если их ковариационные моменты границ равны нулю: $\mu_{S_{11}} = \mu_{I_{11}} = 0$. При этом $r_S = r_I = 0$ и корреляционные моменты границ, согласно выражению (1.36), связаны с математическими ожиданиями границ следующими зависимостями:

$$m_{S_{11}} = m_{Sx_1} m_{Sx_2}, \qquad m_{I_{11}} = m_{Ix_1} m_{Ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *ортогональными*, если корреляционные моменты границ равны нулю: $m_{S_{11}} = m_{I_{11}} = 0$. При этом ковариационные моменты границ $\mu_{S_{11}}$ и $\mu_{I_{11}}$, как видно из выражения (1.36), оказываются связанными с математическими ожиданиями границ следующим образом:

$$\mu_{S_{11}} = -m_{S\,x_1}\, m_{S\,x_2}\,, \quad \mu_{I_{11}} = -m_{I\,x_1}\, m_{I\,x_2}\,.$$

Если гиперслучайные величины X_1 и X_2 некоррелированы, то при гауссовских законах распределения границ оси *эллипсов рассеяния* ориентированы вдоль осей координат (рис. 1.3). Если существует линейная зависимость между этими величинами, то $r_S = r_I = 1$ и эллипсы рассеяния вырождаются в отрезки прямых (рис. 1.4):

$$x_2 = \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} x_1 + \left(m_{Sx_2} - \frac{\sigma_{Sx_2}}{\sigma_{Sx_1}} m_{Sx_1} \right), \; x_2 = \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} x_1 + \left(m_{Ix_2} - \frac{\sigma_{Ix_2}}{\sigma_{Ix_1}} m_{Ix_1} \right).$$

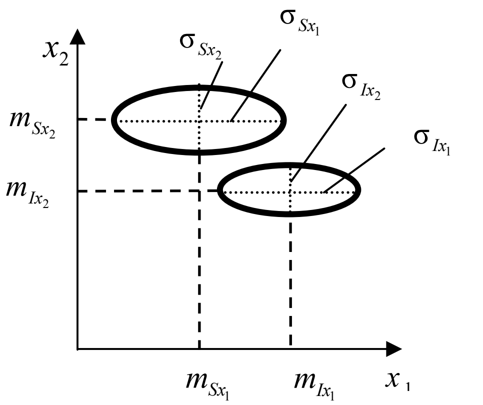


Рис. 1.3. Эллипсы рассеяния при гауссовских законах распределения границ: $\mu_{S_{11}} = \mu_{I_{11}} = 0$

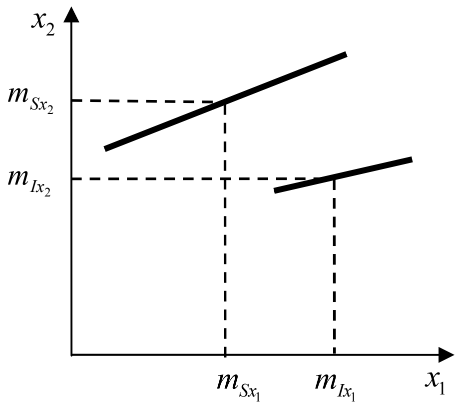


Рис. 1.4. Эллипсы рассеяния при гауссовских законах распределения границ: $r_S = r_I = 1$

Нетрудно показать, что из независимости гиперслучайных величин X_1 и X_2 следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин можно обобщить на случай N комплексных гиперслучайных величин. *Комплексные гиперслучайные величины* $\dot{X}_1, ..., \dot{X}_N$ назовем *некоррелированными* (попарно), если для всех $n \neq m, \quad n, m = \overline{1, N}$ имеют место следующие равенства:

$$\mathrm{M}_S[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_S[\dot{X}_n]\mathrm{M}_S[X_m^*],$$

$$\mathrm{M}_I[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_I[\dot{X}_n]\mathrm{M}_I[X_m^*],$$

и *ортогональными* (попарно), если при тех же условиях

$$\mathrm{M}_S[\dot{X}_n X_m^*] = \mathrm{M}_I[\dot{X}_n X_m^*] = 0.$$

Здесь и далее звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

В векторном случае для средних границ функции распределения можно ввести следующие характеристики: *вектор среднего математических ожиданий границ функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$

$$\mathrm{M}_0\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right]=(\mathrm{M}_S\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right]+\mathrm{M}_I\left[\vec{\varphi}(\vec{X})\right])/2,$$

вектор среднего математических ожиданий границ гиперслучайного вектора $\vec{X}$: $\vec{m}_{0x}=(\vec{m}_{Sx}+\vec{m}_{Ix})/2$, *вектор среднего дисперсий границ* $\vec{D}_{0x}=(\mathrm{M}_0\left[(X_l-m_{0x_l})^2\right],\quad l=\overline{1,L})$, *вектор среднего среднеквадратических отклонений границ* $\vec{\sigma}_{0x}$, компоненты которого равны корню из компонент дисперсии $\vec{D}_{0x}$, *среднее начальных моментов границ*

$$m_{0\nu_1\ldots\nu_L}=(m_{S\nu_1\ldots\nu_L}+m_{I\nu_1\ldots\nu_L})/2,$$

среднее центральных моментов границ

$$\mu_{0\nu_1\ldots\nu_L}=(\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L}+\mu_{I\nu_1\ldots\nu_L})/2$$

и др.

Для гиперслучайных скалярных величин X_1 и X_2 очевидным образом можно ввести *среднее ковариационных моментов границ* $\mu_{011}=(\mu_{S11}+\mu_{I11})/2$ и *среднее корреляционных моментов границ* $m_{011}=(m_{S11}+m_{I11})/2$. Если гиперслучайные величины некоррелированы, то среднее ковариационных моментов границ μ_{011} равно нулю, если же они ортогональны, то среднее корреляционных моментов m_{011} равно нулю.

Кроме указанных характеристик, можно использовать еще целый ряд других характеристик, аналогичных применяемым при описании векторных случайных величин.

ГЛАВА 2

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Определено понятие гиперслучайной функции и разработан математический аппарат описания гиперслучайных функций различных типов (скалярных и векторных, вещественных и комплексных). Главными характеристиками, используемыми для представления гиперслучайных функций, являются условные функции распределения, верхняя и нижняя границы функции распределения, а также плотности распределения границ и характеристические функции границ. Вспомогательными характеристиками являются математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные функции границ и др.

2.1. Скалярные гиперслучайные функции

Под *гиперслучайной функцией* $X(t)$ будем понимать числовую функцию независимого аргумента t, значение которой при любом фиксированном значении $t \in T$ (где T – область определения аргумента) представляет собой гиперслучайную величину, называемую *сечением*. Множество значений всех сечений гиперслучайной функции образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й *реализацией гиперслучайной функции* $X(t)$ (*выборочной функцией)* будем называть детерминированную функцию $x_i(t)$, которая для фиксированного опыта $i \in I$ и фиксированного условия $g \in G$ ставит в соответствие каждому $t \in T$ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайная функция может быть представлена множеством случайных функций $X(t)/g$: $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$. Она имеет черты как гиперслучайной величины, так и детерминированной функции: при фиксации значения аргумента превращается в гиперслучайную величину, а при фиксации опыта и условий – в детерминированную функцию. Множество реализаций I гиперслучайной функции может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Скалярную гиперслучайную функцию $X(t)$ будем представлять совокупностью ее сечений. Для описания можно использовать *условные функции распределения*

$$F(\vec{x};\vec{t}/g) = P\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_M) \le x_M / g\},$$

где $\vec{x} = (x_1,...,x_L)$ – L-мерный вектор значений гиперслучайной функции $X(t)$ в моменты времени $(t_1,...,t_L)$, образующие L-мерный вектор времени $\vec{t}$, $P\{A/g\}$ – вероятность выполнения неравенства A при условиях $g \in G$, а также *условные плотности распределения*

$$f(\vec{x};\vec{t}/g) = \frac{\partial^L F(\vec{x};\vec{t}/g)}{\partial x_1 ... \partial x_L},$$

условные характеристические функции

$$Q(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}/g) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x};\vec{t}/g) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}$$

и др.

Кроме того, можно использовать центральные и нецентральные моменты случайных функций $X(t)/g \quad (g \in G)$, в частности, математические ожидания $m_{x/g}(t) = \mathrm{M}[X(t)/g]$, дисперсии

$$D_{x/g}(t) = \mathrm{D}[X(t)/g] = \mathrm{M}[(X(t)/g - m_{x/g}(t))^2],$$

корреляционные моменты

$$K_{x/g}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[\big(X(t_1)/g\big)\big(X(t_2)/g\big)],$$

ковариационные моменты

$$R_{x/g}(t_1, t_2) = \mathrm{M}[(X(t_1)/g - m_{x/g}(t_1))(X(t_2)/g - m_{x/g}(t_2))]$$

и пр.

Для описания гиперслучайной функции $X(t)$ могут быть использованы также аналоги перечисленных характеристик и параметров.

К числу вероятностных характеристик относятся *границы функции распределения* $F_S(\vec{x};\vec{t}),\ F_I(\vec{x};\vec{t})$, *плотности распределения границ* $f_S(\vec{x};\vec{t})$, $f_I(\vec{x};\vec{t})$ и *характеристические функции границ* $Q_S(j\vec{\omega};\vec{t})$, $Q_I(j\vec{\omega};\vec{t})$, определяемые соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} F_S(\vec{x};\vec{t}) &= \sup_{g \in G} P\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_M) \le x_M / g\}, \\ F_I(\vec{x};\vec{t}) &= \inf_{g \in G} P\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_M) \le x_M / g\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$f_S(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_S(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \quad f_I(\vec{x};\vec{t}) = \frac{\partial^L F_I(\vec{x};\vec{t})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x};\vec{t}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}, \\ Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x};\vec{t}) \exp(\mathrm{j}\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Эти характеристики обладают теми же свойствами, что и аналогичные характеристики векторной гиперслучайной величины (подраздел 1.3).

Ширина зоны неопределенности определяется функциями

$$\Delta F(\vec{x};\vec{t}\,) = F_S(\vec{x};\vec{t}\,) - F_I(\vec{x};\vec{t}\,),$$

$$\Delta f(\vec{x};\vec{t}\,) = f_S(\vec{x};\vec{t}\,) - f_I(\vec{x};\vec{t}\,)$$

и

$$\Delta Q(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}\,) = Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}\,) - Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{t}\,).$$

Для случайных функций эти функции равны нулю. При полной *неопределенности* (полном *хаосе* [11 – 12]) $\Delta F(\vec{x};\vec{t}\,) = 1$.

Представим гиперслучайную функцию $X(t)$ совокупностью L ее сечений $X(t_1),\dots,X(t_L)$. Разделим эти сечения на две группы. К первой группе отнесем любые M сечений, например, первые, а ко второй – остальные $L-M$ сечений. Тогда L-мерные плотности распределения границ $f_S(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L)$, $f_I(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L)$ связаны с M-мерными плотностями распределения границ $f_S(x_1,...,x_M;t_1,...,t_M)$, $f_I(x_1,...,x_M;t_1,...,t_M)$ и условными $L-M$-мерными плотностями распределения границ

$$f_S(x_{M+1},...,x_L;\, t_{M+1},...,t_L \,/\, x_1,...,x_M;t_1,...,t_M),$$

$$f_I(x_{M+1},...,x_L;t_{M+1},...,t_L \,/\, x_1,...,x_M;t_1,...,t_M)$$

следующими неравенствами

$$f_S(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L) \le f_S(x_1,...,x_M;t_1,...,t_M)\times$$

$$\times f_S(x_{M+1},...,x_L;t_{M+1},...,t_L \,/\, x_1,...,x_M;t_1,...,t_M),$$

$$f_I(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L) \ge f_I(x_1,...,x_M;t_1,...,t_M)\times$$

$$\times f_I(x_{M+1},...,x_L;t_{M+1},...,t_L \,/\, x_1,...,x_M;t_1,...,t_M),$$

вытекающими из аналогичных соотношений для векторной гиперслучайной величины.

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть *независимыми,* если двумерные плотности распределения границ факторизуются:

$$\begin{aligned} f_S(x_1,x_2;t_1,t_2) &= f_S(x_1;t_1)f_S(x_2;t_2), \\ f_I(x_1,x_2;t_1,t_2) &= f_I(x_1;t_1)f_I(x_2;t_2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Сечения $t_1,...,t_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ назовем *независимыми в совокупности,* если независимы в совокупности значения векторной гиперслучайной величины, соответствующие этим сечениям, т.е. возможно следующее представление плотностей распределения границ:

$$\begin{aligned} f_S(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L) &= \prod_{l=1}^{L} f_S(x_l;t_l), \\ f_I(x_1,...,x_L;t_1,...,t_L) &= \prod_{l=1}^{L} f_I(x_l;t_l). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Как и в случае случайных функций, из независимости в совокупности сечений гиперслучайной функции следует попарная их независимость. Обратное же утверждение неверно.

Математические ожидания границ функции $\varphi(X(t_1),...,X(t_L))$ *значений гиперслучайной функции* $X(t)$ в L точках $X_1 = X(t_1),\ldots,X_L = X(t_L)$ описываются выражениями

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}_S[\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_L))] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,\ldots,x_L) f_S(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L, \\ &\mathrm{M}_I[\varphi(X(t_1),\ldots,X(t_L))] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,\ldots,x_L) f_I(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для характеристики гиперслучайной функции $X(t)$ могут быть использованы *моментные функции границ. Начальными* L-мерными *моментными функциями границ* порядка

$\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть математические ожидания границ функции $\varphi[X(t_1),\ldots,X(t_L)] = X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)$:

$$\begin{aligned} m_{S\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) &= \mathrm{M}_S[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_S(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L, \\ m_{I\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) &= \mathrm{M}_I[X^{\nu_1}(t_1)\ldots X^{\nu_L}(t_L)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu_1}\ldots x_L^{\nu_L} f_I(x_1,\ldots,x_L;t_1,\ldots,t_L)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_L, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где ν_l – целое положительное число $(l = \overline{1,L})$.

Математические ожидания границ гиперслучайной функции $X(t)$ определим как

$$m_{Sx}(t) = \mathrm{M}_S[X(t)],\ m_{Ix}(t) = \mathrm{M}_I[X(t)].$$

Центральными L-мерными *моментными функциями границ* порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ будем называть следующие функции:

$$\begin{aligned} &\mu_{S\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \\ &= \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))^{\nu_1}\ldots(X(t_L) - m_{Sx}(t_L))^{\nu_L}], \\ &\mu_{I\nu_1\ldots\nu_L}(t_1,\ldots,t_L) = \\ &= \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))^{\nu_1}\ldots(X(t_L) - m_{Ix}(t_L))^{\nu_L}]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Частным случаем этих функций являются *дисперсии границ* $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$, определяемые как

$$\begin{aligned} D_{Sx}(t) &= \mathrm{D}_S[X(t)] = \mathrm{M}_S[(X(t) - m_{Sx}(t))^2], \\ D_{Ix}(t) &= \mathrm{D}_I[X(t)] = \mathrm{M}_I[(X(t) - m_{Ix}(t))^2]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Математические ожидания границ $m_{Sx}(t)$, $m_{Ix}(t)$ характеризуют средние значения гиперслучайной функции $X(t)$, рассчитанные для верхней и нижней границ плотности распределения, а дисперсии границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$ и *среднеквадратические отклонения границ*, определяемые как

$$\sigma_{Sx}(t) = \sqrt{D_{Sx}(t)}\,, \qquad \sigma_{Ix}(t) = \sqrt{D_{Ix}(t)}\,,$$

характеризуют степень разброса этой гиперслучайной функции относительно соответствующих математических ожиданий $m_{Sx}(t)$ и $m_{Ix}(t)$.

Нетрудно убедиться, что $m_{Sx}(t) \le m_{Ix}(t)$, а соотношение между $D_{Sx}(t)$ и $D_{Ix}(t)$ может быть любым.

Частными случаями выражений (2.7), (2.8) являются *ковариационные функции границ гиперслучайной функции*

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx}(t_1))(X(t_2) - m_{Sx}(t_2))],$$

$$R_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix}(t_1))(X(t_2) - m_{Ix}(t_2))]$$

и *корреляционные функции границ*

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)], \quad K_{Ix}(t_1,t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)]. \quad (2.10)$$

Они связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} R_{Sx}(t_1,t_2) &= K_{Sx}(t_1,t_2) - m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2), \\ R_{Ix}(t_1,t_2) &= K_{Ix}(t_1,t_2) - m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ковариационные и корреляционные функции границ, а также *нормированные ковариационные функции границ*

$$r_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1,t_2)}{\sigma_{Sx}(t_1)\sigma_{Sx}(t_2)}, \quad r_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ix}(t_1,t_2)}{\sigma_{Ix}(t_1)\sigma_{Ix}(t_2)} \quad (2.12)$$

характеризуют зависимость сечений гиперслучайной функции.

Сечения t_1, t_2 гиперслучайной функции $X(t)$ будем называть *некоррелированными,* если для этих сечений ковариационные функции границ $R_{Sx}(t_1,t_2) = R_{Ix}(t_1,t_2) = 0$. При этом, согласно выражению (2.11),

$$K_{Sx}(t_1,t_2) = m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2)\,,\ K_{Ix}(t_1,t_2) = m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2)\,.$$

Сечения t_1, t_2 *гиперслучайной функции* $X(t)$ будем называть *ортогональными,* если для них корреляционные функции границ $K_{Sx}(t_1,t_2) = K_{Ix}(t_1,t_2) = 0$.

При этом, согласно выражению (2.11),

$$R_{Sx}(t_1,t_2) = -m_{Sx}(t_1)m_{Sx}(t_2),\ R_{Ix}(t_1,t_2) = -m_{Ix}(t_1)m_{Ix}(t_2).$$

Понятия независимости, некоррелированности и ортогональности сечений гиперслучайной функции аналогичны таким же понятиям случайной функции. Если сечения гиперслучайной функции коррелированны, то они зависимы. Обратное утверждение неверно. Если сечения независимы, то они некоррелированы. Если сечения ортогональны, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми, как коррелированными, так и некоррелированными. Если математические ожидания границ хотя бы одного из двух рассматриваемых сечений равны нулю, то из ортогональности сечений следует их некоррелированность, а из некоррелированности – их ортогональность.

2.2. Векторные гиперслучайные функции

Векторной гиперслучайной функцией будем называть векторную функцию $\vec{X}(t)$, компоненты которой представляют собой скалярные гиперслучайные функции: $\vec{X}(t) = (X_1(t),...,X_H(t))$.

Векторную H-мерную гиперслучайную функцию $\vec{X}(t)$ можно описать в L сечениях границами HL-мерной совместной функции распределения $F_S(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H)$, $F_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H)$, где L-мерные векторы $\vec{x}_h$ и $\vec{t}_h$ характеризуют h-е компоненты вектора $\vec{X}(t)$ $(h = \overline{1,H})$. Функцию $\vec{X}(t)$ можно описать также *плотностями распределения границ*

$$f_S(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H),\ f_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H)$$

или *характеристическими функциями границ*

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega}_1,\ldots,\mathrm{j}\vec{\omega}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H),$$
$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega}_1,\ldots,\mathrm{j}\vec{\omega}_H;\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_H).$$

Гиперслучайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ будем называть *независимыми,* если при произвольном натуральном L ее $2L$-мерные совместные плотности распределения границ факторизуются:

$$\begin{aligned} f_S(\vec{x}_1,\vec{x}_2;\vec{t}_1,\vec{t}_2) &= f_S(\vec{x}_1;\vec{t}_1)f_S(\vec{x}_2;\vec{t}_2),\\ f_I(\vec{x}_1,\vec{x}_2;\vec{t}_1,\vec{t}_2) &= f_I(\vec{x}_1;\vec{t}_1)f_I(\vec{x}_2;\vec{t}_2). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Компоненты векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$ будем называть *независимыми в совокупности,* если факторизуются ее совместные плотности распределения границ:

$$\begin{aligned} f_S(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;t_1,\ldots,t_H) &= \prod_{h=1}^{H} f_S(\vec{x}_h;t_h),\\ f_I(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_H;t_1,\ldots,t_H) &= \prod_{h=1}^{H} f_I(\vec{x}_h;t_h). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Если компоненты векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$ попарно независимы, то не обязательно независимы в совокупности её компоненты.

Математическими ожиданиями границ $\vec{m}_S(t)$, $\vec{m}_I(t)$ будем называть детерминированные векторные функции, компоненты которых представляют собой математические ожидания границ соответствующих компонент векторной гиперслучайной функции $\vec{X}(t)$:

$$\vec{m}_S(t) = \mathrm{M}_S[\vec{X}(t)], \quad \vec{m}_I(t) = \mathrm{M}_I[\vec{X}(t)]. \tag{2.15}$$

Дисперсиями границ $\vec{D}_S(t)$, $\vec{D}_I(t)$ *векторной гиперслучайной функции* будем называть детерминированные векторные функции, компоненты которых являются дисперсиями границ соответствующих компонент функции $\vec{X}(t)$:

$$\vec{D}_S(t) = \mathrm{D}_S[\vec{X}(t)], \quad \vec{D}_I(t) = \mathrm{D}_I[\vec{X}(t)]. \qquad (2.16)$$

Ковариационными функциями границ H-мерной *векторной гиперслучайной функции* $\vec{X}(t)$ будем называть квадратные матрицы R_S, R_I размером $H \times H$ с элементами

$$\begin{aligned} R_{Shk}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_S[(X_h(t_1) - m_{Sx_h}(t_1))(X_k(t_2) - m_{Sx_k}(t_2))], \\ R_{Ihk}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_I[(X_h(t_1) - m_{Ix_h}(t_1))(X_k(t_2) - m_{Ix_k}(t_2))]. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Диагональные элементы этих матриц представляют собой ковариационные функции границ компонент. Недиагональные элементы описывают ковариационные связи между компонентами. Связи между компонентами можно охарактеризовать также *нормированными ковариационными функциями границ*, определяемыми одним из следующих образов:

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Shh}(t_1,t_2)R_{Skk}(t_1,t_2)}},$$

$$r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Ihh}(t_1,t_2)R_{Ikk}(t_1,t_2)}};$$

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Shk}(t_1,t_1)R_{Shk}(t_2,t_2)}},$$

$$r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{R_{Ihk}(t_1,t_1)R_{Ihk}(t_2,t_2)}};$$

$$r_{Shk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Shk}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sh}(t_1)D_{Sk}(t_2)}},$$

$$r_{Ihk}(t_1,t_2) = \frac{R_{Ihk}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Ih}(t_1)D_{Ik}(t_2)}},$$

где $h,k = \overline{1,H}$.

Свойства математических ожиданий границ, дисперсий границ, ковариационных функций границ и нормированных корреляционных функций границ векторной гиперслучайной функции совпадают со свойствами соответствующих характеристик векторных случайных функций (подраздел 1.3).

2.3. Корреляционные и ковариационные функции комплексных гиперслучайных функций

Корреляционными функциями границ $\dot{K}_{Sx}(t,t_2)$, $\dot{K}_{Ix}(t,t_2)$ *комплексной гиперслучайной функции* $\dot{X}(t)$ будем называть двумерные начальные моментные функции границ второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_S[\dot{X}(t_1)X^*(t_2)], \\ \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_I[\dot{X}(t_1)X^*(t_2)], \end{aligned} \tag{2.18}$$

а *ковариационными функциями границ* $\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2)$, $\dot{R}_{Ix}(t_1,t_2)$ – двумерные центральные моментные функции границ второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_S[(\dot{X}(t_1)-\dot{m}_{Sx}(t_1))(X^*(t_2)-m^*_{Sx}(t_2))], \\ \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_I[(\dot{X}(t_1)-\dot{m}_{Ix}(t_1))(X^*(t_2)-m^*_{Ix}(t_2))]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Нетрудно убедиться, что ковариационные и корреляционные функции границ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) + \dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2),$$

$$\dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) + \dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2).$$

Если математические ожидания границ равны нулю, то корреляционные функции границ равны соответствующим ковариационным функциям границ:

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2),\ \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2).$$

Значения комплексной гиперслучайной функции $\dot{X}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 будем называть *некоррелированными,* если ковариационные функции границ $\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) = 0$.

При этом

$$\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2), \quad \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = \dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2).$$

Значения комплексной гиперслучайной функции $\dot{X}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 будем называть *ортогональными,* если корреляционные функции границ $\dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) = 0$. Тогда

$$\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) = -\dot{m}_{Sx}(t_1)m^*_{Sx}(t_2), \quad \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) = -\dot{m}_{Ix}(t_1)m^*_{Ix}(t_2).$$

Взаимными корреляционными функциями границ $\dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2)$, $\dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2)$ и *взаимными ковариационными функциями границ* $\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2)$, $\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)$ *комплексных гиперслучайных функций* $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть двумерные соответственно начальные и центральные взаимные моментные функции границ второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_{Sxy}[\dot{X}(t_1)Y^*(t_2)], \\ \dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_{Ixy}[\dot{X}(t_1)Y^*(t_2)], \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_{Sxy}[(\dot{X}(t_1)-\dot{m}_{Sx}(t_1))(Y^*(t_2)-m^*_{Sy}(t_2))], \\ \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) &= \mathrm{M}_{Ixy}[(\dot{X}(t_1)-\dot{m}_{Ix}(t_1))(Y^*(t_2)-m^*_{Iy}(t_2))]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Корреляционные и ковариационные связи между сечениями комплексных гиперслучайных функций $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ в моменты времени t_1, t_2 описываются корреляционными и ковариационными матрицами границ:

$$\dot{K}_S(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{K}_{Sx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) \\ \dot{K}_{Syx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Sy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \tag{2.22}$$

$$\dot{K}_I(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{K}_{Ix}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) \\ \dot{K}_{Iyx}(t_1,t_2) & \dot{K}_{Iy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\dot{R}_S(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{R}_{Sx}(t_1,t_2) & R_{Sxy}(t_1,t_2) \\ \dot{R}_{Syx}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Sy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\dot{R}_I(t_1,t_2) = \begin{Vmatrix} \dot{R}_{Ix}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) \\ \dot{R}_{Iyx}(t_1,t_2) & \dot{R}_{Iy}(t_1,t_2) \end{Vmatrix}. \quad (2.25)$$

Комплексные гиперслучайные функции $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть *некоррелированными,* если для двух произвольных моментов времени t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$ взаимные ковариационные функции границ

$$\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Syx}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2) = \dot{R}_{Iyx}(t_1,t_2) = 0,$$

т.е. матрицы (2.24), (2.25) – диагональные.

Комплексные гиперслучайные функции $\dot{X}(t)$ и $\dot{Y}(t)$ будем называть *ортогональными,* если для двух произвольных моментов времени t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$ взаимные корреляционные функции границ

$$\dot{K}_{Sxy}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Syx}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Ixy}(t_1,t_2) = \dot{K}_{Iyx}(t_1,t_2) = 0,$$

т.е. матрицы (2.22), (2.23) – диагональные.

Нормированными ковариационными функциями границ будем называть функции

$$\dot{r}_{Sx}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Sx}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}, \quad \dot{r}_{Ix}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Ix}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}, \quad (2.26)$$

$$\dot{r}_{Sxy}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)}}, \quad \dot{r}_{Ixy}(t_1,t_2) = \frac{\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)}}. \quad (2.27)$$

Свойства ковариационных функций границ комплексных гиперслучайных функций аналогичны свойствам ковариационных функций комплексных случайных функций. В частности, ковариационные функции границ обладают свойствами:

– эрмитовости, т.е.

$$\dot{R}_{Sxy}(t_2,t_1)=R^*_{Syx}(t_2,t_1)\,,\qquad \dot{R}_{Ixy}(t_2,t_1)=R^*_{Iyx}(t_2,t_1)\,;$$

– ограниченности, а именно

$$\left|\dot{R}_{Sxy}(t_1,t_2)\right|^2\le D_{Sx}(t_1)D_{Sy}(t_2)\,,\left|\dot{R}_{Ixy}(t_1,t_2)\right|^2\le D_{Ix}(t_1)D_{Iy}(t_2)$$

(знаки равенства имеют место, когда $Y(t_1)=aX(t_1)+b$, где a и b – константы);

– неотрицательной определенности, под которой подразумевается, что для произвольных $t_1,...,t_L$ и комплексных $\dot{z}_1,...,\dot{z}_L$ величины $\sum_{l,m=1}^{L}\dot{R}_{Sx}(t_l,t_m)\dot{z}_l z^*_m$, $\sum_{l,m=1}^{L}\dot{R}_{Ix}(t_l,t_m)\dot{z}_l z^*_m$ вещественны и неотрицательны.

2.4. Гиперслучайные функционалы и операторы

Набор правил, которые ставят каждому объекту x класса (множества) A в соответствие объект y класса (множества) B, называется *преобразованием* или *отображением* класса A в класс B.

Будем различать три типа преобразований. Если элементы классов A и B – величины определенного типа, то y является *функцией аргумента* x. Если класс A – множество функций, а класс B – множество величин, то y является *функционалом* x. Если же оба класса A и B – множества функций, то преобразование представляет собой *оператор.*

Элементы множеств A и B могут быть детерминированного, случайного или гиперслучайного типа. Сочетания различных типов элементов множества A с различными типами элементов множества B порождают девять возможных комбинаций.

Под *гиперслучайным функционалом* $X(\varphi)$ будем понимать гиперслучайную функцию, заданную на множестве Φ_0 функций φ (детерминированных, случайных или гиперслучайных), значение которой при любой фиксированной $\varphi \in \Phi_0$ представляет собой гиперслучайную величину, называемую *сечением*. Множество значений всех сечений гиперслучайного функционала образует *пространство состояний* S (*фазовое пространство*).

i-й *реализацией гиперслучайного функционала* $X(\varphi)$ (*выборочным функционалом*) будем называть детерминированный функционал $x_i(\varphi)$, который для фиксированного опыта $i \in I$ и фиксированного условия $g \in G$ ставит в соответствие каждой функции φ одно из значений $x \in S$.

Гиперслучайный функционал имеет черты как гиперслучайной функции, так и детерминированного функционала. При фиксации функции φ он превращается в гиперслучайную функцию, а при фиксации опыта и условий – в детерминированный функционал. Множество реализаций I может быть ограниченным, счетным или несчетным.

Результатом воздействия гиперслучайного оператора является гиперслучайная функция. При этом не имеет значения тип исходной функции, на которую воздействует оператор.

Для описания гиперслучайных функционалов и гиперслучайных операторов можно использовать подходы, параметры и характеристики, применяемые для описания гиперслучайных функций.

Например, скалярный гиперслучайный функционал можно представить совокупностью сечений. Для описания можно использовать границы функции распределения $F_S(\vec{x};\vec{\varphi})$, $F_I(\vec{x};\vec{\varphi})$, плотности распределения границ $f_S(\vec{x};\vec{\varphi})$,

$f_I(\vec{x};\vec{\varphi})$ и характеристические функции границ $Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi})$, $Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi})$, определяемые соответственно следующим образом:

$$F_S(\vec{x};\vec{\varphi}) = \sup_{g\in G} P\{X(\varphi_1) \le x_1, ..., X(\varphi_M) \le x_M / g\},$$

$$F_I(\vec{x};\vec{\varphi}) = \inf_{g\in G} P\{X(\varphi_1) \le x_1, ..., X(\varphi_M) \le x_M / g\},$$

$$f_S(\vec{x};\vec{\varphi}) = \frac{\partial^L F_S(\vec{x};\vec{\varphi})}{\partial x_1 ... \partial x_L}, \quad f_I(\vec{x};\vec{\varphi}) = \frac{\partial^L F_I(\vec{x};\vec{\varphi})}{\partial x_1 ... \partial x_L},$$

$$Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S(\vec{x};\vec{\varphi}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x},$$

$$Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega};\vec{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_I(\vec{x};\vec{\varphi}) \exp(j\vec{\omega}\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x},$$

где $\vec{x} = (x_1, ..., x_L)$ – L-мерный вектор значений гиперслучайного функционала $X(\varphi)$ для вектора функций $(\varphi_1, ..., \varphi_L)$, $P\{A/g\}$ – вероятность выполнения неравенства A при условиях $g \in G$.

Для границ функции распределения гиперслучайного функционала могут быть рассчитаны центральные и нецентральные моменты, а также другие характеристики, несущие обобщенное представление о рассматриваемом функционале.

ГЛАВА 3

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ФУНКЦИЙ

Рассмотрен альтернативный подход к описанию гиперслучайных величин и функций, позволяющий характеризовать гиперслучайные явления, не прибегая к расчету границ функции распределения. Его основой служит вычисление границ центральных и нецентральных моментов: границ математического ожидания, дисперсии, корреляционного момента, ковариационного момента и др.

При вычислении границ моментов не требуется информации о границах функции распределения. Поэтому, в отличие от моментов границ, их расчет не сопряжен с большими вычислительными затратами.

3.1. Характеристики и параметры вещественных гиперслучайных величин

В первой главе для описания скалярных вещественных гиперслучайных величин использовались функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$ и рассчитанные на их основе различные характеристики и параметры: плотности распределения границ $f_S(x)$, $f_I(x)$, характеристические функции границ $Q_S(\mathrm{j}\omega)$, $Q_I(\mathrm{j}\omega)$, математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, среднеквадратические отклонения границ σ_{Sx}, σ_{Ix} и др.

Для описания гиперслучайных величин могут применяться характеристики и параметры другого типа, не основанные на границах функции распределения, например, границы плотности распределения и границы характеристической функции, определяемые для скалярной вещественной величины X соответственно следующим образом:

$$f_s(x) = \sup_{g\in G} f(x/g), \quad f_i(x) = \inf_{g\in G} f(x/g) \qquad (3.1)$$

и

$$Q_s(\mathrm{j}\omega) = \sup_{g\in G} Q(\mathrm{j}\omega/g), \quad Q_i(\mathrm{j}\omega) = \inf_{g\in G} Q(\mathrm{j}\omega/g),$$

где $f(x/g)$ – плотность распределения гиперслучайной величины X при условии $g \in G$ и $Q(\mathrm{j}\omega/g)$ – соответствующая характеристическая функция при условии $g \in G$.

Для описания гиперслучайной величины X можно использовать границы математического ожидания некоторой ее функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_s[\varphi(X)] &= \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g)\mathrm{d}x, \\ \mathrm{M}_i[\varphi(X)] &= \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x/g)\mathrm{d}x. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

К числу границ моментов относятся *верхняя и нижняя границы начального момента* ν-го порядка:

$$\begin{aligned} m_{s\nu} &= \mathrm{M}_s[X^\nu] = \sup_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g)\mathrm{d}x, \\ m_{i\nu} &= \mathrm{M}_i[X^\nu] = \inf_{g\in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g)\mathrm{d}x, \end{aligned} \qquad (3.3)$$

а также *границы центрального момента* ν -го порядка:

$$\mu_{s\nu} = \mathrm{M}_s[(X - m_{x/g})^\nu] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) \mathrm{d}x,$$
$$\mu_{i\nu} = \mathrm{M}_i[(X - m_{x/g})^\nu] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) \mathrm{d}x, \qquad (3.4)$$

где $m_{x/g} = \mathrm{M}[X/g]$ – математическое ожидание распределения при условии g, $\mathrm{M}[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Частным случаем границ моментов являются границы математического ожидания гиперслучайной величины X:

$$m_{sx} = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) \mathrm{d}x, \quad m_{ix} = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) \mathrm{d}x. \qquad (3.5)$$

Границы математического ожидания, как следует из выражений (3.2) и (3.3), являются границами начального момента первого порядка. Границами центрального момента второго порядка являются границы дисперсии $D_{sx} = \mu_{s2}$, $D_{ix} = \mu_{i2}$. Корни из этих величин $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$, $\sigma_{ix} = \sqrt{D_{ix}}$ представляют собой границы среднеквадратического отклонения.

В общем случае операторы $\mathrm{M}_s[\cdot]$, $\mathrm{M}_i[\cdot]$ не совпадают с операторами $\mathrm{M}_S[\cdot]$, $\mathrm{M}_I[\cdot]$, а границы моментов гиперслучайной величины $m_{s\nu}$, $m_{i\nu}$, $\mu_{s\nu}$, $\mu_{i\nu}$ не совпадают с моментами границ функции распределения $m_{S\nu}$, $m_{I\nu}$, $\mu_{S\nu}$, $\mu_{I\nu}$, рассмотренными в главе 1.

Границы плотности распределений и границы моментов несут информацию не о границах функции распределения, а о диапазоне изменения соответствующих характеристик при изменении условий g в пределах множества условий G. Таким образом, границы плотности и плотности границ – разные характеристики, а границы моментов и моменты границ – разные параметры, по-разному представляющие гиперслучайную величину.

Для пояснения причин возможных отличий границ характеристик от соответствующих характеристик границ на рис. 3.1 приведены несколько примеров функций распределения гиперслучайной величины X.

Из рисунка видно, что условные функции распределения могут не пересекаться (рис. 3.1 а, б), а могут пересекаться между собой (рис. 3.1 в, г). В случаях «а» и «б» границы двух первых моментов совпадают с соответствующими характеристиками границ, в случае «в» наблюдается частичное, а в случае «г» – полное несовпадение соответствующих характеристик.

Для описания векторной гиперслучайной величины $\vec{X} = (X_1, ..., X_L)$, наряду с границами L-мерной функции распределения $F_S(\vec{x})$, $F_I(\vec{x})$, L-мерной плотности распределения $f_S(\vec{x})$, $f_I(\vec{x})$ и L-мерной характеристической функции, можно использовать ряд параметров, основанных на определении *границ математического ожидания* M-мерной *векторной функции* $\vec{\varphi}(\vec{X})$ *гиперслучайной величины* $\vec{X}/g$:

$$\mathrm{M}_s[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1, ..., x_L) \times$$

$$\times f(x_1, ..., x_L / g) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_L \vec{e}_m,$$

$$\mathrm{M}_i[\vec{\varphi}(\vec{x})] = \sum_{m=1}^{M} \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x_1, ..., x_L) \times$$

$$\times f(x_1, ..., x_L / g) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_L \vec{e}_m,$$

где $\varphi_m(x_1, ..., x_L)$ – m-я компонента вектора $\vec{\varphi}(x_1, ..., x_L / g)$, $\vec{e}_m$ – m-ый орт этого вектора.

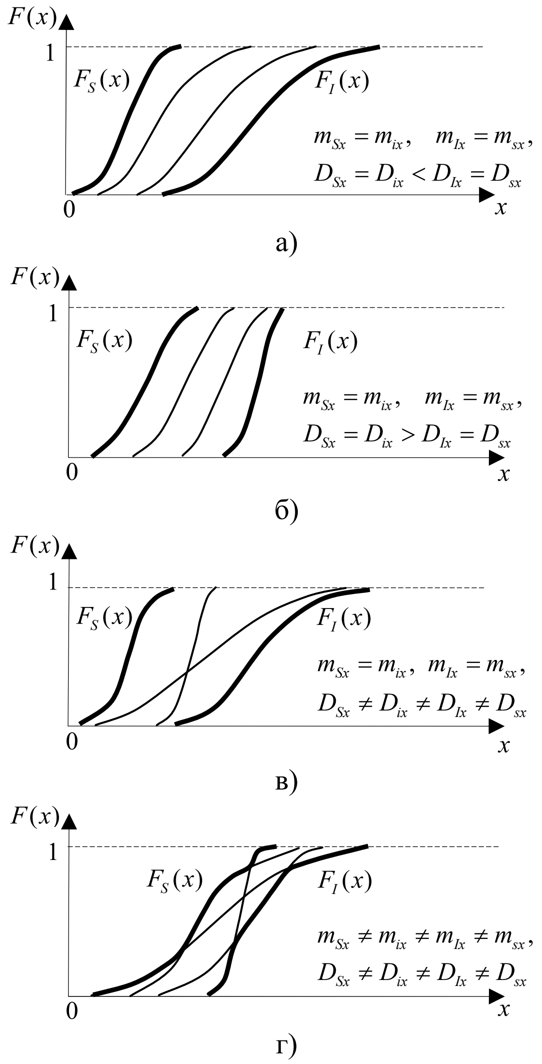


Рис. 3.1. Различные типы функции распределения. Тонкими линиями изображены условные функции распределения $F(x/g)$, а жирными – границы функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$

К этим параметрам относятся *границы* L-мерного *математического ожидания* $\vec{m}_{sx}$, $\vec{m}_{ix}$ *векторной гиперслучайной величины* $\vec{X}$:

$$\vec{m}_{sx} = \mathrm{M}_s[\vec{X}],\ \vec{m}_{ix} = \mathrm{M}_i[\vec{X}]$$

и границы L-мерной *дисперсии*:

$$\vec{D}_{sx} = \mathrm{M}_s[(X_l - m_{x_l/g})^2, \quad l = \overline{1, L}],$$

$$\vec{D}_{ix} = \mathrm{M}_i[(X_l - m_{x_l/g})^2, \quad l = \overline{1, L}],$$

где $m_{x_l/g}$ – l-я компонента вектора условного математического ожидания $\vec{m}_{x/g} = \mathrm{M}[\vec{X}/g]$.

С помощью границ дисперсии $\vec{D}_{sx}, \vec{D}_{ix}$ можно определить *границы* L-мерного *среднеквадратического отклонения* $\vec{\sigma}_{sx}, \vec{\sigma}_{ix}$ как векторы, компоненты которых представляют собой корни из компонент соответствующих границ дисперсии.

Параметрами векторной гиперслучайной величины $\vec{X}$ являются границы начальных моментов $m_{s\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{i\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$m_{s\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_s[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L}], \quad m_{i\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_i[X_1^{\nu_1} \ldots X_L^{\nu_L}],$$

и *границы центральных моментов* $\mu_{s\nu_1 \ldots \nu_L}$, $\mu_{i\nu_1 \ldots \nu_L}$ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$, определяемые как

$$\mu_{s\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_s[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\nu_1 \ldots \nu_L} = \mathrm{M}_i[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \ldots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}].$$

В двумерном случае $(L = 2)$ *границы смешанного начального момента второго порядка* m_{s11} и m_{i11} будем называть *границами корреляционного момента* и обозначать K_s

и K_i, *границы смешанного центрального момента второго порядка* μ_{s11} и μ_{i11} – *границами ковариационного момента* и обозначать R_s и R_i, а корреляционные моменты, нормированные на среднеквадратические отклонения, $r_s = \dfrac{R_s}{\sigma_{sx_1}\sigma_{sx_2}}$, $r_i = \dfrac{R_i}{\sigma_{sx_1}\sigma_{sx_2}}$ – *границами коэффициента корреляции.*

Границы моментов находятся в результате отбора экстремальных значений из множества значений, соответствующих разным условиям $g \in G$. При этом разным моментам соответствуют в общем случае разные условия g. Поэтому границы ковариационного момента

$$R_s \neq K_s - m_{sx_1} m_{sx_2},\ R_i \neq K_i - m_{ix_1} m_{ix_2}.$$

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *некоррелированными при всех условиях,* если границы их ковариационных моментов R_s и R_i равны нулю.

Гиперслучайные величины X_1 и X_2 будем называть *ортогональными при всех условиях,* если границы их корреляционных моментов K_s и K_i равны нулю.

Отметим, что понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях отличаются от введенных в главе 1 понятий некоррелированности и ортогональности, связанных с равенством нулю соответственно ковариационных и корреляционных моментов границ функции распределения.

Следует обратить внимание на то, что совокупность границ всех моментов, в отличие от совокупности всех моментов границ распределения, неоднозначно определяет границы функции распределения.

Границы моментов не используют информацию о границах функции распределения. Поэтому их расчет требует, как правило, меньших вычислительных затрат, чем расчёт моментов границ.

3.2. Параметры комплексных гиперслучайных величин

Для описания L-мерного гиперслучайного комплексного вектора $\dot{\vec{Z}} = \vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}$ можно использовать *границы комплексного математического ожидания*

$$\dot{\vec{m}}_{sz} = \dot{\mathrm{M}}_s[\vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}] = \sum_{l=1}^{L}[\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g_{sl})\mathrm{d}x_l + \\ + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g_{sl})\mathrm{d}y_l]\vec{e}_l,$$

$$\dot{\vec{m}}_{iz} = \dot{\mathrm{M}}_i[\vec{X} + \mathrm{j}\vec{Y}] = \sum_{l=1}^{L}[\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g_{il})\mathrm{d}x_l + \\ + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g_{il})\mathrm{d}y_l]\vec{e}_l,$$

где g_{sl} и g_{il} – значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$(\int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l / g)\mathrm{d}x_l)^2 + (\int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l / g)\mathrm{d}y_l)^2,$$

и границы ряда моментов, определяемых с помощью *границ комплексного математического ожидания* M-мерной *комплексной векторной функции* $\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})$:

$$\mathrm{M}_s[\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})] = \sum_{m=1}^{M}[\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}_m(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L)\times \\ \times f(x_1, y_1, \ldots, x_L, y_L / g_{sm})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L]\vec{e}_m,$$

$$\mathrm{M}_i[\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{Z}})]=\sum_{m=1}^{M}[\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}_m(x_1,y_1,...,x_L,y_L)\times$$
$$\times f(x_1,y_1,...,x_L,y_L/g_{im})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L]\vec{e}_m,$$

где $\dot{\varphi}_m(x_1,y_1,...,x_L,y_L)$ – m-я компонента вектора $\dot{\vec{\varphi}}(\dot{\vec{z}})$, g_{sm}, g_{im} – значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\varphi}_m(x_1,y_1,...,x_L,y_L)f(x_1,y_1,...,x_L,y_L/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}x_L\mathrm{d}y_L\right|^2.$$

К числу границ моментов комплексного вектора относятся, в частности, *границы комплексной дисперсии* $\dot{\vec{D}}_{sz}$, $\dot{\vec{D}}_{iz}$, определяемые как границы комплексного математического ожидания вектора

$$\sum_{l=1}^{L}[(X_l-m_{x_l/g})^2+\mathrm{j}(Y_l-m_{y_l/g})^2]\vec{e}_l.$$

С помощью границ комплексной дисперсии можно определить *границы комплексного среднеквадратического отклонения* $\dot{\vec{\sigma}}_{sz}$, $\dot{\vec{\sigma}}_{iz}$ как векторы, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент границ комплексной дисперсии $\dot{\vec{D}}_{sz}$, $\dot{\vec{D}}_{iz}$, а мнимые компоненты которых равны корню из соответствующих мнимых компонент этих границ.

Границами корреляционного момента комплексной гиперслучайной величины $\dot{Z}=X+\mathrm{j}Y$ назовем величины

$$K_{sz}=\mathrm{M}_s[XY],\ K_{iz}=\mathrm{M}_i[XY],$$

а *границами ковариационного момента* – величины

$$R_{sz}=\mathrm{M}_s[(X-m_{x/g})(Y-m_{y/g})],$$
$$R_{iz}=\mathrm{M}_i[(X-m_{x/g})(Y-m_{y/g})].$$

Отметим, что для интегральной характеристики гиперслучайных величин как вещественных, так и комплексных, можно использовать средние границ рассмотренных выше параметров.

3.3. Характеристики вещественных гиперслучайных функций

Для описания скалярной гиперслучайной функции $X(t)$, кроме рассмотренных в главе 2 характеристик (границ функции распределения $F_S(\vec{x},\vec{t})$, $F_I(\vec{x},\vec{t})$, границ плотности распределения $f_S(\vec{x},\vec{t})$, $f_I(\vec{x},\vec{t})$, границ характеристической функции $Q_S(\mathrm{j}\vec{\omega},\vec{t})$,. $Q_I(\mathrm{j}\vec{\omega},\vec{t})$, математических ожиданий границ $m_{Sx}(t)$, $m_{Ix}(t)$, дисперсий границ $D_{Sx}(t)$, $D_{Ix}(t)$, ковариационных $R_{Sx}(t_1,t_2)$, $R_{Ix}(t_1,t_2)$ и корреляционных $K_{Sx}(t_1,t_2)$, $K_{Ix}(t_1,t_2)$ функций границ и пр.), можно использовать ряд других характеристик, аналогичных рассмотренным в подразделе 3.1 для гиперслучайных величин.

Основой этих характеристик являются *границы математического ожидания функции* $\varphi(\vec{X};\vec{t}) = \varphi(X_1,...,X_L;t_1,...,t_L)$ *гиперслучайной функции* $X(t)$:

$$\mathrm{M}_s[\varphi(\vec{X};\vec{t}] = \sup_{g\in G}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(\vec{x};\vec{t})f(\vec{x};\vec{t}/g)\mathrm{d}\vec{x},$$

$$\mathrm{M}_i[\varphi(\vec{X};\vec{t})] = \inf_{g\in G}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(\vec{x};\vec{t})f(\vec{x};\vec{t}/g)\mathrm{d}\vec{x}.$$

Частным случаем являются *границы математического ожидания*

$$m_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[X(t)],\ m_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[X(t)],$$

границы дисперсии

$$D_{sx}(t) = \mathrm{M}_s[(X(t) - m_{x/g}(t))^2],$$

$$D_{ix}(t) = \mathrm{M}_i[(X(t) - m_{x/g}(t))^2],$$

где $m_{x/g}(t) = \mathrm{M}[X(t)/g]$ – значение математического ожидания в условиях $g \in G$, а также *границы начальных моментов*

$$m_{s\nu_1 \dots \nu_L}(t_1,...,t_L) = \mathrm{M}_s[X^{\nu_1}(t_1)...X^{\nu_L}(t_L)],$$
$$m_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1,...,t_L) = \mathrm{M}_i[X^{\nu_1}(t_1)...X^{\nu_L}(t_L)]$$

порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ и *границы центральных моментов*

$$\mu_{s\nu_1 \dots \nu_L}(t_1,...,t_L) = \mathrm{M}_s[(X(t_1) - m_{x/g}(t_1))^{\nu_1} \dots$$
$$\dots(X(t_L) - m_{x/g}(t_L))^{\nu_L}],$$
$$\mu_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1,...,t_L) = \mathrm{M}_i[(X(t_1) - m_{x/g}(t_1))^{\nu_1} \dots$$
$$\dots(X(t_L) - m_{x/g}(t_L))^{\nu_L}]$$

порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$.

Границы смешанного начального момента второго порядка $m_{s11}(t_1,t_2)$, $m_{i11}(t_1,t_2)$ будем называть *границами корреляционной функции* и обозначать $K_{sx}(t_1,t_2)$, $K_{ix}(t_1,t_2)$, границы смешанного центрального момента второго порядка – *границами ковариационной функции* и обозначать $R_{sx}(t_1,t_2)$ $R_{ix}(t_1,t_2)$, а *нормированные границы ковариационной функции* – обозначать следующим образом:

$$r_{sx}(t_1,t_2) = \frac{R_{sx}(t_1,t_2)}{\sigma_{sx}(t_1)\sigma_{sx}(t_2)}, \; r_{ix}(t_1,t_2) = \frac{R_{ix}(t_1,t_2)}{\sigma_{sx}(t_1)\sigma_{sx}(t_2)},$$

где $\sigma_{sx}(t)$ – верхняя граница среднеквадратического отклонения в момент t, представляющая собой корень из верхней границы дисперсии $D_{sx}(t)$.

Как и в случае границ корреляционного и ковариационного моментов гиперслучайных величин, из-за того, что границы корреляционной функции, границы ковариационной функции и границы математического ожидания могут определяться при различных условиях g, в общем случае

$$R_{sx}(t_1,t_2) \neq K_{sx}(t_1,t_2) - m_{sx}(t_1)m_{sx}(t_2),$$
$$R_{ix}(t_1,t_2) \neq K_{ix}(t_1,t_2) - m_{ix}(t_1)m_{ix}(t_2).$$

Отсчеты гиперслучайной функции $X(t)$ в моменты t_1, t_2 будем называть *некоррелированными при всех условиях,* если $R_{sx}(t_1,t_2) = R_{ix}(t_1,t_2) = 0$, и *ортогональными при всех условиях,* если $K_{sx}(t_1,t_2) = K_{ix}(t_1,t_2) = 0$.

Отметим, что понятия некоррелированности и ортогональности отсчетов гиперслучайной функции, приведенные в главе 2, для описания ситуаций, когда соответствующие корреляционные и ковариационные функции границ распределения равны нулю, отличаются от представляемых понятий.

Из некоррелированности и ортогональности отсчетов не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность при всех условиях. В общем случае и из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Последнее связано с тем, что границы функции распределения $F_S(\vec{x};\vec{t})$, $F_I(\vec{x};\vec{t})$ не всегда принадлежат множеству условных функций распределения $F(\vec{x};\vec{t}\,/\,g)$, $g \in G$.

Если же границы функции распределения все же принадлежат этому множеству, то из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Обратное утверждение неверно.

Следует обратить внимание, что так же, как и в случае гиперслучайных величин, множество границ всех моментов неоднозначно определяет границы распределения.

3.4. Характеристики комплексных гиперслучайных функций

Основой описания комплексной гиперслучайной функции $\dot{Z}(t) = X(t) + \mathrm{j}Y(t)$ могут выступать *границы математического ожидания комплексной функции* $\dot{\varphi}(\vec{\dot{Z}};\vec{t}\,) = \dot{\varphi}(X_1, Y_1, ..., X_L, Y_L; t_1, ..., t_L)$:

$$\mathrm{M}_s[\dot{\varphi}(\vec{Z};t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L) \times$$

$$\times f(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L / g_s) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}x_L \mathrm{d}y_L,$$

$$\mathrm{M}_i[\dot{\varphi}(\vec{Z};t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L) \times$$

$$\times f(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L / g_i) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}x_L \mathrm{d}y_L,$$

где g_s, g_i – значения g, при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$|\int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L) \times$$

$$\times f(x_1, y_1, ..., x_L, y_L; t_1, ..., t_L / g) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}x_L \mathrm{d}y_L |^2.$$

В частности, когда

$$\dot{\varphi}(\dot{Z}(t)) = X(t) + \mathrm{j}Y(t),$$

получаем *границы математического ожидания*

$$\dot{m}_{sz}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x; t / g_s) \mathrm{d}x + \mathrm{j} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(y; t / g_s) \mathrm{d}y,$$

$$\dot{m}_{iz}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t/g_i)\mathrm{d}x+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} yf(y;t/g_i)\mathrm{d}y,$$

когда

$$\dot{\varphi}(\dot{Z}(t))=(X(t)-m_{x/g}(t))^2+\mathrm{j}(Y(t)-m_{y/g}(t))^2,$$

имеем *границы дисперсии*

$$\dot{D}_{sz}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x/g_s}(t))^2 f(x;t/g_s)\mathrm{d}x+$$
$$+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_{y/g_s}(t))^2 f(y;t/g_s)\mathrm{d}y,$$
$$\dot{D}_{iz}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x/g_i}(t))^2 f(x;t/g_i)\mathrm{d}x+$$
$$+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_{y/g_i}(t))^2 f(y;t/g_i)\mathrm{d}y.$$

ГЛАВА 4

СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Формализованы понятия, стационарности и эргодичности гиперслучайных функций. Предложены различные характеристики, описывающие стационарные и эргодические гиперслучайные функции. Исследованы свойства этих характеристик. Разработаны спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций.

4.1. Стационарные гиперслучайные функции

Гиперслучайную функцию $X(t)=\left\{X(t)/g\in G\right\}$, где $X(t)/g$ – случайная функция при условии g, назовем *стационарной в узком смысле* (*строго*), если границы ее L-мерных распределений при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2-t_1,...,t_L-t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t. *Гиперслучайные функции,* не относящиеся к этим функциям, будем называть *нестационарными в узком смысле.*

Свойства стационарной гиперслучайной функции подобны свойствам стационарной случайной функции: границы многомерной функции распределения, многомерные плотности распределения границ, многомерные характеристические функции границ не зависят от смещения по t. Кроме того, перечисленные одномерные характеристики не зависят от аргумента t, а двумерные характеристики зависят от разности $\tau = t_2 - t_1$ значений аргумента t, т.е.

$$f_{Sx}(x;t) = f_{Sx}(x), \qquad f_{Ix}(x;t) = f_{Ix}(x),$$

$$f_{Sx}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{Sx}(x_1, x_2; \tau),$$

$$f_{Ix}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{Ix}(x_1, x_2; \tau).$$

Моментные функции границ стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ обладают следующими свойствами: математические ожидания границ и дисперсии границ постоянны ($m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix}$, $D_{Sx}(t) = D_{Sx}$, $D_{Ix}(t) = D_{Ix}$), а корреляционные функции границ

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)], \; K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)],$$

ковариационные функции границ

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx})(X(t_2) - m_{Sx})],$$

$$R_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix})(X(t_2) - m_{Ix})]$$

и нормированные ковариационные функции границ

$$r_{Sx}(t_1, t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1) D_{Sx}(t_2)}}, \; r_{Ix}(t_1, t_2) \frac{R_{Ix}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{Ix}(t_1) D_{Ix}(t_2)}}$$

не зависят от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = K_{Sx}(\tau), \qquad K_{Ix}(t_1, t_2) = K_{Ix}(\tau),$$

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = R_{Sx}(\tau), \qquad R_{Ix}(t_1, t_2) = R_{Ix}(\tau),$$

$$r_{Sx}(\tau) = R_{Sx}(\tau) / D_{Sx}, \qquad r_{Ix}(\tau) = R_{Ix}(\tau) / D_{Ix}.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ *назовем стационарной в широком смысле*, если математические ожидания ее границ постоянны $(m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix})$, а корреляционные функции границ зависят только от разности значений аргумента t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)] = K_{Sx}(\tau),$$

$$K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)] = K_{Ix}(\tau).$$

Гиперслучайные функции, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Две *гиперслучайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ назовем *совместно стационарно связанными в широком смысле,* если математические ожидания их границ постоянны, а их взаимные корреляционные функции границ инвариантны к смещению вдоль оси t:

$$K_{Sxy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Sxy}(\tau),$$

$$K_{Ixy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Ixy}(\tau).$$

Отметим, что стационарность гиперслучайных функций в широком смысле не гарантирует их совместную стационарную связанность в широком смысле.

Ковариационные функции границ и нормированные ковариационные функции границ вещественных стационарных гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $|R_{Sx}(\tau)| \le D_{Sx}$, $|r_{Sx}(\tau)| \le 1$, $|R_{Ix}(\tau)| \le D_{Ix}$, $|r_{Ix}(\tau)| \le 1$;

2) максимумы ковариационных функций границ и нормированных ковариационных функций границ гиперслучайной функции имеют место при $\tau = 0$;

3) функции $R_{Sx}(\tau)$, $R_{Ix}(\tau)$, $r_{Sx}(\tau)$, $r_{Ix}(\tau)$ – четные;

4) $R_{Sxy}(\tau) = R_{Syx}(-\tau)$, $R_{Ixy}(\tau) = R_{Iyx}(-\tau)$, $r_{Sxy}(\tau) = r_{Syx}(-\tau)$, $r_{Ixy}(\tau) = r_{Iyx}(-\tau)$, где $R_{Sxy}(\tau)$, $R_{Ixy}(\tau)$ – взаимные

ковариационные функции границ, $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$ – нормированные взаимные ковариационные функции границ: $r_{Sxy}(\tau)=\dfrac{R_{Sxy}(\tau)}{D_{Sxy}}$, $r_{Ixy}(\tau)=\dfrac{R_{Ixy}(\tau)}{D_{Ixy}}$, $D_{Sxy}=R_{Sxy}(0)$, $D_{Ixy}=R_{Ixy}(0)$.

Гиперслучайную функцию $X(t)=\left\{X(t)/g\in G\right\}$ назовем *стационарной в узком смысле при всех условиях* $g\in G$, если при всех g условные ее L-мерные распределения при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2-t_1,\dots,t_L-t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Гиперслучайную функцию $X(t)$ назовем *стационарной в широком смысле при всех условиях* $g\in G$, если при любом фиксированном условии g условное математическое ожидание $m_{x/g}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x;t/g)\mathrm{d}x$ не зависит от аргумента t ($m_{x/g}(t)=m_{x/g}$), а условная корреляционная функция

$$K_{x/g}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

зависит лишь от разности значений аргумента t и условия g: $K_{x/g}(t_1,t_2)=K_{x/g}(\tau)$.

Отметим, что при этом условная ковариационная функция

$$R_{x/g}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_{x/g})(x_2-m_{x/g})\times$$
$$\times f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

также зависит только от τ и g.

Нетрудно убедиться, что границы математического ожидания

$$m_{sx}(t)=\sup_{g\in G}m_{x/g}(t),\ m_{ix}(t)=\inf_{g\in G}m_{x/g}(t)$$

стационарной в широком смысле при всех условиях g гиперслучайной функции не зависят от времени t, т.е. $m_{sx}(t) = m_{sx}$, $m_{ix}(t) = m_{ix}$, а границы корреляционной функции

$$K_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{x/g}(\tau),\ K_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{x/g}(\tau)$$

и границы ковариационной функции

$$R_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} R_{x/g}(\tau),\ R_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} R_{x/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Гиперслучайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ назовем совместно стационарно связанными при всех условиях g, если условные математические ожидания этих функций $m_{x/g}(t)$, $m_{y/g}(t)$ не зависят от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$, $m_{y/g}(t) = m_{y/g}$), а условная взаимно-корреляционная функция

$$K_{xy/g}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y; t_1, t_2 / g) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$K_{xy/g}(t_1, t_2) = K_{xy/g}(\tau).$$

При этом условная взаимно-ковариационная функция

$$R_{xy/g}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})(y - m_{x/g}) \times$$
$$\times f(x, y; t_1, t_2 / g) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

также инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$R_{xy/g}(t_1, t_2) = R_{xy/g}(\tau).$$

Нетрудно убедиться, что границы взаимно-корреляционной функции

$$K_{sxy}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{xy/g}(\tau),\ \ K_{ixy}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{xy/g}(\tau)$$

и границы взаимно-ковариационной функции

$$R_{sxy}(\tau)=\sup_{g\in G} R_{xy/g}(\tau),\ \ R_{ixy}(\tau)=\inf_{g\in G} R_{xy/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Следует обратить внимание, что понятия стационарной в широком смысле гиперслучайной функции и функции, стационарной в широком смысле при всех условиях, – разные понятия. Общими для них являются бесконечная длительность реализаций и вариантность к сдвигу определенных (при этом разных) характеристик.

4.2. Спектральное описание гиперслучайных функций

Спектральное представление гиперслучайных функций в ряде случаев существенно облегчает их анализ. В первую очередь это касается функций, обладающих свойством стационарности.

Назовем *спектральными плотностями мощности верхней и нижней границ* (*энергетическими спектрами границ*) стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ функции $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$, связанные с корреляционными функциями границ $K_{Sx}(f)$, $K_{Ix}(f)$ следующими соотношениями:

$$S_{Sxx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} K_{Sx}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{Ixx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} K_{Ix}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$K_{Sx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{Sxx}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ix}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{Ixx}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

Спектральные плотности мощности границ обладают свойствами, характерными для спектральной плотности мощности случайного процесса: энергетические спектры (вне зависимости от того является ли функция $X(t)$ вещественной или комплексной) действительны и неотрицательны, т.е. $S_{Sxx}(f) \geq 0$, $S_{Ixx}(f) \geq 0$; спектральные плотности мощности границ действительной гиперслучайной функции $X(t)$ четные, т.е. $S_{Sxx}(f) = S_{Sxx}(-f)$, $S_{Ixx}(f) = S_{Ixx}(-f)$ (это следует из того, что корреляционные функции границ стационарных гиперслучайных функций четные).

Назовем *гиперслучайным белым шумом* стационарную гиперслучайную функцию $N(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями границ, у которой спектральные плотности мощности границ представляют собой постоянные величины, т.е.

$$S_{Snn} = \frac{N_S}{2}, \; S_{Inn} = \frac{N_I}{2},$$

где N_S, N_I – константы.

Нетрудно убедиться, что корреляционные функции границ гиперслучайного белого шума описываются с помощью δ-функции:

$$K_{Sn}(\tau) = \frac{N_S}{2}\delta(\tau), \quad K_{In}(\tau) = \frac{N_I}{2}\delta(\tau).$$

Заметим, что этим же выражением описываются и ковариационные функции границ гиперслучайного белого шума.

Следует обратить внимание на то, что при определении гиперслучайного белого шума, так же, как и при определении случайного белого шума, не использованы понятия гауссовости и независимости сечений. Это означает, что гиперслучайный белый шум может быть негауссовским и с зависимыми (в том смысле, как это понимается в теории гиперслучайных явлений) сечениями.

Метод спектрального описания гиперслучайных функций допускает обобщение на случай стационарно связанных гиперслучайных функций.

Взаимными спектральными плотностями мощности границ двух стационарно связанных гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ будем называть детерминированные функции $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$, определяемые как преобразование Фурье взаимных корреляционных функций границ $K_{Sxy}(\tau)$ и $K_{Ixy}(\tau)$:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Sxy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Ixy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Взаимные корреляционные функции границ связаны с взаимными спектральными плотностями мощности границ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{Sxy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Sxy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ixy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Ixy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

В отличие от спектральных плотностей мощности границ одной гиперслучайной функции, взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями. Кроме того, они не являются четными, однако обладают свойствами эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = S^{*}_{Syx}(f),$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = S^{*}_{Iyx}(f).$$

Нетрудно убедиться, что взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$, $\dot{S}_{Ixy}(f)$ функций $X(t)$ и $Y(t)$

связаны со спектральными плотностями мощности границ $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$ и $S_{Syy}(f)$, $S_{Iyy}(f)$ этих функций следующими неравенствами:

$$\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2 \le S_{Sxx}(f) S_{Syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2 \le S_{Ixx}(f) S_{Iyy}(f).$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *функции частотной когерентности границ* $\gamma^2_{Sxy}(f)$, $\gamma^2_{Ixy}(f)$, определяемые подобно функции частотной когерентности двух случайных функций:

$$\gamma^2_{Sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2}{S_{Sxx}(f) S_{Syy}(f)},$$

$$\gamma^2_{Ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2}{S_{Ixx}(f) S_{Iyy}(f)}.$$

Функции частотной когерентности границ лежат в интервале [0,1]. Если функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то для всех $f \ne 0$ $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 0$, если же они линейно связаны, то $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 1$. Функции частотной когерентности границ подобны нормированным ковариационным функциям границ $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$, однако в отличие от последних, они характеризуют не только линейные, но и нелинейные связи между гиперслучайными функциями.

Мгновенным спектром гиперслучайной функции $X(t) = \left\{ X(t)/g \in G \right\}$ при условии g будем называть комплексную гиперслучайную функцию $\dot{S}_{x/g}(f)$, связанную с наблюдаемым при условии g процессом $X(t)/g$ преобразованием Фурье:

$$\dot{S}_{x/g}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}X(t)/g\exp(-\mathrm{j}2\pi ft)\mathrm{d}t\,.$$

Мгновенный спектр стационарной при всех условиях g гиперслучайной функции обладает свойствами, подобными свойствам мгновенного спектра стационарной в широком смысле случайной функции. В частности, условное математическое ожидание $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)$ мгновенного спектра гиперслучайной функции $X(t)$ связано с условным математическим ожиданием $m_{x/g}$ функции $X(t)$ выражением $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)=m_{x/g}\delta(f)$.

Определим *условный спектр мощности* $S_{xx/g}(f)$ функции $X(t)$ как преобразование Фурье условной корреляционной функции $K_{x/g}(\tau)$:

$$S_{xx/g}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{x/g}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $K_{x/g}(\tau)$ связана с $S_{xx/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{x/g}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{xx/g}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f\,.$$

Нетрудно показать, что *условную корреляционную функцию мгновенного спектра* $K_{\dot{S}_x/g}(f_1,f_2)$ стационарной при всех условиях гиперслучайной функции $X(t)$ можно представить следующим образом:

$$K_{\dot{S}_x/g}(f_1,f_2)=S_{xx/g}(f_1)\delta(f_2-f_1)\,. \qquad (4.1)$$

Из выражения (4.1) следует, что мгновенный спектр стационарной гиперслучайной функции не является стационарной функцией; отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, ортогональны; при нулевых математических ожиданиях границ отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, не только ортогональны, но и некоррелированы.

Отметим, что условный спектр мощности $S_{xx/g}(f)$ связан с условным мгновенным спектром $\dot{S}_{x_T/g}(f)$, задаваемым на интервале T, следующим соотношением:

$$S_{xx/g}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)].$$

Границы энергетического спектра можно определить следующим образом:

$$S_{sxx}(f) = \sup_{g\in G} S_{xx/g}(f), \; S_{ixx}(f) = \inf_{g\in G} S_{xx/g}(f).$$

Нетрудно убедиться, что границы энергетического спектра стационарной гиперслучайной функции связаны с ее мгновенным спектром при условии g соотношениями

$$S_{sxx}(f) = \lim_{T\to\infty} \sup_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)],$$

$$S_{ixx}(f) = \lim_{T\to\infty} \inf_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)].$$

Назовем *гиперслучайным белым шумом при всех условиях* стационарную при всех условиях гиперслучайную функцию $N(t)$, у которой условное математическое ожидание равно нулю, а условный спектр мощности не зависит от частоты, т.е $S_{nn/g} = \frac{N_g}{2}$, где N_g – константа, зависящая в общем случае от условия g.

Условная корреляционная функция такого шума представляет собой δ-функцию: $K_{n/g}(\tau) = \frac{N_g}{2}\delta(\tau)$. Этим же выражением описывается и его ковариационная функция.

Заметим, что гиперслучайный белый шум при всех условиях может быть негауссовским.

Определим *условный взаимный спектр мощности* $\dot{S}_{xy/g}(f)$ *стационарных при всех условиях гиперслучайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ как преобразование Фурье условной взаимно-корреляционной функции $K_{xy/g}(\tau)$:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy/g}(\tau) \exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau) \mathrm{d}\tau,$$

где $K_{xy/g}(\tau)$ связана с $\dot{S}_{xy/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{xy/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{xy/g}(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f\tau) \mathrm{d}f \; .$$

Границы взаимного энергетического спектра можно определить следующим образом:

$$\dot{S}_{sxy}(f) = \sup_{g \in G} \dot{S}_{xy/g}(f) \, , \; \dot{S}_{ixy}(f) = \inf_{g \in G} \dot{S}_{xy/g}(f) \, .$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ и границы взаимного энергетического спектра $\dot{S}_{sxy}(f)$ и $\dot{S}_{ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями, не являются четными и обладают свойством эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = S^{*}_{yx/g}(f) \, , \; \dot{S}_{sxy}(f) = S^{*}_{syx}(f) \, , \; \dot{S}_{ixy}(f) = S^{*}_{iyx}(f) \, .$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *границы функции частотной когерентности* $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$, определяемые как

$$\gamma^2_{sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f) S_{syy}(f)} \, , \; \gamma^2_{ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f) S_{syy}(f)} \, .$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ связан с условными взаимными спектрами мощности $S_{xx/g}(f)$ и $S_{yy/g}(f)$ следующим неравенством:

$$\left|\dot{S}_{xy/g}(f)\right|^2 \le S_{xx/g}(f) S_{yy/g}(f),$$

однако границы взаимной спектральной плотности мощности $\dot{S}_{sxy}(f)$, $\dot{S}_{ixy}(f)$ не имеют подобной связи с границами спектральных плотностей мощности $S_{sxx}(f)$, $S_{ixx}(f)$ и $S_{syy}(f)$, $S_{iyy}(f)$, т.е. не всегда справедливы неравенства

$$\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2 \le S_{sxx}(f) S_{syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2 \le S_{ixx}(f) S_{iyy}(f).$$

Поэтому границы функции частотной когерентности $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$ могут принимать значения, превышающие единицу.

4.3. Сходимость гиперслучайных величин и функций

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие сходимости последовательности гиперслучайных величин.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и гиперслучайная величина X. Для всех $X_1, \dots, X_N$ и X определены множество условий G и условные функции распределения

$$F_1(x/g), \dots, F_N(x/g),\ F(x/g)\ \ (g \in G).$$

Тогда последовательность X

1) *сходится к* X *по функции распределения*, если при всех условиях $g \in G$ в каждой точке x, где $F(x/g)$ непрерывна,

$$F_N(x/g) \to F(x/g) \text{ при } N \to \infty;$$

2) *сходится к* X *в среднеквадратическом*, если при всех условиях $g \in G$ условные математические ожидания

$$\mathrm{M}[|X_N - X|^2 / g]$$

стремятся к нулю при $N \to \infty$, т. е при фиксированных условиях g случайная последовательность X/g сходится в среднеквадратическом к случайной величине X/g. При такой сходимости можно писать

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ X_N = X;$$

3) *сходится к* X *почти наверное*, если при всех условиях $g \in G$ условная вероятность $P(X_N \to X/g)$ равна единице при $N \to \infty$, т. е. при фиксированных условиях g случайная последовательность X/g сходится *с вероятностью единица* к случайной величине X/g. При такой сходимости можно писать

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X;$$

4) *сходится к* X *по вероятности*, если

$$P(|X_N - X| > \varepsilon/g)$$

стремится к нулю при всех условиях $g \in G$, $\varepsilon > 0$ и $N \to \infty$.

Отметим, что понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин допускают обобщения на последовательность гиперслучайных функций.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных функций

$$\mathrm{X}(t) = \{X_1(t), ..., X_N(t)\}$$

и гиперслучайная функция $X(t)$ $(t \in T)$, для которых определены условные функции распределения

$$F_1(x;t/g), ..., F_N(x;t/g),\ F(x;t/g).$$

Тогда последовательность $\mathrm{X}(t)$:

1) *сходится к* $X(t)$ *в среднеквадратическом*, если для всех $t \in T$ и всех $g \in G$

$$\mathrm{M}[|X_N(t) - X(t)|^2 / g] \to 0$$

при $N \to \infty$, т.е. $\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} X_N(t) = X(t)$;

2) *сходится к* $X(t)$ *почти наверное*, если для всех $t \in T$ и всех $g \in G$

$$P(X_N(t) \to X(t)/g) = 1$$

при $N \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} X_N(t) = X(t)$.

Сходимость последовательности гиперслучайных функций по функции распределения и *по вероятности* можно определить аналогично сходимости последовательности гиперслучайных величин.

4.4. Эргодические гиперслучайные функции

Некоторые гиперслучайные функции обладают специфическим свойством эргодичности. Рассмотрим гиперслучайную функцию $X(t)$, допускающую разложение на отдельные случайные функции, определенные на непересекающихся интервалах T_g длительностью T, на которых условия g сохраняются неизменными ($g = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Пусть $X_g(t)$ – фрагменты функции $X(t)$, соответствующие интервалам T_g и приведенные к интервалу $[-T/2, T/2)$:

$$X_g(t - T(g+0{,}5)) = \begin{cases} X(t), & \text{если} \quad t \in T_g, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin T_g. \end{cases}$$

Функция $X_g(t)$ при фиксированных условиях представляет собой случайную функцию аргумента $t \in [-T/2, T/2)$. Множество всех таких функций при неопределенных условиях ($g = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) образует гиперслучайную функцию $Y(t) = \{X_g(t), \quad g = 0, \pm 1, \ldots\}$. Положим, что при $T \to \infty$

гиперслучайная функция $Y(t)$ обладает свойством стационарности для всех условий g.

Любая функция $\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))$ от множества значений гиперслучайной функции $Y(t)$ в фиксированных точках $t_1,\ldots,t_L \in [-T/2, T/2)$ является гиперслучайной величиной. Если эта функция $\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))$ интегрируема, то при переменном T среднее ее значение

$$\bar{m}_\varphi(T) = \bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))] = \\ = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(Y(t_1+t),...,Y(t_L+t))\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

представляет собой гиперслучайную функцию, которую можно трактовать как последовательность гиперслучайных величин.

Гиперслучайную функцию $X(t)$, стационарную при всех условиях, будем называть *эргодической*, если при всех $g \in G$ и $T \to \infty$ среднее $\bar{m}_\varphi(T)$ функции $\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))$ почти наверное сходится к математическому ожиданию $m_\varphi = \mathrm{M}[\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))]$:

$$\lim_{T\to\infty} \bar{m}_\varphi(T) = m_\varphi . \tag{4.3}$$

Иными словами, ее гиперслучайную функцию $X(t)$ можно разложить в ряд эргодических случайных функций $X_g(t)$:

$$X(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_g X_g(t - T(g+0,5)) .$$

В этом случае среднее значение $\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(y(t_1),...,y(t_L))]$ функции $\varphi(y(t_1),...,y(t_L))$, рассчитанное по произвольно выбранной реализации $x(t)$ гиперслучайного процесса $X(t)$ на основе усреднения по времени t, описывает с вероятностью, равной единице, среднее, рассчитанное для функции

$\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))$ на основе усреднения множества реализаций рассматриваемого процесса $X(t)$.

Когда условия постоянны, гиперслучайный процесс вырождается в случайный. Тогда из выражений (4.2), (4.3) следует общепринятое определение стационарного эргодического случайного процесса [2, 16].

Назовем *границами среднего реализации* $x(t)$ *эргодической гиперслучайной функции* $X(t)$ следующие функции:

$$\bar{m}_{sx_T} = \sup_{g\in G}\frac{1}{T}\int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \bar{m}_{ix_T} = \inf_{g\in G}\frac{1}{T}\int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (4.4)$$

границами корреляционной функции реализации – функции

$$\bar{K}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g\in G}\frac{1}{T}\int_{T_g} x_g(t+\tau)\,x_g(t)\mathrm{d}t,$$

$$\bar{K}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g\in G}\frac{1}{T}\int_{T_g} x_g(t+\tau)\,x_g(t)\mathrm{d}t,$$

а *границами ковариационной функции реализации* – функции

$$\bar{R}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g}\frac{1}{T}\int_{T_g} [x_g(t+\tau)\ -\bar{m}_{x_T/g}][x_g(t)-\bar{m}_{x_T/g}]\mathrm{d}t,$$

$$\bar{R}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g}\frac{1}{T}\int_{T_g} [x_g(t+\tau)\ -\bar{m}_{x_T/g}][x_g(t)-\bar{m}_{x_T/g}]\mathrm{d}t,$$

где $\bar{m}_{x_T/g} = \frac{1}{T}\int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t$.

При $T\to\infty$ границы среднего реализации $\bar{m}_{sx}$, $\bar{m}_{ix}$ почти наверное совпадают с границами математического ожидания: $\bar{m}_{sx} = m_{sx}$, $\bar{m}_{ix} = m_{ix}$, границы корреляционной функции реализации $\overline{K}_{sx}(\tau)$, $\overline{K}_{ix}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами корреляционной функции $K_{sx}(\tau)$, $K_{ix}(\tau)$, границы ковариационной функции реализации $\overline{R}_{sx}(\tau)$, $\overline{R}_{ix}(\tau)$ – с границами ковариационной функции $R_{sx}(\tau)$, $R_{ix}(\tau)$, а верхняя и нижняя границы дисперсии реализации $\overline{D}_{sx} = \overline{R}_{sx}(0)$, $\overline{D}_{ix} = \overline{R}_{ix}(0)$ почти наверное совпадают с границами дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Отметим, что так же, как и в теории вероятностей, для определения эргодической гиперслучайной функции $X(t)$ можно использовать другой тип сходимости границ усредненных значений функции: например, вместо сходимости почти наверное сходимость в среднеквадратическом.

Приведенные результаты допускают обобщения на многомерный случай. В частности, *границами взаимной корреляционной функции реализаций* $x(t)$, $y(t)$ эргодических гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ можно назвать функции

$$\overline{K}_{sxy_T}(\tau) = \sup_g \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, y_g(t) \mathrm{d}t,$$

$$\overline{K}_{ixy_T}(\tau) = \inf_g \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, y_g(t) \mathrm{d}t,$$

а *границами взаимной ковариационной функции* этих *реализаций* – функции

$$\overline{R}_{sxy_T}(\tau) = \sup_g \frac{1}{T} \int_{T_g} (x_g(t+\tau) - \overline{m}_{x_T/g})(y_g(t) - \overline{m}_{y_T/g}) \mathrm{d}t,$$

$$\overline{R}_{ixyT}(\tau) = \inf_g \frac{1}{T} \int_{T_g} (x_g(t+\tau) - \overline{m}_{x_T/g})(y_g(t) - \overline{m}_{y_T/g}) \mathrm{d}t.$$

При $T \to \infty$ границы взаимной корреляционной функции реализаций $\bar{K}_{sxy}(\tau)$, $\bar{K}_{ixy}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами корреляционной взаимной функции $K_{sxy}(\tau)$, $K_{ixy}(\tau)$, а границы взаимной ковариационной функции реализаций $\bar{R}_{sxy}(\tau)$, $\bar{R}_{ixy}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами взаимной ковариационной функции $R_{sxy}(\tau)$, $R_{ixy}(\tau)$.

Аналогичным образом могут быть определены и другие усредненные характеристики.

ГЛАВА 5

ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

Формализовано понятие гиперслучайной выборки и определены ее свойства, предложена методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины и исследована сходимость гиперслучайных оценок к соответствующим точным характеристикам. Для гиперслучайных оценок определены условия сходимости оценок по вероятности к точным значениям. Доказана предельная теорема, определяющая закон распределения оценок границ функции распределения среднего при устремлении объема выборки к бесконечности.

5.1. Выборка гиперслучайной величины

Гиперслучайную величину X в общем случае можно представить множеством случайных величин X/g, наблюдаемых при условиях $g \in G$: $X = \{X/g \in G\}$. В частном случае, когда X/g представляет собой детерминированную величину, однозначно связанную с условием $g \in G$, гиперслучайная величина $X = \{X/g \in G\}$ вырождается во множество детерминированных величин.

Генеральной совокупностью гиперслучайной величины $X=\{X/g\in G\}$ будем называть бесконечное множество всех ее реализаций (членов или элементов), наблюдаемых при всех условиях $g\in G$. Это множество может быть как счетным, так и несчетным. Генеральную совокупность можно описать с помощью условных функций распределения $F_{x/g}(x)$ ($g\in G$), верхней и нижней границ функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моментов границ, границ моментов и других характеристик.

Конечное множество членов генеральной совокупности

$$\vec{x}=(x_1,...,x_N)=\{\vec{x}/g\in G\},$$

гиперслучайной величины X, полученное при конечном числе N опытов во всех условиях $g\in G$, будем называть *выборкой из генеральной совокупности,* а ее элементы $x_1,...,x_N$ – *выборочными значениями* или *реализациями.* Каждая компонента x_n/g $(n=\overline{1,N})$ вектора $\vec{x}/g$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ в условиях $g\in G$ представляет собой детерминированную величину, а каждая реализация x_n вектора $\vec{x}$ без конкретизации условий – множество детерминированных величин.

Будем полагать, что выборка $x_1,...,x_N$ принадлежит гиперслучайной величине $X=\{X/g\in G\}$ с условными функциями распределения $F_{x/g}(x)$ ($g\in G$), если она получена из генеральной совокупности, описываемой при фиксированных условиях g функцией распределения $F_{x/g}(x)$.

Бесконечное множество выборок объемом N, сформированных из одной генеральной совокупности, представляет собой N-мерный гиперслучайный вектор

$$\vec{X}=(X_1,...,X_N)=\{\vec{X}/g\in G\},$$

называемый в дальнейшем *гиперслучайной выборкой* или *выборочной совокупностью*. Компоненты X_n / g $(n = \overline{1, N})$ этого вектора в условиях $g \in G$ представляют собой случайные величины, а каждая компонента X_n вектора $\vec{X}$ без конкретизации условий – гиперслучайную величину. При этом случайные компоненты X_n / g имеют закон распределения, совпадающий с законом распределения генеральной совокупности $F_{x/g}(x)$.

Компоненты X_n гиперслучайной выборки $\vec{X}$ будем полагать взаимно независимыми. При этом границы $F_{S\vec{x}}(\vec{x})$, $F_{I\vec{x}}(\vec{x})$ распределения гиперслучайной выборки $\vec{X}$ допускают представление в виде

$$F_{S\vec{x}}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_{Sx}(x_n)\,,\; F_{I\vec{x}}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} F_{Ix}(x_n)\,.$$

Статистикой будем называть произвольную функцию $Y = Y(\vec{X})$ выборки $\vec{X}$, *вариационным* (*статистическим*) *рядом* в условиях $g \in G$ – реализации выборки $\vec{x} / g$, упорядоченные по возрастанию или убыванию, а *ранжированным рядом* в условиях $g \in G$ – реализации выборки $\vec{x} / g$, упорядоченные по убыванию.

По генеральной совокупности гиперслучайной величины можно вычислить различные ее характеристики, например, условные функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, условные математические ожидания $m_{x/g}$, математические ожидания границ m_{Sx}, m_{Ix}, границы математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, условные дисперсии $D_{x/g}$, дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, границы дисперсии D_{sx}, D_{ix} и пр. По реализациям с использованием определенных статистик можно вычислить оценки этих же характеристик, в частности, оценки условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценки границ функции распределения $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, оценки условных математических ожиданий $m^*_{x/g}$, оценки математических ожиданий границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки границ математического ожидания m^*_{sx}, m^*_{ix}, оценки условных дисперсий $D^*_{x/g}$, оценки дисперсии границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, оценки границ дисперсии D^*_{sx}, D^*_{ix} и др.

5.2. Оценка характеристик гиперслучайной величины

Функции распределения $F_{x/g}(x)$, границы функции распределения $F_{Sx}(x)$, $F_{Ix}(x)$, моменты $m_{x/g}$, m_{Sx}, m_{Ix}, m_{sx}, m_{ix}, $D_{x/g}$, D_{Sx}, D_{Ix}, D_{sx}, D_{ix} и пр. являются детерминированными характеристиками. Соответствующие же оценки $F^*_{x/g}(x)$, $F^*_{Sx}(x)$, $F^*_{Ix}(x)$, $m^*_{x/g}$, m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, m^*_{sx}, m^*_{ix}, $D^*_{x/g}$, D^*_{Sx}, D^*_{Ix}, D^*_{sx}, D^*_{ix} и пр. являются детерминированными, если получены по конкретной реализации гиперслучайной выборки $\vec{X}$, и случайными, если получены по генеральной совокупности гиперслучайной величины X.

Процедура формирования указанных оценок может строиться по следующей схеме. Для всего множества G условий g формируется выборка

$$\vec{x} = \{x_1, ..., x_N / g \in G\}.$$

По этой выборке для каждого условия g в отдельности рассчитывается оценка условных характеристик: оценка условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценка условного математического ожидания $m^*_{x/g}$, оценка условной дисперсии $D^*_{x/g}$ и др. По оценкам условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$ вычисляются оценки границ функции распределения

$$F^*_{Sx}(x) = \sup_{g\in G} F^*_{x/g}(x), \quad F^*_{Ix}(x) = \inf_{g\in G} F^*_{x/g}(x)$$

и оценки характеристик, характеризующие эти границы: математические ожидания границ m^*_{Sx}, m^*_{Ix}, оценки дисперсий границ D^*_{Sx}, D^*_{Ix} и пр. По оценкам условных величин определяются оценки границ соответствующих величин, например, по оценкам математических ожиданий $m^*_{x/g}$ – оценки границ математического ожидания $m^*_{sx} = \sup\limits_{g\in G} m^*_{x/g}$, $m^*_{ix} = \inf\limits_{g\in G} m^*_{x/g}$, по оценкам условных дисперсий $D^*_{x/g}$ – оценки границ дисперсии $D^*_{sx} = \sup\limits_{g\in G} D^*_{x/g}$, $D^*_{ix} = \inf\limits_{g\in G} D^*_{x/g}$ и т.д.

Определенные трудности можно ожидать при формировании выборки $\vec{x} = \{x_1, ..., x_N / g \in G\}$ из-за сложности обеспечения, контроля и поддержания условий $g \in G$. Однако вопрос облегчается тем, что для расчета искомых характеристик не требуются знания того, в каких именно условиях получены условные характеристики. Главное, чтобы были представлены на уровне условных характеристик все возможные условия g множества G и в массив данных, используемый для расчета этих характеристик, не попадали данные, соответствующие другим условиям. Обычно последнее требование можно обеспечить ограничением объема данных N, поскольку условия, хотя и меняются зачастую непрерывно, но меняются достаточно медленно, и поэтому на основе некоторой априорной информации оказывается возможным указать максимальное число последовательных элементов $N_{\max}$, для которых условия можно считать практически неизменными.

Это позволяет собирать данные на достаточно большом интервале наблюдения, не заботясь о том, каковы в конкретный момент времени условия и в какой последовательности они чередуются. Полученные данные далее можно разделять на фрагменты по $N_{\max}$ последовательных элементов в каждом и использовать для расчета промежуточных условных и затем конечных искомых оценок. Главное при таком подходе – обеспечить охват всех возможных условий наблюдения.

5.3. Сходимость оценок

Важным свойством ряда гиперслучайных оценок является то, что при увеличении объема выборки эти оценки сходятся по вероятности к соответствующим характеристикам. Нетрудно убедиться, что справедливо следующее положение.

Пусть $X_1,...,X_N$ – выборка гиперслучайной величины X объемом N, Θ^* / g – сформированная по выборке в условиях g случайная оценка, обладающая свойством сходимости по вероятности к параметру θ / g. Тогда гиперслучайная оценка $\Theta^* = \left\{\Theta^* / g \in G\right\}$ сходится по вероятности к множеству величин $\theta = \left\{\theta / g \in G\right\}$, а границы оценки $\Theta_s^* = \sup\limits_{g \in G} \Theta^* / g$, $\Theta_i^* = \inf\limits_{g \in G} \Theta^* / g$ – к соответствующим границам $\theta_s = \sup\limits_{g \in G} \theta / g$, $\theta_i = \inf\limits_{g \in G} \theta / g$.

Отсюда следует, что при увеличении объема выборки ($N \to \infty$) оценки границ выборочной функции распределения $F_S^*(x)$, $F_I^*(x)$ сходятся к границам функции распределения $F_S(x)$, $F_I(x)$, оценки моментов границ – к моментам границ, а оценки границ моментов – к границам моментов. В частности, оценки математического ожидания границ m_{Sx}^*, m_{Ix}^* сходятся к математическому ожиданию границ m_{Sx}, m_{Ix}, оценки дисперсии границ D_{Sx}^*, D_{Ix}^* – к дисперсии границ D_{Sx}, D_{Ix}, оценки границ математического ожидания m_{sx}^*, m_{ix}^* – к границам математического ожидания m_{sx}, m_{ix}, а оценки границ дисперсии D_{sx}^*, D_{ix}^* – к границам дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

5.4. Предельная теорема

Функцию распределения случайной величины назовем *фрагментарно-гауссовской,* если она описывается фрагментами гауссовских функций распределений. Фрагментарно-гауссовское распределение аналитически можно представить в виде

$$G(x) = \sum_{j=0}^{J-1} F(x/m_j, D_j) \operatorname{rect}\left[\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right],$$

где $F(x/m_j, D_j) = \Phi\left(\dfrac{x - m_j}{\sqrt{D_j}}\right)$ – гауссовская функция распределения с математическим ожиданием m_j и дисперсией D_j, $\operatorname{rect}[x]$ – П-образная функция:

$$\operatorname{rect}[x] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \quad x > 1, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_J$ – последовательный ряд точек на оси x, в которых происходит изменение вида распределения, $x_0 \to -\infty$, $x_J \to \infty$.

Для гиперслучайных величин справедлива теорема, аналогичная центральной предельной теореме теории вероятностей.

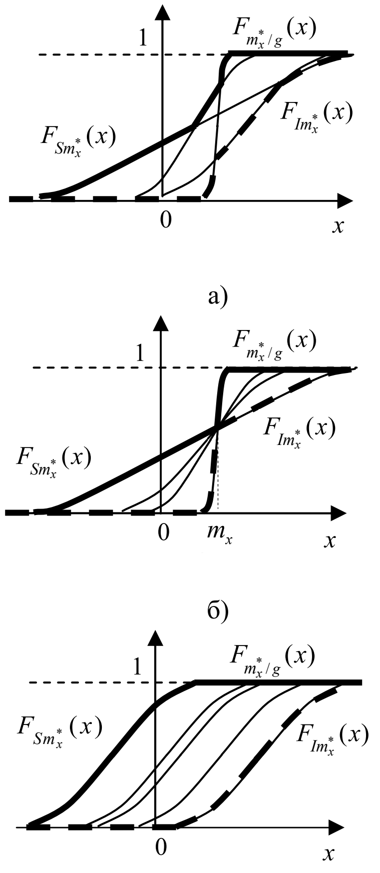
Теорема. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X/g \in G\}$ имеет конечные условные математические ожидания $m_{x/g}$ и конечные условные дисперсии $D_{x/g}$. Проводятся независимые испытания по N испытаний в каждых условиях. Тогда при $N \to \infty$ верхняя и нижняя границы $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ функции распределения выборочного среднего $m_x^* = \left\{ m_{x/g}^* \in G \right\}$, где $m_{x/g}^* = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n / g$, стремятся по вероятности к фрагментарно-гауссовским распределениям.

Доказательство теоремы основано на центральной предельной теореме для случайных величин (теореме Леви – Лиденберга). В соответствии с этой теоремой функция распределения $F_{m_{x/g}^*}(x)$ оценки случайной величины $m_{x/g}^*$ при $N \to \infty$ стремится по вероятности к гауссовскому распределению с математическим ожиданием $m_{x/g}$ и дисперсией $\dfrac{D_{x/g}}{N}$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{ \frac{(m_{x/g}^* - m_{x/g})\sqrt{N}}{\sqrt{D_{x/g}}} \le x \right\} = F(x/0,1) \quad \forall g \in G.$$

Границы функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ гиперслучайной величины m_x^* формируются из фрагментов функций распределения $F_{m_{x/g}^*}(x)$ случайных величин $m_{x/g}^*$ (рис. 5.1 а). Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Границы функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ среднего m_x^* при $N \to \infty$ и конечном количестве условий G нетрудно рассчитать по известным функциям распределения $F_{m_{x/g}^*}(x)$ условных средних $m_{x/g}^*$ ($N \to \infty$), принимая во внимание, что любые две кривые, описывающие гауссовские функции распределения, пересекаются не более, чем в одной точке.



в)

Рис. 5.1. Веер функций распределения $F_{m^*_{x/g}}(x)$ случайных величин $m^*_{x/g}$ (тонкие кривые), верхняя $F_{Sm^*_x}(x)$ (жирная сплошная кривая) и нижняя $F_{Im^*_x}(x)$ (жирная штриховая кривая) границы функции распределения гиперслучайной величины m^*_x, $N = \mathrm{const}$: а) – общий случай, б) – при постоянном математическом ожидании ($m_{x/g} = m_x$), в) – при постоянной дисперсии ($D_{x/g} = D_x$)

Для практики могут представлять особый интерес следствия из теоремы.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы и при всех условиях $g \in G$ условные математические ожидания одинаковые ($m_{x/g} = m_x$), а условные дисперсии $D_{x/g}$ – разные.

Тогда при $N \to \infty$ верхняя граница функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$ среднего m_x^* стремится по вероятности к фрагментарно-гауссовскому распределению, описываемому функцией

$$F_{Sm_x^*}(x) = \lim_{N\to\infty} \begin{cases} F\left(x / m_x, \dfrac{D_{sx}}{N}\right), & \text{если} \quad x \le m_x, \\ F\left(x / m_x, \dfrac{D_{ix}}{N}\right), & \text{если} \quad x > m_x, \end{cases}$$

а нижняя граница $F_{Im_x^*}(x)$ – к фрагментарно-гауссовскому распределению, описываемому функцией

$$F_{Im_x^*}(x) = \lim_{N\to\infty} \begin{cases} F\left(x / m_x, \dfrac{D_{ix}}{N}\right), & \text{если} \quad x \le m_x, \\ F\left(x / m_x, \dfrac{D_{sx}}{N}\right), & \text{если} \quad x > m_x, \end{cases}$$

где D_{sx}, D_{ix} – соответственно верхняя и нижняя границы дисперсии гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$.

Доказательство основано на том, что функции распределения случайных величин $m_{x/g}^*$ при выполнении оговоренных условий образуют веер гауссовских функций распределений, пересекающихся в точке $x = m_x$ (рис. 5.1 б). Отсюда следует справедливость утверждения.

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы и при всех условиях $g \in G$ условные математические ожидания $m_{x/g}$ –

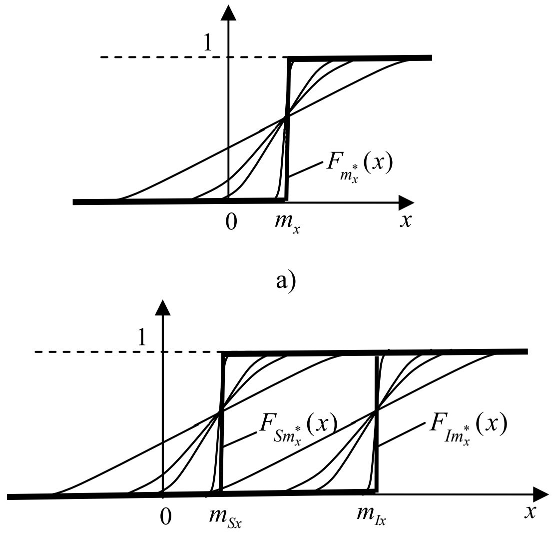
разные, а условные дисперсии – одинаковые ($D_{x/g} = D_x$). Тогда при $N \to \infty$ оценка верхней границы функции распределения среднего m_x^* стремится по вероятности к гауссовскому закону распределения с параметрами $\left(m_{ix}, \frac{D_x}{N} \right)$, а оценка нижней границы функции распределения – к гауссовскому закону распределения с параметрами $\left(m_{sx}, \frac{D_x}{N} \right)$, где m_{sx}, m_{ix} – соответственно верхняя и нижняя границы математического ожидания гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{g\in G} P \left\{ \frac{(m_{x/g}^* - m_{ix})\sqrt{N}}{\sqrt{D_x}} \le x \right\} = F(x/0,1),$$

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{g\in G} P \left\{ \frac{(m_{x/g}^* - m_{sx})\sqrt{N}}{\sqrt{D_x}} \le x \right\} = F(x/0,1).$$

Доказательство основано на том, что при выполнении оговоренных условий функции распределения случайных величин $m_{x/g}^*$ представляют собой веер непересекающихся гауссовских функций распределений (рис. 5.1 в). Отсюда следует справедливость утверждения.

Следствие 3. Из центральной предельной теоремы теории вероятностей для случайной величины X с конечным математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x следует, что при $N \to \infty$ функция распределения $F_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего $m_x^* = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n$ стремится к функции единичного скачка в точке m_x (рис. 5.2 а). При этом выборочное среднее m_x^* стремится к детерминированной величине m_x. Из рассмотренной выше теоремы для гиперслучайной величины X следует, что при $N \to \infty$ границы функции распределения среднего стремятся к функциям единичного скачка в точках математических ожиданий границ m_{Sx}, m_{Ix} (рис. 5.2 б). При этом гиперслучайная величина выборочного среднего приближается к интервальной величине.



б)

Рис. 5.2. Схемы формирования функции распределения $F_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего случайной величины (а) и границ функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{Im_x^*}(x)$ выборочного среднего гиперслучайной величины (б) при $N \to \infty$

Интервальные величины [13,14, 28 – 30] используются обычно для описания неточно полученных данных. Эти величины не являются случайными. Для интервальной величины вероятностная мера не определена, определен лишь диапазон значений этой величины. Приближенно интервальную величину

$\tilde{x} = [x_1, x_2]$ можно рассматривать как гиперслучайную величину X, для которой $G \equiv [x_1, x_2]$ и условная функция распределения $F_{x/g}(x)$ описывается для всех условий $g \in [x_1, x_2]$ функцией единичного скачка:

$$F_{x/g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < g, \\ 0,5, & \text{если} \quad x = g, \\ 1, & \text{если} \quad x > g. \end{cases}$$

Если условные математические ожидания гиперслучайной величины X одинаковы (выполняются условия следствия 1 рассматриваемой теоремы), то при $N \to \infty$ границы функции распределения выборочного среднего совпадают и представляют собой функцию единичного скачка в точке $m_{Sx} = m_{Ix}$. При этом гиперслучайная величина выборочного среднего вырождается в случайную величину, стремящуюся к детерминированной величине. Если же условные математические ожидания гиперслучайной величины X разные, то при $N \to \infty$ выборочное среднее является гиперслучайной величиной.

Таким образом, при бесконечном увеличении объема выборки тип величины, описывающей выборочное среднее, определяется математическими ожиданиями границ: при совпадении этих математических ожиданий выборочное среднее – случайная, а при несовпадении математических ожиданий – гиперслучайная величина.

ЧАСТЬ II

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ МОДЕЛИ

ГЛАВА 6

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Описаны точечный и интервальный методы оценки детерминированных величин, основанные на представлении оценок гиперслучайными моделями. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок, а для интервальных гиперслучайных оценок – понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки.

Показано, что из-за неконтролируемой изменчивости условий наблюдений гиперслучайные оценки детерминированных величин не состоятельны, а точность измерения – ограничена.

6.1. Модели измерения физических величин

При построении физических моделей измеряемых величин и их оценок, как правило, предполагают, что величины, подлежащие измерению, носят детерминированный, а их оценки из-за воздействия различных мешающих факторов – случайный характер. Поэтому для математического описания измеряемых величин часто используют детерминированные математические модели, а для описания их оценок – случайные (стохастические) модели с определенными законами распределения. На этом построена вся современная классическая теория измерений, являющаяся теоретической базой повсеместно используемой прикладной метрологии.

На рис. 6.1 – 6.2 для скалярной измеряемой величины и ее оценки схематично изображены функции распределения, соответствующие указанным *детерминированно-случайной и случайно-случайной моделям измерения*.

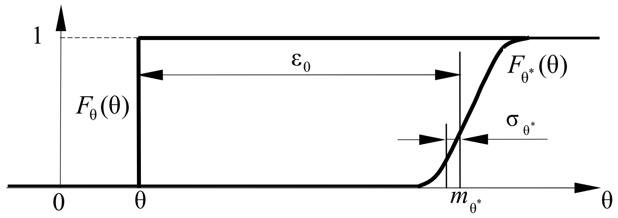


Рис. 6.1. Детерминированно-случайная модель измерения

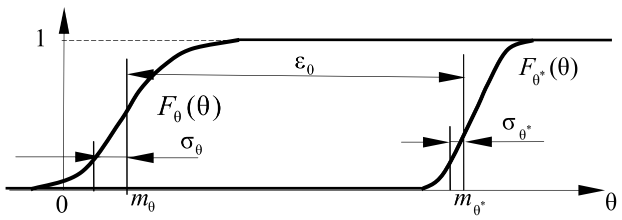


Рис. 6.2. Случайно-случайная модель измерения.

Приближенно детерминированную величину можно рассматривать как случайную величину с δ-образной плотностью распределения. Принимая это во внимание, на рис 6.1 детерминированная величина θ представлена скачкообразной функцией распределения.

На рис. 6.1 – 6.2 $F_{\theta^*}(\theta)$ – функция распределения случайной оценки Θ^*, $F_\theta(\theta)$ – функция распределения измеряемой случайной величины Θ, ε_0 – смещение оценки (если измеряемая величина детерминированная, то $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - \theta$, если – случайная, то $\varepsilon_0 = m_{\theta^*} - m_\theta$), m_{θ^*} – математическое ожидание оценки Θ^*, m_θ – математическое ожидание измеряемой случайной величины Θ, σ_θ, σ_{θ^*} – среднеквадратические отклонения соответственно измеряемой случайной величины Θ и ее оценки Θ^*.

Обобщением детерминированно-случайной и случайно-случайной моделей являются *детерминированно-гиперслучайная* (рис. 6.3) и *случайно-гиперслучайная* (рис. 6.4) *модели*. В первой модели измеряемая величина описывается детерминированной, а во второй – случайной величиной. В обеих моделях оценка представляется гиперслучайной величиной.

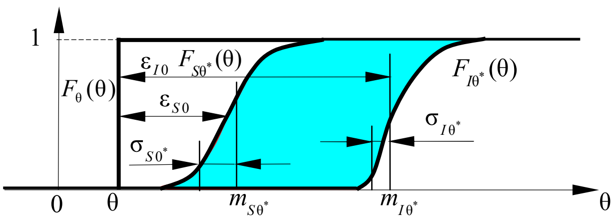


Рис. 6.3. Детерминированно-гиперслучайная модель измерения

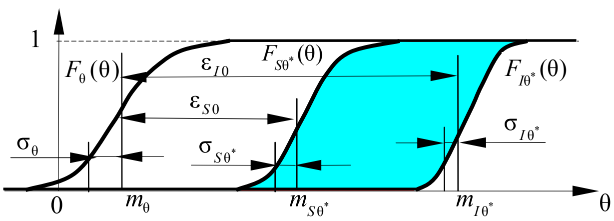


Рис. 6.4. Случайно-гиперслучайная модель измерения

На рисунках $F_{S\theta^*}(\theta)$ и $F_{I\theta^*}(\theta)$ – соответственно верхняя и нижняя границы функции распределения гиперслучайной оценки Θ^*, ε_{S0} и ε_{I0} – смещения верхней и нижней границ функции распределения гиперслучайной оценки относительно измеряемой величины (если эта величина детерминированная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - \theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - \theta$, если случайная, то $\varepsilon_{S0} = m_{S\theta^*} - m_\theta$, $\varepsilon_{I0} = m_{I\theta^*} - m_\theta$), $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ – математические ожидания верхней и нижней границ гиперслучайной оценки, $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ – среднеквадратические отклонения соответствующих границ гиперслучайной оценки. Зона неопределенности гиперслучайной оценки представлена затемненной областью.

Определенный интерес представляет *детерминированно-интервальная модель измерения*, в которой измеряемая величина рассматривается как детерминированная, а оценка – как интервальная величина.

На рис. 6.5 для величины θ и интервальной оценки Θ^* схематично изображена такая модель. Зона неопределенности интервальной величины представлена затемненной областью.

.

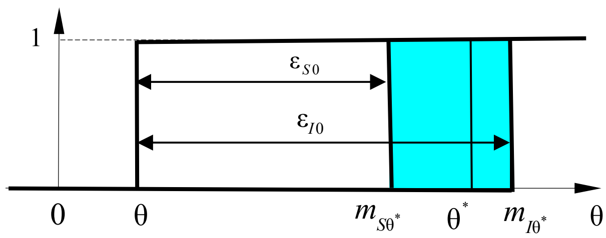


Рис. 6.5. Детерминированно-интервальная модель измерения

Следующим шагом обобщения можно считать *гиперслучайно-гиперслучайную модель измерения*, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами. Эта модель наиболее точно и адекватно описывает процедуру измерения.

Актуальность описания реальных величин с помощью достаточно сложных детерминированно-гиперслучайных, случайно-гиперслучайных и гиперслучайно-гиперслучайных моделей измерения следует из выдвинутой в работе [19] *гипотезы гиперслучайности*. Кратко ее можно сформулировать следующим образом: *все реальные явления, за исключением, возможно лишь, небольшого числа величин, рассматриваемых современной наукой как мировые физические константы, а также все без исключения реальные оценки носят гиперслучайный характер.*

Выдвинутая гипотеза базируется на том факте, что указанное большинство реальных явлений (событий, величин, процессов и полей) и все реальные оценки зависят от статистически неопределенных физических условий, меняющихся непредсказуемым образом.

Применительно к измеряемой величине и ее оценке в настоящей двух последующих главах этой гипотезе дается математическое обоснование.

6.2. Точечные гиперслучайные оценки детерминированных величин

Рассмотрим задачу оценки детерминированной величины θ по результатам наблюдения гиперслучайной величины $X = \{X / g \in G\}$. *Точечную гиперслучайную оценку* Θ^* будем рассматривать как некоторую статистику – функцию $Y = Y(\vec{X})$ выборки $\vec{X}$ объема N из гиперслучайной генеральной совокупности. Оценку Θ^* можно описать множеством случайных величин Θ^* / g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\Theta^* = \{\Theta^* / g \in G\}$. Случайная оценка Θ^* / g является функцией случайной выборки $\vec{X} / g$.

Конкретную величину θ^* гиперслучайной оценки Θ^* можно представить множеством детерминированных величин θ^*/g, соответствующих различным условиям $g \in G$: $\theta^* = \left\{\theta^*/g \in G\right\}$.

В зависимости от постановки задачи *точность точечной оценки* можно характеризовать по-разному. При фиксированном условии g в качестве точности оценки Θ^* может выступать величина $\Delta^2_{z/g}$ среднего квадрата *погрешности* $Z/g = \Theta^*/g - \theta$:

$$\Delta^2_{z/g} = \mathrm{M}[\left|\Theta^*/g - \theta\right|^2].$$

Для характеристики точности оценки без привязки к определенным условиям можно использовать интервал, в котором находится величина $\Delta^2_{z/g}$. Верхняя граница этого интервала

$$\Delta^2_{\max} = \max[\Delta^2_{Sz}, \Delta^2_{Iz}],$$

где $\Delta^2_{Sz} = \mathrm{M}_S[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$, $\Delta^2_{Iz} = \mathrm{M}_I[\left|\Theta^* - \theta\right|^2]$ – *средние квадраты погрешности*, рассчитанные с использованием соответственно верхней $F_{S\theta^*}(\theta)$ и нижней $F_{S\theta^*}(\theta)$ границ функции распределения.

Точность точечной оценки можно охарактеризовать также *границами среднего квадрата погрешности*:

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G} \mathrm{M}[\left|\Theta^*/g - \theta\right|^2], \quad \Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G} \mathrm{M}[\left|\Theta^*/g - \theta\right|^2].$$

6.3. Несмещенные и состоятельные гиперслучайные оценки детерминированных величин

Гиперслучайную оценку Θ^* детерминированной величины θ будем называть *несмещенной* (*несмещенной при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}$=M$[\Theta^* / g]$ условной случайной величины Θ^* / g равно оцениваемой величине: $m_{\theta^*/g} = \theta$. В противном случае оценку будем называть смещенной. Величина смещения (*систематическая погрешность*) в условиях g описывается выражением $\varepsilon_{0/g} = m_{\theta^*/g} - \theta$.

Необходимым условием несмещенности гиперслучайной оценки является равенство между собой математических ожиданий $m_{\theta^*/g}$ $\forall g \in G$. Отсюда вытекает, что при различных математических ожиданиях $m_{\theta^*/g}$ для разных условий g оценка Θ^* оказывается смещенной.

Следует обратить внимание, что даже для несмещенной оценки математические ожидания границ $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$ не всегда равны математическим ожиданиям $m_{\theta^*/g}$ условных случайных величин Θ^* / g. Равенство имеет место, если условия постоянны (при этом гиперслучайная величина вырождается в случайную величину).

Границы Δ^2_{Sz}, Δ^2_{Iz} и Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} можно представить следующим образом:

$$\Delta^2_{Sz} = m^2_{Sz} + \sigma^2_{Sz}, \qquad \Delta^2_{Iz} = m^2_{Iz} + \sigma^2_{Iz}, \qquad (6.1)$$

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g \in G}[m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}], \qquad \Delta^2_{sz} = \sup_{g \in G}[m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}], \qquad (6.2)$$

где $m_{Sz} = m_{S\theta^*} - \theta = \varepsilon_{S0}$, $m_{Iz} = m_{I\theta^*} - \theta = \varepsilon_{I0}$ – математические ожидания границ погрешности, представляющие собой смещения оценки (систематические погрешности) относительно соответственно верхней и нижней границ функции распределения, $\sigma^2_{Sz} = \mathrm{M}_S\left[(Z - m_{Sz})^2\right]$, $\sigma^2_{Iz} = \mathrm{M}_I\left[(Z - m_{Iz})^2\right]$ – дисперсии границ погрешности, $\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\theta^*/g}$=$\mathrm{M}\left[\left(\Theta^* / g - m_{\theta^*/g}\right)^2\right]$ – условная дисперсия погрешности, совпадающая с условной дисперсией оценки (рис. 6.6).

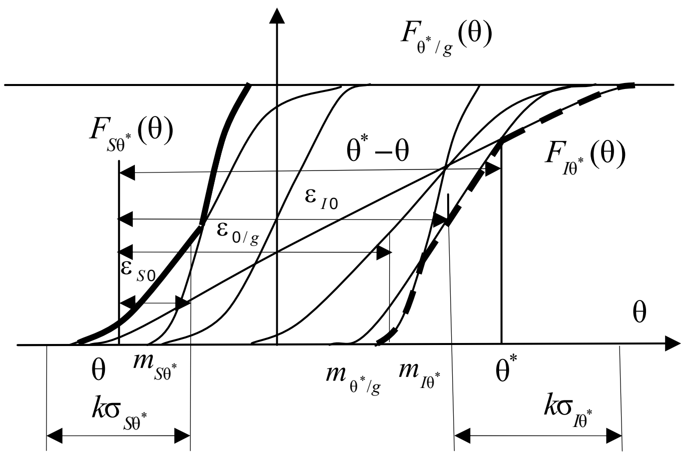


Рис. 6.6. Веер условных функций распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ (тонкие кривые) для различных условий g, верхняя $F_{S\theta^*}(\theta)$ (жирная сплошная кривая) и нижняя $F_{I\theta^*}(\theta)$ (жирная пунктирная кривая) границы функции распределения

Для характеристики погрешности Z можно использовать интервал $[\varepsilon_{S0} - k\sigma_{Sz},\ \varepsilon_{I0} + k\sigma_{Iz}]$, определяемый систематическими погрешностями ε_{S0}, ε_{I0}, среднеквадратическими отклонениями границ погрешности σ_{Sz}, σ_{Iz} и некоторой константой k, определяющей степень доверия. Интервал нахождения измеряемой величины θ при наличии оценки θ^* / g описывается неравенством

$$\theta^* / g - \varepsilon_{I0} - k\sigma_{Iz} < \theta < \theta^* / g - \varepsilon_{S0} + k\sigma_{Sz} .$$

Если условные функции распределения оценки Θ^* / g не пересекаются и с ростом условных математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ их условные дисперсии $\sigma^2_{\theta^*/g}$ увеличиваются (тип распределения «а» в соответствии с классификацией, введенной в подразделе 3.1) или уменьшаются (тип распределения «б»), этот интервал определяется границами смещения ε_{i0}, ε_{s0} и границами среднеквадратического отклонения оценки $\sigma_{i\theta^*}$, $\sigma_{s\theta^*}$. Для распределения типа «а» он равен $[\theta^* / g - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{s\theta^*}, \theta^* / g - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{i\theta^*}]$, а для распределения типа «б» – $[\theta^* / g - \varepsilon_{s0} - k\sigma_{i\theta^*}, \theta^* / g - \varepsilon_{i0} + k\sigma_{s\theta^*}]$.

Гиперслучайную оценку Θ^* *детерминированной величины* θ назовем *состоятельной*, если при всех условиях $g \in G$ она сходится по вероятности (подраздел 4.3) к этой величине:

$$\lim_{N\to\infty} P\{\left|\Theta^* / g - \theta\right| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall g \in G ,$$

где N — объем выборки для каждого вектора g, $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число. Состоятельность оценки означает, что она удовлетворяет закону больших чисел.

Нетрудно убедиться, что необходимым условием состоятельности гиперслучайной оценки детерминированной величины является вырождение её в случайную величину при $N \to \infty$. Это означает, что оценки, сохраняющие гиперслучайный характер при $N \to \infty$, оказываются не состоятельными.

Следует отметить, что реальные статистические условия наблюдения величин постоянно меняются. Поэтому представляется весьма правдоподобным предположение, что оценки всех реальных детерминированных величин, обычно рассматриваемые как случайные, в действительности носят гиперслучайный характер. Эта особенность сохраняется и при бесконечно большом интервале наблюдения. Отсюда следует, что *все оценки реальных детерминированных величин не состоятельны*.

6.4. Эффективные и достаточные гиперслучайные оценки детерминированных величин

Важной характеристикой оценки является ее эффективность. *Гиперслучайную оценку* Θ_e^* *детерминированной величины* θ назовем *эффективной при всех условиях* $g \in G$, если условные математические ожидания квадрата отклонения оценки Θ_e^* / g от величины θ по совокупности выборок заданного объема N не больше, чем для любых других оценок Θ_i^* / g :

$$\mathrm{M}[(\Theta_e^* / g - \theta)^2] \le \mathrm{M}[(\Theta_i^* / g - \theta)^2],\quad i = 1, 2, ..., \quad \forall g \in G. \tag{6.3}$$

Величина $\mathrm{M}\left[(\Theta^*/g - \theta)^2\right]$ в общем случае не является дисперсией оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}$. Она оказывается таковой лишь для несмещенных оценок. Для таких оценок условие эффективности может быть записано в виде $\sigma^2_{\theta^*_e/g} \le \sigma^2_{\theta^*_i/g}$, $i = 1, 2, \ldots \quad \forall g \in G$.

Эффективность оценки, как и несмещенность, зависит от наличия априорных данных о распределении гиперслучайной величины X и от вида распределения.

Мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_s, l_i, определяемые как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения эффективной оценки Θ^*_e к математическому ожиданию квадрата отклонения рассматриваемой оценки Θ^*:

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e/g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^*/g - \theta)^2]}, \quad l_i = \inf_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e/g - \theta)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^*/g - \theta)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. В случае, когда оценка эффективна, $l_s = l_i = 1$.

Границы погрешности можно оценить с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \left\{\vec{X} / g \in G\right\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерной условной плотности вероятности $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность вероятности абсолютно интегрируема по $\vec{x}$ и дважды дифференцируема по θ и, кроме того, для условной случайной оценки Θ^*/g существуют первые два момента. Тогда границы среднего квадрата погрешности Δ^2_{sz}, Δ^2_{iz} и границы $\sigma^2_{s\theta^*}$, $\sigma^2_{i\theta^*}$ условной дисперсии оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}$ определяются неравенствами

$$\Delta_{sz}^2 \ge \sigma_{s\theta^*}^2 \ge \sup_{g \in G} \left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1} \right],$$
$$\Delta_{iz}^2 \ge \sigma_{i\theta^*}^2 \ge \inf_{g \in G} \left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1} \right], \qquad (6.4)$$

где J_g – *информация по Фишеру*:

$$J_g = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2} \right],$$

$\mathrm{M}[\bullet]$ – оператор математического ожидания, действующий в данном случае на вектор $\vec{X}$.

Доказательство теоремы основано на известном *неравенстве Крамера – Рао* для случайных оценок [3, 4, 31]. При выполнении указанных условий для случайных величин Θ^*/g справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{M}\left[(\Theta^* - \theta)^2/g\right] \ge \sigma_{\theta^*/g}^2 \ge \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}. \qquad (6.5)$$

На его основании справедливы неравенства (6.4).

Из выражения (6.4) видно, что для обеспечения нулевой дисперсии величина $\dfrac{\partial \varepsilon_{0/g}}{\partial \theta}$ должна равняться -1. Отсюда следует, что так же, как и в случае случайных оценок, невозможно одновременно обеспечить нулевое смещение и нулевую дисперсию.

Для однородной независимой выборки $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^{N} f_{x_n/\theta,g}(x_n)$ и $J_g = -N\mathrm{M}\left[\dfrac{\partial^2 \ln f_{x/\theta,g}(X)}{\partial\theta^2}\right]$.

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки можно ввести другое определение.

Эффективной оценкой Θ_e^* назовем оценку Θ^*, для которой границы математического ожидания определяются равенствами

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}_s\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \sup_{g\in G}\left[\left(1 + \frac{\partial\varepsilon_{0/g}}{\partial\theta}\right)^2 J_g^{-1}\right], \\
\mathrm{M}_i\left[\left(\Theta^* - \theta\right)^2\right] = \inf_{g\in G}\left[\left(1 + \frac{\partial\varepsilon_{0/g}}{\partial\theta}\right)^2 J_g^{-1}\right].
\end{gathered} \tag{6.6}$$

В общем случае определения (6.3) и (6.6) не эквивалентны. Если эффективная оценка в соответствии с выражениями (6.6) всегда удовлетворяет неравенству (6.3), то эффективная оценка в соответствии с выражением (6.3) не всегда удовлетворяет равенствам (6.6). Если не существует эффективной оценки в соответствии с выражениями (6.6), то эти выражения характеризуют не потенциальную точность оценки, а верхнюю границу точности оценки.

Границы функции распределения гиперслучайного вектора $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X}/g_S$ и $\vec{X}/g_I$, соответствующие некоторым граничным условиям g_S и g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G.

Теорема 2. Пусть по выборке $\vec{x}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ гиперслучайного вектора $\vec{X} = \left\{\vec{X}/g \in G\right\}$ оценивается детерминированная величина θ. При этом границы области определения N-мерных плотностей вероятности границ $f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{x})$, $f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, плотности вероятности границ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для гиперслучайной оценки Θ^* существуют первые два момента границ. Тогда средние относительно границ квадраты абсолютной погрешности Δ_{Sz}^2, Δ_{Iz}^2 и дисперсии границ $\sigma_{S\theta^*}^2$, $\sigma_{I\theta^*}^2$ определяются неравенствами

$$\begin{aligned} &\Delta_{Sz}^2 \geq \sigma_{S\theta^*}^2 \geq \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{S0}}{\partial \theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1}, \\ &\Delta_{Iz}^2 \geq \sigma_{I\theta^*}^2 \geq \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{I0}}{\partial \theta}\right)^2 J_{g_I}^{-1}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где J_{g_S}, J_{g_I} – информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на неравенстве (6.5). На основании неравенства (6.5) справедливы неравенства (6.7).

Гиперслучайную оценку Θ^* *детерминированной величины* θ будем называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятности $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1,...,x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о θ.

Если оценка эффективная, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

6.5. Интервальные гиперслучайные оценки детерминированных величин

Рассмотрим *гиперслучайную интервальную оценку детерминированной величины*.

Пусть для детерминированной величины θ существует гиперслучайная оценка Θ^*, границы функции распределения погрешности $Z=\Theta^*-\theta$ этой оценки описываются выражениями $F_{Sz}(\theta^*-\theta)$, $F_{Iz}(\theta^*-\theta)$, а плотности распределения границ – выражениями $f_{Sz}(\theta^*-\theta)$, $f_{Iz}(\theta^*-\theta)$ (рис. 6.7).

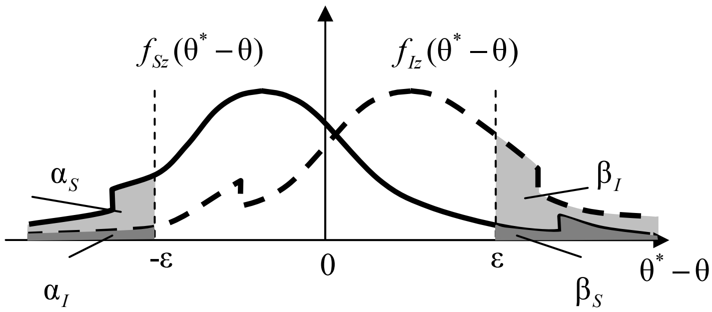


Рис. 6.7. Плотности распределения границ погрешности $Z=\Theta^*-\theta$

Вероятность того, что погрешность оценки не больше $-\varepsilon$, определяется двойным неравенством

$$\alpha_I \le P(\Theta^*/g-\theta \le -\varepsilon) \le \alpha_S,$$

а вероятность того, что она не меньше ε, – неравенством

$$\beta_S \le P(\Theta^*/g-\theta \ge \varepsilon) \le \beta_I,$$

где $$\alpha_I = \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Iz}(\theta^* - \theta)\mathrm{d}\theta^*,\ \alpha_S = \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f_{Sz}(\theta^* - \theta)\mathrm{d}\theta^*,$$

$$\beta_S = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_{Sz}(\theta^* - \theta)\mathrm{d}\theta^*,\ \beta_I = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_{Iz}(\theta^* - \theta)\mathrm{d}\theta^*.$$

Отсюда следует, что *границы доверительной вероятности*

$$P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon/g)$$

нахождения истинного значения величины θ в *доверительном интервале* $I = (\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon/g)$ определяются двойным неравенством

$$1 - (\alpha_S + \beta_I) \le P(\Theta^* - \varepsilon < \theta < \Theta^* + \varepsilon/g) \le 1 - (\alpha_I + \beta_S).$$

Подобно интервалу $[m_{S\theta^*} - k\sigma_{S\theta^*},\ m_{I\theta^*} + k\sigma_{I\theta^*}]$, оно характеризует точность гиперслучайной оценки.

ГЛАВА 7

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исследована гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения. Выведены формулы, описывающие погрешность гиперслучайной оценки гиперслучайной величины в общем случае и для частных моделей – аддитивной и мультипликативной оценок. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать погрешность гиперслучайной оценки при косвенных измерениях гиперслучайной величины.

7.1. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

Под *гиперслучайно-гиперслучайной моделью измерения* понимается модель, в которой измеряемая величина и ее оценка представляются гиперслучайными величинами.

Пусть множество G охватывает множество всех вариантов условий формирования измеряемой величины и оценки. За время взятия выборки в фиксированных условиях $g \in G$ значение измеряемой величины не меняется. Измеряемая гиперслучайная величина Θ представляет собой множество случайных величин Θ/g, описывающих измеряемую величину при фиксированных условиях $g \in G$: $\Theta = \{\Theta / g \in G\}$ (рис. 7.1). Случайная величина Θ/g может принимать множество конкретных значений $\{\theta/g\}$. Множество гиперслучайных величин $\{\Theta\}$ образует пространство Θ_0.

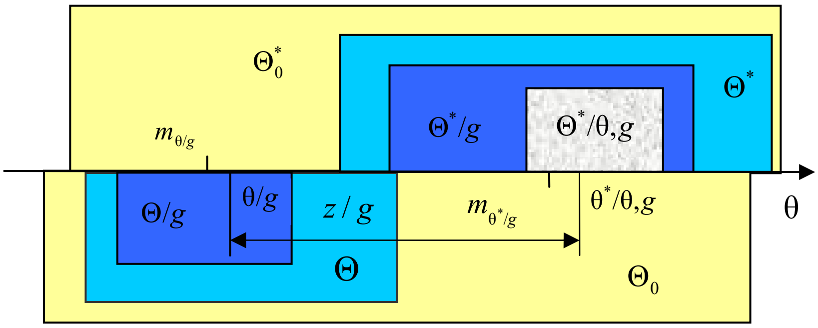


Рис. 7.1. Качественное представление измеряемой величины и оценки

Гиперслучайная оценка Θ^*, соответствующая измеряемой гиперслучайной величине Θ, представляет собой множество случайных величин Θ^*/g, описывающих оценки случайных величин Θ/g в условиях $g \in G$: $\Theta^* = \{\Theta^*/g \in G\}$. Функция распределения случайной величины Θ^*/g определяется законом распределения случайной величиной $\Theta^*/\theta,g$, описывающей оценку при конкретном значении измеряемой величины θ/g, и законом распределения случайной величиной Θ/g. Случайная величина $\Theta^*/\theta,g$ может принимать множество конкретных значений $\{\theta^*/\theta,g\}$. Множество гиперслучайных оценок $\{\Theta^*\}$ образует пространство Θ_0^*.

Гиперслучайная оценка Θ^* формируется на основе многомерной гиперслучайной выборки данных $\vec{X} = \{\vec{X}/g \in G\}$ из генеральной совокупности гиперслучайной величины $X = \{X/g \in G\}$, доступной для непосредственного измерения. Гиперслучайная оценка Θ^* является функцией (статистикой) гиперслучайной выборки $\vec{X}$, случайные оценки Θ^*/g и $\Theta^*/\theta,g$ – функциями соответственно случайных выборок $\vec{X}/g$ и $\vec{X}/\theta,g$, а конкретная оценка $\theta^*/\theta,g$ – функцией конкретной выборки $\vec{x}/\theta,g$.

Величины Θ, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g и Θ^* описываются следующим образом.

Гиперслучайная величина Θ представляется вероятностными характеристиками (условной функцией распределения $F_{\theta/g}(\theta)$, условной плотностью $f_{\theta/g}(\theta)$, границами функции распределения $F_{S\theta}(\theta)$, $F_{I\theta}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta/g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta/g}$ и т.д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}$, $m_{I\theta}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta}$, $\sigma_{I\theta}$ и др.).

Случайная оценка $\Theta^*/\theta,g$ характеризуется вероятностными характеристиками (функцией распределения $F_{\theta^*/\theta,g}(\theta)$, плотностью распределения $f_{\theta^*/\theta,g}(\theta)$ и пр.) и числовыми параметрами – математическим ожиданием $m_{\theta^*/\theta,g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/\theta,g}$ и т.д., а случайная оценка Θ^*/g – функцией распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$, математическим ожиданием $m_{\theta^*/g} = \mathrm{M}[m_{\theta^*/\Theta,g}]$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/g}$ и пр., где в данном случае оператор математического ожидания $\mathrm{M}[\bullet]$ действует на случайную величину Θ/g.

Гиперслучайная оценка Θ^* описывается вероятностными характеристиками (условной функцией распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ $\forall g \in G$, границами функции распределения $F_{S\theta^*}(\theta)$, $F_{I\theta^*}(\theta)$ и др.), условными параметрами (математическим ожиданием $m_{\theta^*/g}$, среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\theta^*/\theta,g}$ для всех $g \in G$ и т.д.) и безусловными параметрами (математическими ожиданиями границ $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$, среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{S\theta^*}$, $\sigma_{I\theta^*}$ и др.).

Схематично гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения изображена на рис. 7.2.

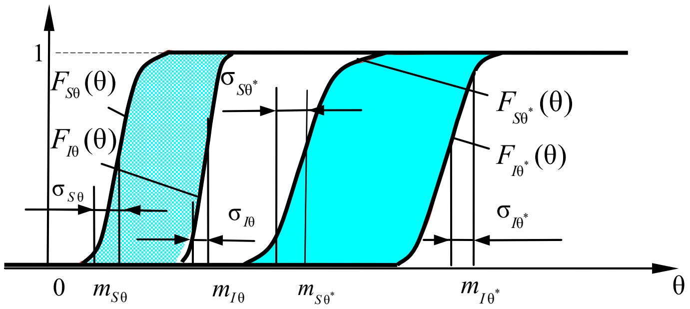


Рис. 7.2. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

Одна из основных задач измерения гиперслучайной величины Θ состоит в том, чтобы, имея в своем распоряжении конкретную выборку $\vec{x}/\theta,g$, соответствующую неизвестной величине θ и неизвестным условиям $g \in G$, а также априорную информацию о параметрах и характеристиках оценки и измеряемой величины, вычислить оценку и оценить точность измерения.

Оценку можно рассматривать как *точечную* или как *интервальную*. В первом случае необходимо сформировать по выборке $\vec{x}/\theta,g$ конкретную оценку $\theta^*/\theta,g$ и для неопределенных условий указать границы погрешности, соответствующие гиперслучайной величине Θ и гиперслучайной оценке Θ^*. Во втором случае с учетом гиперслучайных свойств погрешности надо рассчитать границы доверительного интервала, накрывающего измеряемую гиперслучайную величину Θ. Рассмотрим оба типа оценок.

7.2. Точечные гиперслучайные оценки гиперслучайных величин

В фиксированных условиях g о близости случайной оценки Θ^*/g к случайной величине Θ/g можно судить по условной функции распределения $F_{z/g}(z)$ *погрешности* $Z/g{=}\Theta^*/g-\Theta/g$. В качестве метрики можно использовать корень из среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/g}=\sqrt{\mathrm{M}\left[\left|\Theta^*/g-\Theta/g\right|^2\right]}$.

Эта величина $\Delta_{z/g}$ связана с математическим ожиданием $m_{z/g}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{z/g}$ погрешности зависимостью $\Delta_{z/g}=\sqrt{m_{z/g}^2+\sigma_{z/g}^2}$. Нетрудно убедиться, что величина $m_{z/g}$ представляет собой смещение оценки $\varepsilon_g=m_{\theta^*/g}-m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки следующей зависимостью:

$$\sigma_{z/g}^2=\sigma_{\theta^*/g}^2+\sigma_{\theta/g}^2-2R_{\theta^*\theta/g},$$

где $R_{\theta^*\theta/g}{=}\mathrm{M}[(\Theta^*/g-m_{\theta^*/g})(\Theta/g-m_{\theta/g})]$ – условный ковариационный момент оценки и измеряемой величины.

В неопределенных условиях точность измерения характеризуют границы функции распределения погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$, а также величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz}, представляющие собой корни из средних относительно границ квадратов погрешности (рис. 7.3):

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z) \mathrm{d}z} \, ,$$

$$\Delta_{Iz} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z) \mathrm{d}z} \, ,$$

где $f_{Sz}(z)$, $f_{Iz}(z)$ – плотности распределения границ, соответствующие функциям распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$.

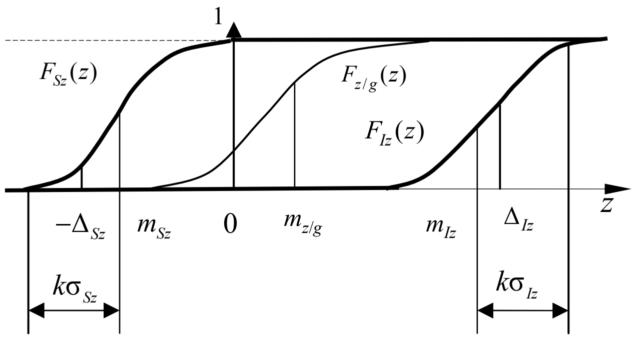


Рис. 7.3. Характеристики и параметры погрешности

Величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} определяются математическими ожиданиями m_{Sz}, m_{Iz} границ функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ и среднеквадратическими отклонениями границ σ_{Sz}, σ_{Iz}:

$$\Delta_{Sz} = \sqrt{m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2}\ ,\ \Delta_{Iz} = \sqrt{m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2}\ .$$

Величина Δ_{Sz} может быть как больше, так и меньше величины Δ_{Iz}. Если $m_{Iz} \le 0$, то $\Delta_{Iz} \le \Delta_{z/g} \le \Delta_{Sz}$; если $m_{Sz} \le 0 < m_{Iz}$, то $0 \le \Delta_{z/g} \le \max(\Delta_{Sz}, \Delta_{Iz})$; если $m_{Sz} > 0$, то $\Delta_{Sz} \le \Delta_{z/g} \le \Delta_{Iz}$.

Погрешность конкретного измерения $z/g = \theta^*/\theta,g - \theta/g$ в неизвестных условиях g можно оценить неравенством

$$m_{Sz} - k\sigma_{Sz} < z/g < m_{Iz} + k\sigma_{Iz}\ , \qquad (7.1)$$

а интервал нахождения измеряемой величины θ/g при наличии оценки $\theta^*/\theta,g$ – неравенством

$$\theta^*/\theta,g - m_{Iz} - k\sigma_{Iz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - m_{Sz} + k\sigma_{Sz}\ , \qquad (7.2)$$

где k – некоторая константа (рис. 7.3), определяемая степенью доверия к результату измерения.

Следует обратить внимание на то, что в неравенствах (7.1), (7.2) учитывается отличие дисперсий границ распределения, что оказывается существенным при значительном их различии.

Выражения (7.1), (7.2) упрощаются, когда условные функции распределения погрешности Z/g для всех $g \in G$ не пересекаются и с ростом условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}$ ее условные дисперсии $\sigma_{z/g}^2$ увеличиваются (тип распределения «а» в соответствии с классификацией, введенной в подразделе 3.1) или уменьшаются (тип распределения «б»). Тогда интервалы (7.1), (7.2) характеризуются границами математического ожидания погрешности m_{iz}, m_{sz} и границами среднеквадратического ее отклонения σ_{iz}, σ_{sz}: $m_{iz} = \inf\limits_{g \in G} m_{z/g} = \inf\limits_{g \in G} \varepsilon_g = \varepsilon_i$, $m_{sz} = \sup\limits_{g \in G} m_{z/g} = \sup\limits_{g \in G} \varepsilon_g = \varepsilon_s$,

$$\sigma_{iz} = \inf_{g \in G} \sigma_{z/g} = \inf_{g \in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}},$$
$$\sigma_{sz} = \sup_{g \in G} \sigma_{z/g} = \sup_{g \in G} \sqrt{\sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}}. \quad (7.3)$$

Для распределения типа «а» неравенства (7.1) – (7.2) имеют соответственно вид

$$\varepsilon_i - k\sigma_{iz} < z/g < \varepsilon_s + k\sigma_{sz},$$
$$\theta^*/\theta,g - \varepsilon_s - k\sigma_{sz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - \varepsilon_i + k\sigma_{iz}, \quad (7.4)$$

а для распределения типа «б» –

$$\varepsilon_i - k\sigma_{sz} < z/g < \varepsilon_s + k\sigma_{iz},$$
$$\theta^*/\theta,g - \varepsilon_s - k\sigma_{iz} < \theta/g < \theta^*/\theta,g - \varepsilon_i + k\sigma_{sz}. \quad (7.5)$$

Точные границы среднего квадрата погрешности Δ^2_{iz}, Δ^2_{sz} определяются разностью математических ожиданий оценки $m_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $m_{\theta/g}$ (смещением оценки ε_g), дисперсиями оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}$ и измеряемой величины $\sigma^2_{\theta/g}$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g \in G} \Delta^2_{z/g} = \inf_{g \in G} (\varepsilon^2_g + \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}),$$
$$\Delta^2_{sz} = \sup_{g \in G} \Delta^2_{z/g} = \sup_{g \in G} (\varepsilon^2_g + \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}).$$

7.3. Аддитивная и мультипликативная модели оценки

В ряде случаев *оценка* Θ^* может быть представлена *аддитивной моделью*, описываемой суммой измеряемой гиперслучайной величины Θ и гиперслучайной помехи W. При этом смещение ε_g равно математическому ожиданию $m_{w/g}$ случайной помехи W/g, дисперсия погрешности $\sigma^2_{z/g}$ – дисперсии помехи $\sigma^2_{w/g}$, границы смещения ε_i, ε_s – соответственно границам математического ожидания помехи m_{iw}, m_{sw}, а границы дисперсии погрешности σ^2_{iz}, σ^2_{sz} – соответствующим границам дисперсии помехи σ^2_{iw}, σ^2_{sw}.

Тогда для распределения погрешности типа «а» неравенства (7.4) приобретают вид

$$m_{iw} - k\sigma_{iw} < z/g < m_{sw} + k\sigma_{sw},$$
$$\theta^*/\theta, g - m_{sw} - k\sigma_{sw} < \theta/g < \theta^*/\theta, g - m_{iw} + k\sigma_{iw},$$

а для распределения типа «б» неравенства (7.5) –

$$m_{iw} - k\sigma_{sw} < z/g < m_{sw} + k\sigma_{iw},$$
$$\theta^*/\theta, g - m_{sw} - k\sigma_{iw} < \theta/g < \theta^*/\theta, g - m_{iw} + k\sigma_{sw}.$$

Границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}(m^2_{w/g} + \sigma^2_{w/g}), \qquad \Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}(m^2_{w/g} + \sigma^2_{w/g}). \qquad (7.6)$$

Из выражений (7.6) следует, что в случае аддитивной модели помехи гиперслучайные особенности измеряемой величины не влияют на точность измерения. Существенную роль играют лишь математическое ожидание и дисперсия помехи. При пренебрежимо малой дисперсии $\sigma^2_{w/g}$ $\forall g \in G$ границы среднего квадрата погрешности равны соответствующим границам квадрата математического ожидания помехи m^2_{iw}, m^2_{sw}.

В другом частном случае *оценка* Θ^* может быть представлена *мультипликативной моделью*, описываемой выражением $\Theta^* = (1+\Xi)\Theta$. При этом погрешность $Z/g = (\Xi/g)(\Theta/g)$, где Ξ,

Ξ/g – соответственно гиперслучайная и случайная величины, характеризующие множитель мультипликативной помехи.

Если величины Ξ/g, Θ/g независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ (смещение оценки) равно $m_{\xi/g}m_{\theta/g}$, а дисперсия

$$\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\xi/g}\sigma^2_{\theta/g} + m^2_{\xi/g}\sigma^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\xi/g}m^2_{\theta/g},$$

где $m_{\xi/g}$, $\sigma^2_{\xi/g}$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия множителя Ξ/g. При этом средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g} = (m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})$, границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta^2_{iz} = \inf_{g\in G}[(m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})],$$
$$\Delta^2_{sz} = \sup_{g\in G}[(m^2_{\xi/g} + \sigma^2_{\xi/g})(m^2_{\theta/g} + \sigma^2_{\theta/g})],$$

а параметры границ распределения, входящие в неравенства (7.1) и (7.2), описываются следующими выражениями:

$$m_{Sz} = m_{S\xi}m_{S\theta}, \; m_{Iz} = m_{I\xi}m_{I\theta},$$
$$\sigma^2_{Sz} = \sigma^2_{S\xi}\sigma^2_{S\theta} + m^2_{S\xi}\sigma^2_{S\theta} + \sigma^2_{S\xi}m^2_{S\theta},$$
$$\sigma^2_{Iz} = \sigma^2_{I\xi}\sigma^2_{I\theta} + m^2_{I\xi}\sigma^2_{I\theta} + \sigma^2_{I\xi}m^2_{I\theta},$$

где $m_{S\xi}$, $m_{I\xi}$ – математические ожидания, а $\sigma^2_{S\xi}$, $\sigma^2_{I\xi}$ – дисперсии границ распределения множителя мультипликативной помехи.

Как видно, в данном случае погрешность измерения определяется математическими ожиданиями и дисперсиями двух величин: множителя мультипликативной помехи и измеряемой величины.

7.4. Гиперслучайные оценки результатов косвенных измерений гиперслучайных величин

При *косвенных измерениях* значение измеряемой (выходной) величины определяется на основании измерений других (входных) величин. Пусть выходная гиперслучайная величина Θ является известной функцией M входных гиперслучайных величин Y_m $(m=\overline{1,M})$: $\Theta=\varphi(Y_1,...,Y_M)$. При этом случайная величина Θ/g является функцией случайных величин Y_m/g $(m=\overline{1,M})$: $\Theta/g=\varphi(Y/g_1,...,Y_M/g)$, а случайная оценка Θ^*/g – функцией случайных оценок Y_m^*/g $(m=\overline{1,M})$: $\Theta^*/g=\varphi(Y_m^*/g,...,Y_m^*/g)$. Тогда в линейном приближении математические ожидания измеряемой величины и ее оценки описываются соответственно выражениями

$$m_{\theta/g}=\varphi(m_{y_1/g},...,m_{y_M/g}),\ m_{\theta^*/g}=\varphi(m_{y_1^*/g},...,m_{y_M^*/g}),$$

а моменты второго порядка – выражениями

$$\sigma^2_{\theta/g}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y_m y_l/g},\ \sigma^2_{\theta^*/g}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y_m^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l^*}R_{y_m^* y_l^*/g},$$

$$R_{\theta^*\theta/g}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y_m^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y_m^* y_l/g},$$

где $m_{y_m/g}$, $m_{y_m^*/g}$ – математические ожидания случайных величин Y_m/g, Y_m^*/g соответственно, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_m}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_m^*}$ – производные функции $\varphi(y_1,...,y_M)$ по y_m соответственно в точках $(y_1,...,y_M)=(m_{y_1/g},...,m_{y_M/g})$ и $(y_1,...,y_M)=(m_{y_1^*/g},...,m_{y_M^*/g})$, $R_{y_m y_l/g}$, $R_{y_m^* y_l^*/g}$, $R_{y_m^* y_l/g}$ – ковариационные моменты соответственно пар величин $(Y_m/g, Y_l/g)$, $(Y_m^*/g, Y_l^*/g)$, $(Y_m^*/g, Y_l\ /g)$.

Поскольку математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ равно смещению оценки $\varepsilon_g = m_{\theta^*/g} - m_{\theta/g}$ в условиях g, а дисперсия погрешности $\sigma^2_{z/g}$ связана с условными моментами измеряемой величины и ее оценки зависимостью $\sigma^2_{z/g} = \sigma^2_{\theta^*/g} + \sigma^2_{\theta/g} - 2R_{\theta^*\theta/g}$, средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}$, равный $m^2_{z/g} + \sigma^2_{z/g}$, описывается выражением

$$\Delta^2_{z/g} = [\varphi(m_{y_1^*/g}, \ldots, m_{y_M^*/g}) - \varphi(m_{y_1/g}, \ldots, m_{y_M/g})]^2 +$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_m^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l^*}R_{y_m^* y_l^*/g} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y_m y_l/g} - \right.$$
$$\left. -2\frac{\partial\varphi}{\partial y_m^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y_l}R_{y_m^* y_l/g}\right).$$

ГЛАВА 8

ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ОЦЕНОК ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для точечных гиперслучайных оценок гиперслучайных величин введены понятия несмещенной, состоятельной, эффективной и достаточной оценок. Доказаны теоремы, определяющие границы верхней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки.

Дано математическое обоснование известного из практики факта, что точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.

8.1. Несмещенные и состоятельные гиперслучайные оценки гиперслучайных величин

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *несмещенной* (*несмещенной при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}$ случайной величины Θ^* / g равно математическому ожиданию $m_{\theta/g}$ условной случайной величины Θ / g, т.е. если $\varepsilon_g = 0 \quad \forall g \in G$. В противном случае оценку будем называть *смещенной*.

Приведенное определение понятия несмещенной оценки для гиперслучайной величины и гиперслучайной оценки согласовано с общепринятым определением этого же понятия для детерминированной величины и случайной оценки [3, 5, 31], а также для детерминированной величины и гиперслучайной оценки (подраздел 6.3).

Следует отметить что, если оценка несмещенная, то границы математического ожидания измеряемой величины и ее оценки совпадают $m_{i\theta} = m_{i\theta^*}$, $m_{s\theta} = m_{s\theta^*}$. При этом из факта, что оценка несмещенная не следует, что обязательно совпадают соответствующие математические ожидания границ (т.е. $m_{S\theta} = m_{S\theta^*}, m_{I\theta} = m_{I\theta^*}$).

Совпадение имеет место лишь в некоторых частных случаях, например, когда оба распределения величин Θ и Θ^* относятся к типу «а» или «б». В этих двух случаях при несмещенной оценке математические ожидания границ распределения погрешности равны нулю: $m_{Sz} = m_{Iz} = 0$.

Определенный интерес представляет частный случай смещенной оценки – смещенной на фиксированную величину ε_0 $\forall g \in G$. Тогда границы смещения $\varepsilon_i = \varepsilon_s = \varepsilon_0$.

Для детерминированной величины θ и случайной оценки Θ^* состоятельной, как известно [3, 5, 31], называется оценка, которая сходится по вероятности к величине θ.

Определение состоятельной гиперслучайной оценки Θ^*/θ детерминированной величины θ дано в подразделе 6.3.

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ можно назвать *состоятельной*, если для всех условий $g \in G$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\Theta^* / g - \Theta / g\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \forall g \in G,$$

где N — объем выборки для каждого условия g.

Сходимость по распределению более слабая, чем сходимость по вероятности [31]. Поэтому необходимым условием сходимости гиперслучайной оценки Θ^* к гиперслучайной величине Θ является сходимость функции распределения $F_{\theta^*/g}(\theta)$ к функции распределения $F_{\theta/g}(\theta)$.

Частным случаем вводимого понятия является *состоятельная случайная оценка* Θ^* *случайной величины* Θ, определяемая при постоянных и единственных условиях наблюдения следующим образом:

$$\lim_{N\to\infty} P\{\left|\Theta^* - \Theta\right| > \varepsilon\} = 0.$$

Смысл этого выражения достаточно прозрачен. Случайную погрешность $Z = \Theta^* - \Theta$ при объеме выборки N можно рассматривать как параметрическое семейство случайных величин, описываемых функцией распределения $F_{zN}(z)$, зависящей от параметра N. При устремлении N к бесконечности функция распределения $F_{zN}(z)$ приближается к функции единичного скачка $F_{z\infty}(z)$ в точке 0.

Нетрудно убедиться, что гиперслучайная оценка случайной величины, сохраняющая гиперслучайный характер при $N \to \infty$, так же как и гиперслучайная оценка детерминированной величины, не состоятельна.

В случае гиперслучайной оценки гиперслучайной величины дело обстоит несколько иначе. Если гиперслучайная оценка Θ^* гиперслучайной величины Θ сохраняет при $N \to \infty$ гиперслучайный характер, то теоретически оценка может быть как состоятельной, так и несостоятельной. Однако необходимым условием состоятельности оценки является согласованное изменение измеряемой величины и оценки при изменении условий, а это практически не реально.

Поэтому, принимая адекватность описания реальных процедур измерения гиперслучайно-гиперслучайными моделями, приходим к заключению, *что все реальные оценки не состоятельны.*

Отсюда следует фундаментальный вывод: *достичь бесконечно высокой точности измерения реальных величин принципиально нельзя ни при каких условиях*. Подтверждением этого служат следствия из теорем, доказанных в следующем подразделе.

8.2. Эффективные и достаточные гиперслучайные оценки гиперслучайных величин

Гиперслучайную оценку Θ_e^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *эффективной при всех условиях* $g \in G$, если для всех $g \in G$ математическое ожидание квадрата отклонения оценки Θ_e^*/g от величины Θ/g по совокупности выборок заданного объема N (т.е. средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2$) не больше, чем для любых других оценок Θ_i^*/g:

$$\Delta_{z_e/g}^2 \le \Delta_{z_i/g}^2, \quad i = 1,2,..., \quad \forall g \in G, \qquad (8.1)$$

где

$$\Delta_{z_e/g}^2 = \mathrm{M}[(\Theta_e^*/g - \Theta/g)^2], \quad \Delta_{z_i/g}^2 = \mathrm{M}[(\Theta_i^*/g - \Theta/g)^2].$$

Отметим, что в случае несмещенной оценки детерминированной величины средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2$ равен дисперсии оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$. Тогда условие эффективности может быть записано в виде $\sigma^2_{\theta^*_e/g} \le \sigma^2_{\theta^*_i/g}$, $i = 1,2,\ldots \quad \forall g \in G$.

Как и в случае детерминированно-гиперслучайной модели, мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_i, l_s, определяемые в данном случае как границы отношения математического ожидания квадрата отклонения от Θ/g эффективной оценки Θ^*_e/g к математическому ожиданию квадрата отклонения от Θ/g рассматриваемой оценки Θ^*/g:

$$l_i = \inf_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e/g - \Theta/g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^*/g - \Theta/g)^2]}, \quad l_s = \sup_{g \in G} \frac{\mathrm{M}[(\Theta^*_e/g - \Theta/g)^2]}{\mathrm{M}[(\Theta^*/g - \Theta/g)^2]}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. Когда оценка эффективна, $l_i = l_s = 1$.

Границы точности измерения определяются следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / g \in G \right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условной плотностью вероятности $f_{\theta/g}(\theta)$. При этом ($N+1$)-мерная условная плотность распределения $f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{x},\theta)$ дважды дифференцируема по θ, производные $\dfrac{\partial f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{x},\theta)}{\partial \theta}$ и $\dfrac{\partial^2 f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{x},\theta)}{\partial \theta^2}$ абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и θ, а $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\theta^* - \theta\ ) f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{x},\theta)\, d\vec{x} = 0$.

Тогда границы среднего квадрата погрешности

$$\Delta_{iz}^2 \geq \inf_{g \in G} J_g^{-1}, \quad \Delta_{sz}^2 \geq \sup_{g \in G} J_g^{-1}, \tag{8.2}$$

где J_g — условная информация по Фишеру, определяемая выражением

$$J_g = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial \Theta}\right)^2\right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{X},\Theta)}{\partial \Theta^2}\right].$$

Доказательство этой теоремы основано на известном *неравенстве Крамера – Рао* для случайных оценок [3, 5, 31].

При выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие неравенства: $\Delta_{z/g}^2 \geq J_g^{-1} \quad \forall g \in G$. Отсюда следуют неравенства (8.2).

Для однородной независимой выборки

$$f_{(\vec{x},\theta)/g}(\vec{x},\theta) = f_{\theta/g}(\theta) \prod_{n=1}^{N} f_{x/\theta,g}(x_n) \text{ и}$$

$$J_g = -\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial^2 [\ln f_{\theta/g}(\Theta) + N \ln f_{x/\theta,g}(X)]}{\partial \Theta^2}\right)\right].$$

Если элементы выборки X_n / g представляют собой аддитивную смесь случайной величины Θ / g с дисперсией $\sigma_{\theta/g}^2$ и независимой случайной однородной помехи V / g с математическим ожиданием $m_{v/g}$ и дисперсией $\sigma_{v/g}^2$, то при гауссовском распределении величин Θ/g и X_n / g условная информация по Фишеру $J_g = \dfrac{1}{\sigma_{\theta/g}^2} + \dfrac{N}{\sigma_{v/g}^2}$.

Тогда при $N \to \infty$ имеет место равенство $\Delta_{iz}^2 = \Delta_{sz}^2 = 0$.

На основании этого результата может сложиться мнение, что вывод предыдущего подраздела, касающийся предела точности измерения, не верен, что точность измерения может быть неограниченно высокой. В действительности это не так.

Более точные границы точности измерения, определяемые двумя следующими теоремами, вносят необходимую ясность в этот вопрос.

Теорема 2. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X} = \left\{ \vec{X} / g \in G \right\}$ объемом N для каждого условия $g \in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерной условной плотности распределения $f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{x})$ не зависят от θ, эта плотность распределения абсолютно интегрируема по $\vec{x}$ и дважды дифференцируема по θ. Кроме того, для условной случайной оценки $\Theta^*/\theta,g$ существуют два первых момента. Тогда границы $\overline{\sigma}^2_{i\theta^*}$, $\overline{\sigma}^2_{s\theta^*}$ средней дисперсии $\overline{\sigma}^2_{\theta^*/g}$=M[$\sigma^2_{\theta^*/\Theta,g}$] дисперсии $\overline{\sigma}^2_{\theta^*/\theta,g}$ оценки $\Theta^* / \theta,g$ определяются неравенствами

$$\begin{aligned} &\overline{\sigma}^2_{i\theta^*} \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right], \\ &\overline{\sigma}^2_{s\theta^*} \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right], \end{aligned} \tag{8.3}$$

а границы среднего квадрата погрешности – неравенствами

$$\Delta_{iz}^2 \geq \inf_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$
$$\Delta_{sz}^2 \geq \sup_{g \in G} \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g}^2 + \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right], \qquad (8.4)$$

где $\varepsilon_{\theta/g} = (m_{\theta^*/\theta,g} - \theta/g)$ – смещение оценки $\Theta^*/\theta,g$ в условиях g относительно θ/g, $J_g(\theta)$ – *информация по Фишеру* для случайной оценки $\Theta^*/\theta,g$:

$$J_g(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{x}/\theta,g}(\vec{X})}{\partial \theta^2}\right].$$

Доказательство теоремы основано на неравенстве Крамера – Рао для случайной оценки детерминированной величины. Для случайной величины $\Theta^*/\theta,g$ при фиксированных величинах θ, g и выполнении указанных в теореме условий справедливы следующие соотношения для дисперсии $\sigma_{\theta^*/\theta,g}^2$ и среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/\theta,g}^2 = \mathrm{M}[(\square^*/\theta,g - \theta/g)^2]$:

$$\sigma_{\theta^*/\theta,g}^2 \geq \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{\theta/g}}{\partial \theta}\right)^2 J_g^{-1}(\theta), \; \Delta_{z/\theta,g}^2 = \varepsilon_{\theta/g}^2 + \sigma_{\theta^*/\theta,g}^2 .$$

Тогда для средней дисперсия $\bar{\sigma}_{\theta^*/g}^2$ и среднего квадрата погрешности $\Delta_{z/g}^2 = \mathrm{M}[\Delta_{z/\Theta,g}^2]$ имеем

$$\bar{\sigma}^2_{\theta^*/g} \geq \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right],$$
$$\Delta^2_{z/g} \geq \mathrm{M}\left[\varepsilon^2_{\Theta/g} + \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g}}{\partial \Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \qquad (8.5)$$

Из неравенств (8.5) следуют неравенства (8.3) и (8.4).

Из выражений (8.3) видно, что для обеспечения нулевой средней дисперсии величина $\frac{\partial \varepsilon_{\theta/g}}{\partial \theta}$ для всех θ/g должна равняться -1. Это означает, что невозможно одновременно обеспечить нулевое среднее смещение и нулевую среднюю дисперсию оценки.

Для однородной независимой выборки $J_g(\theta) = -N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f_{x/\theta,g}(X)}{\partial \theta^2}\right]$.

Тогда при $N \to \infty$ справедливы неравенства $\Delta^2_{iz} \geq \inf\limits_{g \in G} \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g}]$, $\Delta^2_{sz} \geq \sup\limits_{g \in G} \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g}]$.

Отсюда следует, что потенциальная точность определяется границами среднего квадрата смещения, а бесконечно высокая точность измерения обеспечивается при бесконечно большом объеме выборки и отсутствии смещения для всех θ и условий $g \in G$.

Статистические условия формирования измеряемой величины и оценки, как правило, меняются асинхронно. Поэтому практически нереально, чтобы обеспечивалось отсутствие смещения для всех условий, а, следовательно, и бесконечно высокая точность измерения.

Вместо приведенного выше определения эффективной оценки можно ввести другое определение, основанное на неравенстве

(8.4): *эффективной гиперслучайной оценкой* Θ_e^* можно назвать оценку Θ^* заданного объема N, для которой границы среднего квадрата погрешности определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_{iz}^2 &= \inf_{g\in G} \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g}}{\partial\Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right], \\ \Delta_{sz}^2 &= \sup_{g\in G} \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g}}{\partial\Theta}\right)^2 J_g^{-1}(\Theta)\right]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Заметим, что в общем случае определения (8.1) и (8.6) не эквивалентны.

Теорема 3. Пусть по гиперслучайной выборке $\vec{X}=\left\{\vec{X}/g\in G\right\}$ объемом N для каждого условия $g\in G$ оценивается гиперслучайная величина Θ, описываемая условными плотностями распределения $f_{\theta/g}(\theta)$. Границы области определения N-мерных плотностей распределения границ $f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{x})$, $f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{x})$ не зависят от θ, эти плотности распределения абсолютно интегрируемы по $\vec{x}$ и дважды дифференцируемы по θ. Кроме того, для случайной оценки $\Theta^*/\theta,g$ существуют два первых момента. Тогда *средние дисперсии границ распределения погрешности* $\bar{\sigma}_{S\theta^*}^2=\mathrm{M}[\sigma_{\theta^*/\Theta,g_S}^2]$, $\bar{\sigma}_{I\theta^*}^2=\mathrm{M}[\sigma_{\theta^*/\Theta,g_I}^2]$ описываются неравенствами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{S\theta^*}^2 &\geq \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial\Theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1}(\Theta)\right], \\ \bar{\sigma}_{I\theta^*}^2 &\geq \mathrm{M}\left[\left(1+\frac{\partial\varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial\Theta}\right)^2 J_{g_I}^{-1}(\Theta)\right], \end{aligned} \quad (8.7)$$

а *средние относительно границ квадраты погрешности* Δ_{Sz}^2 и Δ_{Iz}^2

$$\begin{aligned} \Delta_{Sz}^2 &\geq \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g_S}^2 + \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_S}}{\partial \Theta}\right)^2 J_{g_S}^{-1}(\Theta)\right], \\ \Delta_{Iz}^2 &\geq \mathrm{M}\left[\varepsilon_{\Theta/g_I}^2 + \left(1+\frac{\partial \varepsilon_{\Theta/g_I}}{\partial \Theta}\right)^2 J_{g_I}^{-1}(\Theta)\right], \end{aligned} \tag{8.8}$$

где ε_{θ/g_S}, ε_{θ/g_I} – *смещения оценки для верхней и нижней границ* распределения, $J_{g_S}(\theta)$, $J_{g_I}(\theta)$ – информация по Фишеру для соответственно верхней и нижней границ распределения:

$$J_{g_S}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_S}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = \mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{x}/\theta,g_I}(\vec{X})}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 2. Границы функции распределения гиперслучайной выборки $\vec{X}$ можно рассматривать как функции распределения случайных векторов $\vec{X}/g_S$, $\vec{X}/g_I$, соответствующих условиям g_S, g_I, которые могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству G. Учитывая неравенства (8.5), имеем неравенства (8.7), (8.8).

Для однородной независимой выборки объемом N

$$J_{g_S}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_S}(X)}{\partial\theta}\right)^2\right],$$

$$J_{g_I}(\theta) = N\mathrm{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f_{x/\theta,g_I}(X)}{\partial\theta}\right)^2\right].$$

Тогда средние относительно границ квадраты погрешности Δ^2_{Sz} и Δ^2_{Iz} при $N \to \infty$ стремятся соответственно к $\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}]$ и $\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]$.

Для гиперслучайной оценки Θ^*/θ справедливы неравенства $m_{\theta^*/\theta,g_S} < m_{\theta^*/\theta,g_I}$, $\varepsilon_{\theta/g_S} < \varepsilon_{\theta/g_I}$. С учетом этого, $\max\left[\mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_S}], \mathrm{M}[\varepsilon^2_{\Theta/g_I}]\right] > 0$. Тогда при $N \to \infty$ максимальный средний относительно границ квадрат погрешности больше нуля. Это означает, что точность измерения гиперслучайной величины ограничена.

Следствия теорем 2, 3 дают теоретическое обоснование хорошо известного из практики факта, что *точность любых реальных физических измерений имеет предел, преодолеть который не удается даже при очень большом объеме данных.*

Гиперслучайную оценку Θ^* *гиперслучайной величины* Θ будем называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если для всех $g \in G$ N-мерная условная плотность вероятности $f_{\vec{x}/\theta^*,g}(x_1,...,x_N)$ выборки гиперслучайной величины X не зависит от величины Θ, т. е. оценка несет всю сосредоточенную в выборке полезную информацию о Θ. Это определение согласовано с известным определением случайной достаточной оценки и гиперслучайной достаточной оценки детерминированной величины.

Если гиперслучайная оценка гиперслучайной величины является эффективной, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

8.3. Интервальные гиперслучайные оценки гиперслучайных величин

Рассмотрим *интервальную гиперслучайную оценку гиперслучайной величины.* Доверительный интервал $[z_1, z_2]$, характеризующий величину гиперслучайной погрешности Z, и предполагаемый интервал $\theta^* / \theta, g - z_2 < \theta/g < \theta^* / \theta, g - z_1$ нахождения измеряемой величины θ/g могут быть рассчитаны, исходя из границ доверительной вероятности.

Пусть

$$\alpha_S = \int_{-\infty}^{z_1} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z\,,\ \alpha_I = \int_{-\infty}^{z_1} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z\,,$$

$$\beta_S = \int_{z_2}^{\infty} f_{Sz}(z)\mathrm{d}z\,,\ \beta_I = \int_{z_2}^{\infty} f_{Iz}(z)\mathrm{d}z\,.$$

Тогда $\alpha_I \le P(Z \le z_1 / g) \le \alpha_S$, $\beta_S \le P(Z \ge z_2 / g) \le \beta_I$. Отсюда

$$\gamma_i \le P(z_1 < Z < z_2 / g) \le \gamma_s\,, \text{ или}$$

$$\gamma_i \le P(\theta^* - z_2 < \Theta < \theta^* - z_1 / g) \le \gamma_s\,,$$

где γ_i, γ_s – границы доверительной вероятности:

$$\gamma_i = 1 - (\alpha_S + \beta_I)\,,\ \gamma_s = 1 - (\alpha_I + \beta_S)\,. \tag{8.9}$$

При известных функциях распределения границ погрешности $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ границы доверительной вероятности γ_i, γ_s определяют границы доверительного интервала z_1, z_2.

Для гауссовского распределения границ с параметрами (m_{Sz}, σ_{Sz}), (m_{Iz}, σ_{Iz}) расчет границ доверительного интервала состоит в следующем.

Учтем, что $\alpha_S = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right)$, $\alpha_I = \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right)$, $\beta_S = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right)$, $\beta_I = 1 - \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция гауссовского распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Тогда из выражения (8.9) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) = \gamma_i, \\ \Phi\left(\frac{z_2 - m_{Sz}}{\sigma_{Sz}}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - m_{Iz}}{\sigma_{Iz}}\right) = \gamma_s. \end{cases}$$

Искомые границы z_1, z_2 являются решением этой системы.

8.4. Рациональный объем гиперслучайной выборки

Объем выборки имеет смысл увеличивать до тех пор, пока это приводит к ощутимому повышению точности измерения. Для реальных гиперслучайных оценок существует предел, выше которого увеличивать объем обрабатываемых данных оказывается не целесообразным. В этом отношении гиперслучайные оценки ведут себя подобно интервальным оценкам [32].

Рассмотрим простой пример. Измеряемая величина Θ, оценка Θ^* и выборка $\vec{X}$ – гиперслучайны. Случайная выборка $\vec{X}/g = \{X_n/g,\quad n = \overline{1,N}\}$, соответствующая условиям $g \in G$, представляет собой аддитивную смесь случайной величины Θ/g с дисперсией $\sigma^2_{\theta/g}$ и случайной однородной помехи, описываемой вектором $\vec{V}/g$, компоненты которого независимы и имеют одинаковые математические ожидания m_v и дисперсии $\sigma^2_{v/g}$. Помеха не зависит от измеряемой величины и дисперсия помехи лежит в диапазоне $[\sigma^2_{iv},\ \sigma^2_{sv}]$. Статистические условия меняются настолько медленно, что условия формирования выборки можно считать практически постоянными.

Необходимо оценить измеряемую величину θ/g в неизвестных условиях $g \in G$ и точность измерения.

Имея N подряд идущих отсчетов $x_n/\theta,g$, можно сформировать для неизвестных условий $g \in G$ оценку $\theta^*/\theta,g=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} x_n/\theta,g$. Параметры этой оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}=\sigma^2_{\theta/g}+\dfrac{\sigma^2_{v/g}}{N}$, $R_{\theta^*\theta/g}=\sigma^2_{\theta/g}$, а средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}=m_v^2+\dfrac{\sigma^2_{v/g}}{N}$. Тогда, в соответствии с выражением (7.6), имеем

$$m_v^2+\frac{\sigma^2_{iv}}{N}<\Delta^2_{z/g}<m_v^2+\frac{\sigma^2_{sv}}{N}. \qquad (8.10)$$

При $N \to \infty$ величина $\Delta^2_{z/g}=m_v^2=\varepsilon_0^2$. Используя правую часть неравенства (8.10), можно оценить *рациональный объем выборки* следующим образом: $N_0>\dfrac{10\sigma^2_{sv}}{m_v^2}$. Отсюда следует, что с уменьшением смещения $\varepsilon_0=m_v$ и увеличением верхней границы дисперсии помехи σ^2_{sv} требования к объему выборки повышаются. При смещении оценки, сопоставимом со среднеквадратическим отклонением помехи $(\varepsilon_0 \simeq \sigma_{sv})$, рациональный объем выборки N_0 оказывается в районе всего десяти отсчетов.

Описанные методы применимы для расчета погрешностей измерения различных детерминированных, случайных и гиперслучайных величин, наблюдаемых в неопределенных условиях. Они дают более объективную информацию об исследуемом явлении, чем традиционные методы, предполагающие определенный, например, равномерный закон распределения условий или вообще игнорирующие факт их изменения.

ГЛАВА 9

ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ОЦЕНКИ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Результаты, полученные для гиперслучайных оценок детерминированных и гиперслучайных величин, обобщены на случай гиперслучайных оценок гиперслучайных функций.

Обосновано предположение, что все реальные оценки физических процессов не состоятельны, а точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена.

9.1. Гиперслучайно-гиперслучайная модель измерения

В предыдущей главе предполагалось, что за время взятия выборки значение гиперслучайной измеряемой величины не меняется.

Если это условие не выполняется, то объектом измерения оказывается гиперслучайная функция $\Theta(t)$. Ее оценкой является гиперслучайная функция $\Theta^*(t)$, представляющая собой статистику выборки $X(t)$, где $t \in T$ – время, T – интервал наблюдения.

Гиперслучайные функции $\Theta(t)$, $X(t)$ и $\Theta^*(t)$ можно представить множеством соответствующих случайных функций: $\Theta(t)=\left\{\Theta(t)/g \in G\right\}$, $X(t)=\left\{X(t)/g \in G\right\}$, $\Theta^*(t)=\left\{\Theta^*(t)/g \in G\right\}$. Случайные функции $\Theta(t)/g$, $X(t)/g$, $\Theta^*(t)/g$ могут принимать множество конкретных значений (реализаций) $\left\{\theta(t)/g\right\}$, $\left\{x(t)/g\right\}$, $\left\{\theta^*(t)/g\right\}$. Случайная функция $\Theta^*(t)/g$ может быть представлена множеством условных случайных функций $\left\{\Theta^*(t)/\theta(t), g\right\}$.

Случайные функции $\Theta(t)/g$, $X(t)/g$, $\Theta^*(t)/\theta(t), g$, $\Theta^*(t)/g$ и $(\Theta(t),\Theta^*(t))/g$ описываются многомерными условными функциями распределения $F_{\theta/g}(\vec{\theta};\vec{t})$, $F_{x/g}(\vec{x};\vec{t})$, $F_{\theta^*/\theta,g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $F_{\theta^*/g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $F_{\theta^*\theta/g}(\vec{\theta}^*,\vec{\theta};\vec{t}_1,\vec{t}_2)$, многомерными условными плотностями расперделения $f_{\theta/g}(\vec{\theta};\vec{t})$, $f_{x/g}(\vec{x};\vec{t})$, $f_{\theta^*/\theta,g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $f_{\theta^*/g}(\vec{\theta}^*;\vec{t})$, $f_{\theta^*\theta/g}(\vec{\theta}^*,\vec{\theta};\vec{t}_1,\vec{t}_2)$, а также математическими ожиданиями $m_{\theta/g}(t)$, $m_{x/g}(t)$, $m_{\theta^*/\theta,g}(t)$, $m_{\theta^*/g}(t)=\mathrm{M}[m_{\theta^*/\Theta,g}(t)]$, $m_{\theta^*\theta/g}(t)$, дисперсиями $\sigma^2_{\theta/g}(t)$, $\sigma^2_{x/g}(t)$, $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}(t)$, $\sigma^2_{\theta^*/g}(t)$, ковариационным моментом

$$R_{\theta^*\theta/g}(t)=\mathrm{M}\left[\left(\Theta^*(t)/g-m_{\theta^*/g}(t)\right)\left(\Theta(t)/g-m_{\theta/g}(t)\right)\right]$$

и целым рядом других параметров.

Гиперслучайные функции $\Theta(t)$, $\Theta^*(t)/\theta(t)$, $\Theta^*(t)$ характеризуются математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}(t)$,

$m_{I\theta}(t)$, $m_{S\theta^*/\theta}(t)$, $m_{I\theta^*/\theta}(t)$, $m_{S\theta^*}(t)$, $m_{I\theta^*}(t)$, дисперсиями границ $\sigma^2_{S\theta}(t)$, $\sigma^2_{I\theta}(t)$, $\sigma^2_{S\theta^*/\theta}(t)$, $\sigma^2_{I\theta^*/\theta}(t)$, $\sigma^2_{S\theta^*}(t)$, $\sigma^2_{I\theta^*}(t)$ и прочими величинами.

Обобщенное представление о случайных функциях $\Theta(t)/g$, $\Theta^*(t)/\theta(t), g$, $\Theta^*(t)/g$ и $(\Theta(t),\Theta^*(t))/g$ на интервале T дают случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta, g$, Θ^*/g и $(\Theta,\Theta^*)/g$, функции распределения которых $F_{\theta/g}(\theta)$, $F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*)$, $F_{\theta^*/g}(\theta^*)$, $F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta)$ являются усредненными на интервале T функциями распределения соответствующих случайных функций

$$F_{\theta/g}(\theta) = \overline{F_{\theta/g}(\theta;t)}, F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*) = \overline{F_{\theta^*/\theta,g}(\theta^*;t)},$$

$$F_{\theta^*/g}(\theta^*) = \overline{F_{\theta^*/g}(\theta^*;t)}, \ F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta) = \overline{F_{\theta^*\theta/g}(\theta^*,\theta;t,t)},$$

где черта над функцией обозначает усреднение ее по времени t.

Случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta,g$, Θ^*/g, $(\Theta^*,\Theta)/g$ порождают соответствующие гиперслучайные величины $\Theta=\{\Theta/g \in G\}$, $\Theta^*/\theta=\{\Theta^*/\theta,g \in G\}$, $\Theta^*=\{\Theta^*/g \in G\}$, $(\Theta^*,\Theta) = \{(\Theta^*,\Theta)/g \in G\}$.

Случайные величины Θ/g, $\Theta^*/\theta, g$, Θ^*/g и $(\Theta,\Theta^*)/g$ описываются моментами, в частности, математическими ожиданиями $m_{\theta/g} = \overline{m_{\theta/g}(t)}$, $m_{\theta^*/\theta,g} = \overline{m_{\theta^*/\theta,g}(t)}$, $m_{\theta^*/g} = \overline{m_{\theta^*/g}(t)}$, $m_{\theta^*\theta/g} = \overline{m_{\theta^*\theta/g}(t)}$, дисперсиями $\sigma^2_{\theta/g} = \overline{\sigma^2_{\theta/g}(t)}$, $\sigma^2_{\theta^*/\theta,g} = \overline{\sigma^2_{\theta^*/\theta,g}(t)}$, $\sigma^2_{\theta^*/g} = \overline{\sigma^2_{\theta^*/g}(t)}$, ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g} = \overline{R_{\theta^*\theta/g}(t)}$ и др.

Гиперслучайные величины Θ, Θ^*/θ, Θ^* и (Θ^*,Θ) характеризуются моментами границ: математическими ожиданиями границ $m_{S\theta}$, $m_{I\theta}$, $m_{S\theta^*/\theta}$, $m_{I\theta^*/\theta}$, $m_{S\theta^*}$, $m_{I\theta^*}$, дисперсиями границ $\sigma^2_{S\theta}$, $\sigma^2_{I\theta}$, $\sigma^2_{S\theta^*/\theta}$, $\sigma^2_{I\theta^*/\theta}$, $\sigma^2_{S\theta^*}$, $\sigma^2_{I\theta^*}$ и пр.

Задача измерения гиперслучайной функции $\Theta(t)$ аналогична задаче измерения гиперслучайной величины Θ, рассмотренной в двух предыдущих главах Однако из-за функциональной зависимости от времени t эта задача оказывается более сложной. Ее можно описать следующим образом. Имеется конкретная выборка $x(t)/\theta(t),g$, соответствующая неизвестной функции $\theta(t)$ и неизвестным условиям $g \in G$, а также априорная информация о параметрах и характеристиках оценки и измеряемой функции. Необходимо вычислить оценку $\theta^*(t)/\theta(t),g$ и оценить точность измерения.

9.2. Погрешность измерения

Погрешность измерения в условиях $g \in G$ описывается случайной функцией $Z(t)/g=\Theta^*(t)/g-\Theta(t)/g$ или случайной величиной $Z/g=\Theta^*/g-\Theta/g$. Близость случайной оценки $\Theta^*(t)/g$ к измеряемой функции $\Theta(t)/g$ можно охарактеризовать в каждый момент времени t функцией распределения $F_{z/g}(z;t)$ функции $Z(t)/g$ или средним квадратом погрешности

$$\Delta^2_{z/g}(t)=\mathrm{M}\left[\left(\Theta^*(t)/g-\Theta(t)/g\right)^2\right], \qquad (9.1)$$

а близость случайной величины Θ^*/g к случайной величине Θ/g – функцией распределения $F_{z/g}(z)$ случайной величины Z/g или величиной

$$\Delta^2_{z/g}=\mathrm{M}\left[\left(\Theta^*/g-\Theta/g\right)^2\right]. \qquad (9.2)$$

Выражения (9.1), (9.2) могут быть представлены следующим образом:

$$\Delta^2_{z/g}(t)=m^2_{z/g}(t)+\sigma^2_{z/g}(t), \qquad \Delta^2_{z/g}=m^2_{z/g}+\sigma^2_{z/g},$$

где $m_{z/g}(t)=\varepsilon_g(t)=m_{\theta^*/g}(t)-m_{\theta/g}(t)$ – смещение оценки, $\sigma^2_{z/g}(t)=\sigma^2_{\theta^*/g}(t)+\sigma^2_{\theta/g}(t)-2R_{\theta^*\theta/g}(t)$ – дисперсия оценки, $m_{z/g}=\varepsilon_g=m_{\theta^*/g}-m_{\theta/g}$ – смещение усредненной оценки, $\sigma^2_{z/g}=\sigma^2_{\theta^*/g}+\sigma^2_{\theta/g}-2R_{\theta^*\theta/g}$ – дисперсия усредненной оценки.

В неопределенных условиях в каждый момент времени t точность измерения характеризуют границы функции распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$ случайной функции $Z(t)/g$ и функции

$$\Delta_{Sz}(t)=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z;t)\mathrm{d}z}\,,\ \Delta_{Iz}(t)=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z;t)\mathrm{d}z}\,, \tag{9.3}$$

а на интервале времени T – границы функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ случайной величины Z/g и величины

$$\Delta_{Sz}=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Sz}(z)\mathrm{d}z}\,,\ \Delta_{Iz}=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{Iz}(z)\mathrm{d}z}\,, \tag{9.4}$$

где $f_{Sz}(z;t)$, $f_{Iz}(z;t)$, $f_{Sz}(z)$, $f_{Iz}(z)$ – плотности распределения границ, соответствующие функциям распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$, $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$.

Функции $\Delta_{Sz}(t)$, $\Delta_{Iz}(t)$ характеризуют динамику изменения границ погрешности с течением времени, а величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} – значения границ усредненной погрешности на рассматриваемом интервале.

Функции $\Delta_{Sz}(t)$, $\Delta_{Iz}(t)$ определяются математическими ожиданиями $m_{Sz}(t)$, $m_{Iz}(t)$ границ функции распределения $F_{Sz}(z;t)$, $F_{Iz}(z;t)$ и среднеквадратическими отклонениями границ $\sigma_{Sz}(t)$, $\sigma_{Iz}(t)$, а величины Δ_{Sz}, Δ_{Iz} – математическими ожиданиями m_{Sz}, m_{Iz} границ функции распределения $F_{Sz}(z)$, $F_{Iz}(z)$ и среднеквадратическими отклонениями границ σ_{Sz}, σ_{Iz}

$$\Delta_{Sz}(t) = \sqrt{m_{Sz}^2(t) + \sigma_{Sz}^2(t)},$$
$$\Delta_{Iz}(t) = \sqrt{m_{Iz}^2(t) + \sigma_{Iz}^2(t)},$$
$$\Delta_{Sz} = \sqrt{m_{Sz}^2 + \sigma_{Sz}^2},$$
$$\Delta_{Iz} = \sqrt{m_{Iz}^2 + \sigma_{Iz}^2}.$$

Погрешность конкретного измерения $z(t)/g$ в неизвестных условиях g можно оценить неравенством

$$m_{Sz}(t) - k\sigma_{Sz}(t) < z(t)/g < m_{Iz}(t) + k\sigma_{Iz}(t), \tag{9.5}$$

а среднюю погрешность на интервале T – неравенством

$$m_{Sz} - k\sigma_{Sz} < z/g < m_{Iz} + k\sigma_{Iz}. \tag{9.6}$$

Интервал нахождения измеряемой функции $\theta(t)/g$ при наличии оценки $\theta^*(t)/\theta(t),g$ оценивается неравенствами

$$\begin{gathered} \theta^*(t)/\theta(t),g - m_{Iz}(t) - k\sigma_{Iz}(t) < \theta(t)/g < \\ < \theta^*(t)/\theta(t),g - m_{Sz}(t) + k\sigma_{Sz}(t), \end{gathered} \tag{9.7}$$

$$\theta^*(t)/\theta(t),g - m_{Iz} - k\sigma_{Iz} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t),g - m_{Sz} + k\sigma_{Sz}, \tag{9.8}$$

где k – некоторая константа, определяемая степенью доверия к результату измерения.

В неравенствах (9.7) – (9.8), как и в случае оценки гиперслучайной величины, учитывается различие дисперсий границ распределения, что существенно при значительном их различии. Неравенства (9.6) и (9.8) дают обобщенное представление об оценке на рассматриваемом интервале, а неравенства (9.5) и (9.7), отслеживающие специфические особенности сечений, – более подробное описание.

Если для всех $t \in T$ условные функции распределения погрешности $Z(t)/g \quad \forall g \in G$ не пересекаются и с ростом условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}(t)$ ее условные дисперсии $\sigma^2_{z/g}(t)$ увеличиваются (тип распределения «а» по классификации подраздела 3.1) или уменьшаются (тип распределения «б»), то интервалы (9.5), (9.7) характеризуются границами математического ожидания погрешности $m_{iz}(t)$, $m_{sz}(t)$ и границами дисперсии $\sigma^2_{iz}(t)$, $\sigma^2_{sz}(t)$, определяемыми следующим образом:

$$m_{iz}(t) = \inf_{g\in G} m_{z/g}(t) = \inf_{g\in G} \varepsilon_g(t) = \varepsilon_i(t),$$

$$m_{sz}(t) = \sup_{g\in G} m_{z/g}(t) = \sup_{g\in G} \varepsilon_g(t) = \varepsilon_s(t),$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_{iz}(t) &= \inf_{g\in G} \sigma^2_{z/g}(t) = \inf_{g\in G}[\sigma^2_{\theta^*/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)], \\ \sigma^2_{sz}(t) &= \sup_{g\in G} \sigma^2_{z/g}(t) = \sup_{g\in G}[\sigma^2_{\theta^*/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)]. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Для распределения типа «а» неравенства (9.5), (9.7) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i(t) - k\sigma_{iz}(t) < z(t)/g < \varepsilon_s(t) + k\sigma_{sz}(t), \\ &\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s(t) - k\sigma_{sz}(t) < \theta(t)/g < \\ &< \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i(t) + k\sigma_{iz}(t), \end{aligned} \tag{9.10}$$

а для распределения типа «б» –

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_i(t) - k\sigma_{sz}(t) < z(t)/g < \varepsilon_s(t) + k\sigma_{iz}(t),\\
&\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s(t) - k\sigma_{iz}(t) < \theta(t)/g <\\
&< \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i(t) + k\sigma_{sz}(t).
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Аналогично, если условные функции распределения усредненной погрешности Z/g $\forall g \in G$ не пересекаются и с ростом условных математических ожиданий погрешности $m_{z/g}$ ее условные дисперсии $\sigma^2_{z/g}$ увеличиваются (тип распределения «а») или уменьшаются (тип распределения «б»), то интервалы (9.6), (9.8) характеризуются границами смещения ε_i, ε_s и границами среднеквадратического отклонения погрешности σ_{iz}, σ_{sz}. При этом для распределения типа «а» неравенства (9.6), (9.8) имеют вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_i - k\sigma_{iz} < z(t)/g < \varepsilon_s + k\sigma_{sz},\\
\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s - k\sigma_{sz} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i + k\sigma_{iz},
\end{gathered} \tag{9.12}$$

а для распределения типа «б» –

$$\begin{gathered}
\varepsilon_i - k\sigma_{sz} < z(t)/g < \varepsilon_s + k\sigma_{iz},\\
\theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_s - k\sigma_{iz} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t), g - \varepsilon_i + k\sigma_{sz}.
\end{gathered} \tag{9.13}$$

Точные границы среднего квадрата погрешности $\Delta^2_{iz}(t)$, $\Delta^2_{sz}(t)$ определяются смещением оценки $\varepsilon_g(t)$, дисперсиями оценки $\sigma^2_{\theta^*/g}(t)$ и измеряемой величины $\sigma^2_{\theta/g}(t)$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}(t)$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta_{iz}^2(t) = \inf_{g \in G} \Delta_{z/g}^2(t) = \inf_{g \in G} [\varepsilon_g^2(t) + \sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)],$$

$$\Delta_{sz}^2(t) = \sup_{g \in G} \Delta_{z/g}^2(t) = \sup_{g \in G} [\varepsilon_g^2(t) + \sigma_{\theta^*/g}^2(t) + \sigma_{\theta/g}^2(t) - 2R_{\theta^*\theta/g}(t)].$$

Аналогично точные границы среднего квадрата усредненной погрешности Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 определяются смещением оценки ε_g, дисперсиями оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2$ и измеряемой величины $\sigma_{\theta/g}^2$, а также ковариационным моментом $R_{\theta^*\theta/g}$ при разных условиях $g \in G$:

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g \in G} \Delta_{z/g}^2 = \inf_{g \in G} (\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}),$$

$$\Delta_{sz}^2 = \sup_{g \in G} \Delta_{z/g}^2 = \sup_{g \in G} (\varepsilon_g^2 + \sigma_{\theta^*/g}^2 + \sigma_{\theta/g}^2 - 2R_{\theta^*\theta/g}).$$

9.3. Аддитивная модель оценки

Если оценка $\Theta^*(t)$ описывается *аддитивной моделью* в виде суммы измеряемой гиперслучайной величины $\Theta(t)$ и гиперслучайной помехи $W(t)$, то смещение $\varepsilon_g(t)$ равно математическому ожиданию $m_{w/g}(t)$ случайной помехи $W(t)/g$, дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2(t)$ – дисперсии помехи $\sigma_{w/g}^2(t)$, границы смещения $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_s(t)$ – соответственно границам математического ожидания помехи $m_{iw}(t)$, $m_{sw}(t)$, а границы дисперсии погрешности $\sigma_{iz}^2(t)$, $\sigma_{sz}^2(t)$ – соответствующим границам дисперсии помехи $\sigma_{iw}^2(t)$, $\sigma_{sw}^2(t)$.

Тогда для распределения погрешности типа «а» неравенства (9.10) приобретают вид

$$m_{iw}(t)-k\sigma_{iw}(t)<z(t)/g<m_{sw}(t)+k\sigma_{sw}(t),$$
$$\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{sw}(t)-k\sigma_{sw}(t)<\theta(t)/g<$$
$$<\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{iw}(t)+k\sigma_{iw}(t),$$

а для распределения типа «б» неравенства (9.11) –

$$m_{iw}(t)-k\sigma_{sw}(t)<z(t)/g<m_{sw}(t)+k\sigma_{iw}(t),$$
$$\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{sw}(t)-k\sigma_{iw}(t)<\theta(t)/g<$$
$$<\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{iw}(t)+k\sigma_{sw}(t).$$

Точные границы среднего квадрата погрешности

$$\begin{aligned}\Delta_{iz}^2(t)&=\inf_{g\in G}(m_{w/g}^2(t)+\sigma_{w/g}^2(t)),\\ \Delta_{sz}^2(t)&=\sup_{g\in G}(m_{w/g}^2(t)+\sigma_{w/g}^2(t)).\end{aligned} \tag{9.14}$$

Смещение ε_g равно математическому ожиданию $m_{w/g}$ случайной усредненной помехи W/g, соответствующей случайной функции $W(t)/g$, дисперсия погрешности $\sigma_{z/g}^2$ – дисперсии помехи $\sigma_{w/g}^2$, границы смещения ε_i, ε_s – соответственно границам математического ожидания помехи m_{iw}, m_{sw}, а границы дисперсии погрешности σ_{iz}^2, σ_{sz}^2 – соответствующим границам дисперсии помехи σ_{iw}^2, σ_{sw}^2.

Тогда неравенства (9.12) и (9.13) для распределений типа «а» и «б» можно представить соответственно как

$$m_{iw}-k\sigma_{iw}<z/g<m_{sw}+k\sigma_{sw},$$
$$\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{sw}-k\sigma_{sw}<\theta(t)/g<\theta^*(t)/\theta(t),g-m_{iw}+k\sigma_{iw}$$

и

$$m_{iw} - k\sigma_{sw} < z/g < m_{sw} + k\sigma_{iw},$$

$$\theta^*(t)/\theta(t),g - m_{sw} - k\sigma_{iw} < \theta(t)/g < \theta^*(t)/\theta(t),g - m_{iw} + k\sigma_{sw},$$

а точные границы усредненного среднего квадрата погрешности – как

$$\Delta_{iz}^2 = \inf_{g\in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2), \qquad \Delta_{sz}^2 = \sup_{g\in G}(m_{w/g}^2 + \sigma_{w/g}^2)\,. \qquad (9.15)$$

Из выражений (9.14) и (9.15) следует, что в случае аддитивной модели помехи гиперслучайные особенности измеряемой функции не влияют на точность измерения. Существенную роль играют лишь математическое ожидание и дисперсия помехи. При пренебрежимо малой дисперсии $\sigma_{w/g}^2(t)$ $\forall g \in G$ точные границы $\Delta_{iz}^2(t)$, $\Delta_{sz}^2(t)$ равны соответствующим границам квадрата математического ожидания помехи $m_{iw}^2(t)$, $m_{sw}^2(t)$, а точные границы усредненного среднего квадрата погрешности Δ_{iz}^2, Δ_{sz}^2 – границам квадрата математического ожидания усредненной помехи m_{iw}^2, m_{sw}^2.

9.4. Мультипликативная модель оценки

В другом частном случае *оценка* $\Theta^*(t)$ может быть представлена *мультипликативной моделью*, описываемой выражением $\Theta^*(t) = (1 + \Xi(t))\Theta(t)$. При этом погрешность $Z(t)/g = (\Xi(t)/g)(\Theta(t)/g)$, где $\Xi(t)$, $\Xi(t)/g$ – соответственно гиперслучайная и случайная функции, характеризующие множитель мультипликативной помехи.

Если функции $\Xi(t)/g$, $\Theta(t)/g$ независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}(t)$ (смещение оценки) равно $m_{\xi/g}(t)m_{\theta/g}(t)$, а дисперсия

$$\sigma^2_{z/g}(t) = \sigma^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t) + m^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)m^2_{\theta/g}(t),$$

где $m_{\xi/g}(t)$, $\sigma^2_{\xi/g}(t)$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия множителя $\Xi(t)/g$. При этом средний квадрат погрешности $\Delta^2_{z/g}(t) = \left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)$, точные границы среднего квадрата погрешности

$$\begin{aligned} \Delta^2_{iz}(t) &= \inf_{g\in G}\left[\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)\right], \\ \Delta^2_{sz}(t) &= \sup_{g\in G}\left[\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)\right], \end{aligned} \tag{9.16}$$

а параметры границ распределения погрешности описываются следующими выражениями:

$$m_{Sz}(t) = m_{S\xi}(t)m_{S\theta}(t),\ m_{Iz}(t) = m_{I\xi}(t)m_{I\theta}(t),$$
$$\sigma^2_{Sz}(t) = \sigma^2_{S\xi}(t)\sigma^2_{S\theta}(t) + m^2_{S\xi}(t)\sigma^2_{S\theta}(t) + \sigma^2_{S\xi}(t)m^2_{S\theta}(t),$$
$$\sigma^2_{Iz}(t) = \sigma^2_{I\xi}(t)\sigma^2_{I\theta}(t) + m^2_{I\xi}(t)\sigma^2_{I\theta}(t) + \sigma^2_{I\xi}(t)m^2_{I\theta}(t),$$

где $m_{S\xi}(t)$, $m_{I\xi}(t)$ – математические ожидания, а $\sigma^2_{S\xi}(t)$, $\sigma^2_{I\xi}(t)$ – дисперсии границ распределения множителя мультипликативной помехи.

Если функции $\Xi(t)/g$, $\Theta(t)/g$ независимы при любом g, то математическое ожидание погрешности $m_{z/g}$ равно $\overline{m_{\xi/g}(t)m_{\theta/g}(t)}$, а дисперсия

$$\sigma^2_{z/g} = \overline{\sigma^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t)} + \overline{m^2_{\xi/g}(t)\sigma^2_{\theta/g}(t)} + \overline{\sigma^2_{\xi/g}(t)m^2_{\theta/g}(t)}.$$

При этом средний квадрат усредненной погрешности $\Delta^2_{z/g} = \overline{\left(m^2_{\xi/g}(t) + \sigma^2_{\xi/g}(t)\right)\left(m^2_{\theta/g}(t) + \sigma^2_{\theta/g}(t)\right)}$, точные границы среднего квадрата усредненной погрешности

$$\begin{aligned}\Delta_{iz}^2 &= \inf_{g\in G}\left[\overline{\left(m_{\xi/g}^2(t)+\sigma_{\xi/g}^2(t)\right)\left(m_{\theta/g}^2(t)+\sigma_{\theta/g}^2(t)\right)}\right],\\ \Delta_{sz}^2 &= \sup_{g\in G}\left[\overline{\left(m_{\xi/g}^2(t)+\sigma_{\xi/g}^2(t)\right)\left(m_{\theta/g}^2(t)+\sigma_{\theta/g}^2(t)\right)}\right],\end{aligned} \quad (9.17)$$

а параметры границ распределения усредненной погрешности описываются выражениями

$$m_{Sz} = \overline{m_{S\xi}(t)m_{S\theta}(t)},\ m_{Iz} = \overline{m_{I\xi}(t)m_{I\theta}(t)},$$
$$\sigma_{Sz}^2 = \overline{\sigma_{S\xi}^2(t)\sigma_{S\theta}^2(t)} + \overline{m_{S\xi}^2(t)\sigma_{S\theta}^2(t)} + \overline{\sigma_{S\xi}^2(t)m_{S\theta}^2(t)},$$
$$\sigma_{Iz}^2 = \overline{\sigma_{I\xi}^2(t)\sigma_{I\theta}^2(t)} + \overline{m_{I\xi}^2(t)\sigma_{I\theta}^2(t)} + \overline{\sigma_{I\xi}^2(t)m_{I\theta}^2(t)}.$$

Из выражений (9.16), (9.17) видно, что в случае мультипликативной помехи погрешность измерения определяется математическими ожиданиями и дисперсиями множителя мультипликативной помехи и измеряемой функции.

9.5. Характерные особенности гиперслучайных оценок гиперслучайных функций

По аналогии с гиперслучайными оценками гиперслучайных величин для гиперслучайных оценок гиперслучайных функций можно ввести понятия несмещенных, состоятельных, эффективных и достаточных оценок.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ будем называть *несмещенной* (*несмещенной при всех условиях* $g \in G$), если для всех $g \in G$ математическое ожидание $m_{\theta^*/g}(t)$ случайной функции $\Theta^*(t)/g$ равно математическому ожиданию $m_{\theta/g}(t)$ условной случайной функции $\Theta(t)/g$, т.е. если

$\varepsilon_g(t) = 0 \quad \forall g \in G$. В противном случае оценку будем называть *смещенной*.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ можно назвать *состоятельной*, если для всех условий $g \in G$ и всех $t \in T$ она сходится по вероятности к этой величине:

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{ \left| \Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g \right| > \varepsilon \right\} = 0 \ \ \forall g \in G, \quad t \in T,$$

где N — объем выборки для каждого условия g.

Приведенное определение понятия несмещенной оценки и состоятельной оценки для гиперслучайной функции согласовано с определениями этих же понятий для детерминированной величины и случайной оценки, для детерминированной величины и гиперслучайной оценки, а также гиперслучайной величины и гиперслучайной оценки.

Если оценка несмещенная, то границы математического ожидания измеряемой функции и границы математического ожидания оценки совпадают $m_{i\theta}(t) = m_{i\theta^*}(t)$, $m_{s\theta} = m_{s\theta^*}$. При этом из факта, что оценка несмещенная не следует, что обязательно совпадают соответствующие математические ожидания границ (т.е. $m_{S\theta}(t) = m_{S\theta^*}(t), m_{I\theta}(t) = m_{I\theta^*}(t)$).

Нетрудно убедиться, что гиперслучайная оценка случайной функции, сохраняющая гиперслучайный характер при $N \to \infty$, подобно гиперслучайной оценке детерминированной величины, а также гиперслучайной оценке случайной величины, не состоятельна.

Если гиперслучайная оценка $\Theta^*(t)$ гиперслучайной функции $\Theta(t)$ сохраняет гиперслучайный характер при $N \to \infty$, то теоретически оценка может быть состоятельной. Такая возможность имеет место, когда для всех условий $g \in G$ и всех

$t \in T$ при $N \to \infty$ смещение оценки отсутствует. Такое требование не практике никогда невыполнимо.

Поэтому *все реальные оценки физических процессов оказываются не состоятельными. Это означает, что точность измерения реальных процессов, как и точность измерения реальных физических величин, ограничена.*

Гиперслучайную оценку $\Theta_e^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ будем называть *эффективной,* если для всех условий $g \in G$ и всех $t \in T$ математическое ожидание квадрата отклонения оценки $\Theta_e^*(t)/g$ от величины $\Theta(t)/g$ по совокупности выборок заданного объема N (т.е. средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2(t)$) не больше, чем для любых других оценок $\Theta_i^*(t)/g$:

$$\Delta_{z_e/g}^2(t) \le \Delta_{z_i/g}^2(t), \quad i = 1,2,... \quad \forall g \in G, \tag{9.18}$$

где
$$\Delta_{z_e/g}^2(t) = \mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2],$$
$$\Delta_{z_i/g}^2(t) = \mathrm{M}[(\Theta_i^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2].$$

В случае несмещенной оценки детерминированной величины средний квадрат погрешности $\Delta_{z/g}^2(t)$ равен дисперсии оценки $\sigma_{\theta^*/g}^2(t)$. Тогда условие эффективности может быть записано в виде $\sigma_{\theta_e^*/g}^2(t) \le \sigma_{\theta_i^*/g}^2(t), \quad i = 1,2,\ldots \quad \forall g \in G$.

Мерой эффективности могут служить границы относительной эффективности оценки l_i, l_s, определяемые как границы отношения усредненного по времени математического ожидания квадрата отклонения от $\Theta(t)/g$ эффективной оценки $\Theta_e^*(t)/g$ к усредненному по времени математическому ожиданию квадрата отклонения от $\Theta(t)/g$ рассматриваемой оценки $\Theta^*(t)/g$:

$$l_i = \inf_{g \in G} \frac{\overline{\mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}{\overline{\mathrm{M}[(\Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}},$$

$$l_s = \sup_{g \in G} \frac{\overline{\mathrm{M}[(\Theta_e^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}{\overline{\mathrm{M}[(\Theta^*(t)/g - \Theta(t)/g)^2]}}.$$

Границы относительной эффективности находятся в интервале [0,1]. Когда оценка эффективна, $l_i = l_s = 1$.

Гиперслучайную оценку $\Theta^*(t)$ *гиперслучайной функции* $\Theta(t)$ можно называть *достаточной* (при всех условиях $g \in G$), если гиперслучайные оценки гиперслучаных величин, соответствующие всем $t \in T$, являются достаточными.

Если гиперслучайная оценка гиперслучайной функции является эффективной, то она достаточная. Обратное утверждение неверно.

ГЛАВА 10

ВОЗМОЖНОСТИ ПОЗНАНИЯ

Рассмотрены вопросы неформализованного и формализованного описания окружающего мира. Исследованы причины, ограничивающие возможность построения моделей, адекватно представляющих физические объекты. Главным ограничивающим фактором является непредсказуемая изменчивость объектов и статистических условий их наблюдения. Широкая распространенность этих факторов свидетельствует, что в основе мироздания, по всей видимости, лежат гиперслучайные принципы.

10.1. Неформализованное и формализованное представление о мире

Окружающий мир представляет собой сложную систему, содержащую бесчисленное множество взаимосвязанных элементов – объектов. Каждый объект характеризуется бесконечным числом свойств, определяющих его особенности. Отдельные свойства разных объектов могут совпадать или быть близкими по определенному критерию. Объекты с одинаковыми или близкими свойствами группируются в нашем сознании в классы *подобных объектов*.

Каждый объект может входить в состав нескольких классов. Классы могут входить в состав других классов. Свойства, присущие подобным объектам класса, рассматриваются как *закономерности.*

Закономерности тоже являются объектами. Как и другие объекты, они могут образовывать классы. Закономерности определяют специфические особенности связей объектов, входящих в класс, с объектами этого же класса и с объектами других классов.

Классами, например, являются множество всех физических объектов, подчиняющихся законам классической механики, все законы механики, предметы, размер которых меньше или больше определенной величины, растения определенного рода или животные определенного вида, люди определенной национальности, веры, расы или возрастной категории, жители одной страны и т.д.

Классификация объектов – один из краеугольных камней познания мира. Она включает выявление новых объектов, исследование и описание их свойств, пополнение известных классов новыми объектами и формирование новых классов.

В результате классификации в сознании человека формируются *неформализованные модели*, дающие интегральное представление о классах подобных объектов.

Неформализованные модели не идентичны рассматриваемым объектам, т.к. несут информацию о множестве подобных объектов, входящих в классы, и являются их осредненными образами.

Каждый новый объект человек пытается отнести, как правило, бессознательно к разным неформализованным моделям. Модели, к которым этот объект наиболее подходит, ассоциируются с объектом и, наоборот, объект ассоциируется с этими моделями. В результате формируется множество неформализованных моделей, совокупность которых воспринимается человеком как некий образ объекта. Множество образов разных объектов создает субъективное представление человека о мире.

Окружающий мир постоянно меняется, меняются объекты и их модели. Изменение моделей обусловлено не только изменением самих объектов, но и изменением критериев классификации. Существенную роль при выборе критерия играют приобретенный ранее опыт, окружающая среда и многие другие факторы.

Люди отличаются между собой и отличаются условия их жизни. Поэтому для разных людей разными оказываются неформализованные модели одних и тех же объектов, образы и представления о мире.

Реальные объекты воспринимаются человеком с помощью органов чувств в форме *оценок*, которые тоже можно рассматривать как объекты.

Оценка зависит от множества субъективных и объективных факторов (условий). Отличие оценки от реального объекта вызвано, во-первых, несовершенством наших органов чувств и средств наблюдения, а во-вторых, наличием различных помех. При изменении условий (например, ухудшении зрения, использовании более или менее совершенных средств наблюдения, изменении характеристик помехи и др.) оценка меняется.

Модель и оценка – разные понятия. Если модель объекта – обобщенное представление о совокупности подобных объектов, то оценка – несколько искаженное представление об одном объекте.

По совокупности оценок строится усредненная оценка, представляющая собой модель оценки.

Множество разных оценок, соответствующих одному и тому же объекту или различным объектам определенного класса, порождает в сознании человека *неформализованную модель оценки*. Эта модель, как и модель объекта, постоянно меняется. Изменения вызваны изменением объектов, оценок и критериев классификации объектов и их оценок. Неформализованные модели оценок являются базой для формирования неформализованных моделей объектов.

Неформализованные модели объектов и неформализованные модели оценок – разные категории. Однако в сознании людей они обычно отождествляются.

Неформализованные модели объектов и оценок можно формализовать с помощью *физических моделей*, учитывающих наиболее существенные их особенности, и описать *математическими моделями*.

Для каждой совокупности реальных объектов и совокупности оценок можно построить множество разных физических моделей. Каждая физическая модель может быть описана по-разному множеством разных математических моделей.

На этапе формализации часть объектов, входящих в рассматриваемый класс объектов, может не описываться физической моделью. Вместе с тем в нее могут быть включены объекты, не входящие в рассматриваемый класс. При построении математической модели, как правило, все объекты рассматриваемого класса, попавшие в физическую модель, описываются математической моделью.

На рис. 10.1 схематично изображены подобные объекты одного класса, их оценки, рассматриваемый объект x, его оценка x^*, модели объекта (неформализованная N_x, физическая P_x и математическая M_x), а также модели оценки (неформализованная N_{x^*}, физическая P_{x^*} и математическая M_{x^*}).

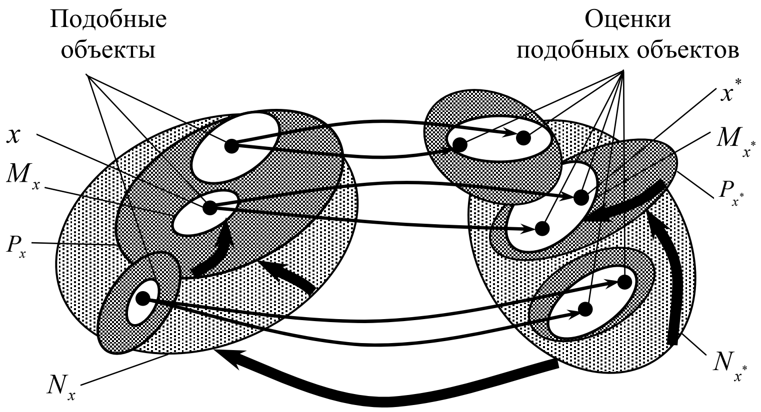


Рис. 10.1. Схема формирования моделей и оценок

Физические модели объектов и оценок строятся на основе соответствующих неформализованных моделей, а математические – на основе соответствующих физических моделей.

10.2. Метрика и сравнение объектов

Прежде всего, заметим, что все неформализованные, физические и математические модели объектов и модели оценок представляют собой объекты.

Для количественной характеристики близости объектов необходимо введение *метрического пространства* – множества S, для произвольных элементов x, y которого определена вещественная функция $\mu(x, y)$ (*метрика или расстояние*), удовлетворяющая постулатам Линденбаума:

1) $\mu(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\mu(x, y) \le \mu(z, x)+\mu(z, y)$ (неравенство треугольника),

где x, y, z – произвольные элементы множества S.

Нетрудно показать, что метрика – неотрицательная величина и $\mu(x, y)=\mu(y, x)$.

Не для любого множества можно построить метрическое пространство. Например, для множества действительных функций, определенных на конечном интервале, построение метрического пространства невозможно. Поэтому нельзя построить метрическое пространство, включающее модель реального объекта и модели всех потенциально возможных его оценок. Сузив класс рассматриваемых функций, например, до непрерывных действительных функций, можно построить метрическое пространство. В этом случае для всех математических объектов, описываемых такими функциями, можно определить расстояние.

На одном и том же множестве S разные метрики порождают разные метрические пространства. Вариационный ряд расстояний между конкретными элементами $x, y, z,\ldots$ зависит от метрики. Поэтому в двух разных метрических пространствах, построенных на одном и том же множестве, включающем модель реального объекта и модели его оценок, к модели реального объекта наиболее близко расположенными могут оказаться разные модели оценок.

Возможно существование целого класса метрических пространств, заданных на одном и том же множестве, для которых наиболее близкой оказывается одна и та же модель оценки.

Введением метрики устанавливается эталонная величина (некая условная единица), с которой сравнивается расстояние.

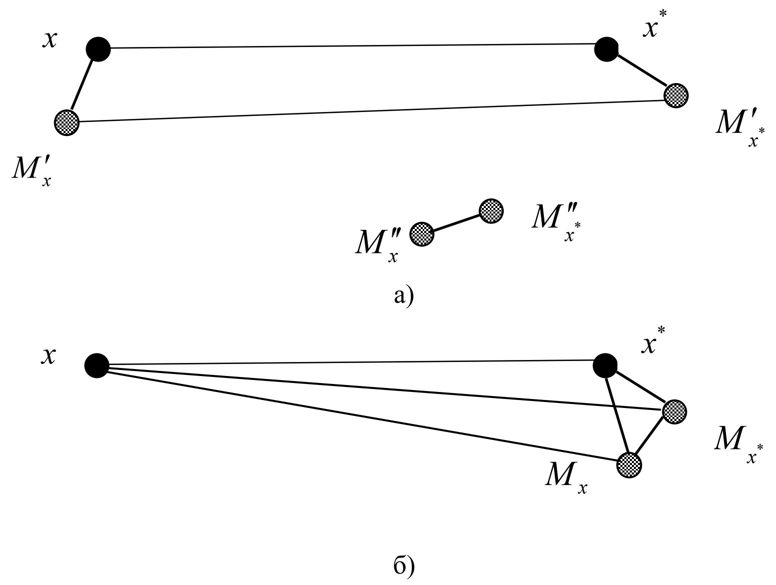


Рис. 10.2. Взаимное расположение объекта, оценки и их моделей

Близость моделей M'_x, M'_{x^*} к соответствующим объектам ($\mu(x, M'_x) \sim 0$, $\mu(x^*, M'_{x^*}) \sim 0$) так же, как и близость модели оценки M''_{x^*} к модели реального объекта M''_x ($\mu(M''_x, M''_{x^*}) \sim 0$), не гарантирует, что оценка и ее модель близки к реальному объекту (рис. 10.2 а). Оценка x^*, модель оценки M_{x^*} и модель объекта M_x могут находиться близко друг к другу, однако вдали от самого объекта x (рис. 10.2 б).

На практике для подтверждения адекватности теории часто прибегают к проверке близости теоретических результатов к экспериментальным данным.

Следует отметить, что малое отличие результатов, обычно рассматриваемое как неоспоримый довод верности теории, в действительности не является таковым. Экспериментальный результат представляет собой оценку, а теоретический результат – модель другой оценки. Близость этих результатов свидетельствует лишь о том, что они мало отличаются между собой, но не о близости их к реальному объекту. В вопрос об адекватности модели остается открытым до тех пор, пока не установлен факт близости экспериментального результата к исследуемому объекту.

10.3. Построение адекватных оценок и моделей

Истинная (неискаженная) информация о реальном объекте x недоступна. Поэтому невозможно установить степень близости к объекту ни оценки x^*, ни модели оценки M_{x^*}, ни модели объекта M_x.

Вследствие этого, задача построения адекватных оценок и моделей не имеет точного решения.

В дальнейшем под адекватными подразумеваются оценки и модели, находящиеся в окрестности рассматриваемого объекта.

Совпадение оценки, модели оценки или модели объекта с соответствующим реальным объектом практически невозможно. Причин тому много. Среди наиболее существенных можно отметить следующие:

– учет при формировании физических моделей не всех факторов, определяющих состояние реального объекта и оценки;

– формирование модели объекта на основе модели оценки;

– несогласованное изменение состояния реального объекта и оценки;

– отставание физических моделей от текущего состояния объекта и оценки;

– отставание математических моделей от физических моделей;

– статистическая непредсказуемость поведения объекта и оценки;

– воздействие различных мешающих факторов (помех), приводящее к искажению оценки, модели оценки и модели реального объекта;

– статистическая непредсказуемость характеристик помех;

– несовершенство физических и математических моделей и др.

Расстояние между оценкой и объектом представляет собой погрешность оценки. Эта погрешность обусловлена неадекватным восприятием исследуемого объекта и воздействием помех. Неадекватное восприятие может быть вызвано объективными и субъективными причинами. Помехи, как правило, связаны с объективными факторами.

Разный характер причин, вызывающих отличие оценки от реального объекта, требует разных подходов к учету и компенсации связанных с ними составляющих погрешности. При этом обычно применяется одна и та же стратегия: накопление данных и последующее их усреднение.

Компенсация неадекватного восприятия объекта, вызванного объективными причинами, базируется на формировании ряда оценок, полученных разными способами, неадекватного восприятия, обусловленного субъективными причинами, – на многократной оценке объекта разными субъектами, а компенсация воздействия помех в статистически постоянных условиях – на множестве оценок, полученных в фиксированных условиях.

Результаты многократной оценки объекта разными способами и разными субъектами используются для построения усредненной оценки – обобщенной модели. Получаемая таким образом усредненная оценка, хотя и оказывается ближе к реальному объекту, чем большая часть исходных оценок, но все же не совпадает с реальным объектом. Обусловлено это не только тем, что объем данных всегда ограничен и способ усреднения, как правило, не оптимален. Главная причина, что не принимается во внимание изменение характеристик исследуемого объекта и действующих помех.

Использование различных адаптивных методов, учитывающих динамику изменения переменных параметров, в ряде случаев приводит к снижению погрешности, однако в результате инерционности адаптивных алгоритмов и непредсказуемой изменчивости объекта и статистических условий наблюдения полная компенсация всех дестабилизирующих эффектов не достигается.

В итоге при увеличении объема данных погрешность усредненной оценки не стремится к нулю и оценка оказывается несостоятельной.

Описанные методы уменьшения погрешности оценки широко используются на практике, в частности, при измерении физических величин.

10.4. Измерение физических величин

В метрологии рассматриваются два вида *погрешностей* измерения физических величин: *систематическая* и *случайная*. Под систематической понимают погрешность, которая при многократном измерении одной и той же величины остается постоянной или меняется по определенному закону, а под случайной – погрешность, которая при повторных измерениях меняется случайным образом [33].

В ряде случаев систематическая погрешность теоретически может быть скомпенсирована путем применения особых способов измерения, которые дают возможность без определения ее величины уменьшить ее влияние на конечный результат. Известен целый ряд таких способов: замещения, компенсации погрешности по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений и др. [33].

Идея компенсации систематической погрешности способом противопоставления может быть проиллюстрирована на примере взвешивания груза на равноплечих весах. Этот способ был предложен Гауссом.

Реальная длина плеч весов несколько отличается. Поэтому результат взвешивания P_1 не равен истинному весу груза P. Систематическую погрешность, вызванную разной длиной плеч, можно скомпенсировать путем повторного взвешивания груза, поменяв местами груз и гири. Нетрудно показать, что вес груза равен среднегеометрическому результатов двух взвешиваний: $P = \sqrt{P_1 P_2}$, где P_2 – результат повторного взвешивания.

Случайная погрешность может быть уменьшена путем многократного измерения веса груза и усреднения полученных данных.

Возможности уменьшения случайной погрешности ограничены интервалом времени T_P , на протяжении которого вес груза практически не меняется, и интервалом времени T_C , на протяжении которого статистические условия наблюдения остаются стабильными. Реальные интервалы T_P , T_C конечны, поэтому оценка несостоятельна и погрешность оценки не равна нулю.

Даже при наличии неограниченного объема данных нельзя достичь любой, как угодно высокой, точности измерения. Точность измерения всегда ограничена пространственно-временными интервалами стабильности объекта и условиями его наблюдения. Предупреждением о приближении к предельной точности измерения служит снижение эффективности усреднения при формировании оценки, что проявляется в замедлении темпов уменьшения дисперсии оценки с ростом объема данных.

***

Повсеместно наблюдаемые факты нестабильности объектов и непредсказуемой изменчивости статистических условий их наблюдения указывает, что в основе мироздания, по всей видимости, лежат гиперслучайные принципы.

Принимая концепцию гиперслучайного устройства физического мира, следует признать целый ряд положений, прямо следующих из нее:

– для любого реального физического объекта невозможно получить абсолютно точную оценку и построить абсолютно адекватную математическую модель;

– все реальные оценки и построенные на их основе модели оценок и объектов несостоятельны (при увеличении объема обрабатываемых данных их погрешность не стремится к нулю);

– нельзя экспериментально доказать, что даже самая совершенная физическая теория абсолютно точно описывает законы природы;

– никакими реальными средствами измерения невозможно подтвердить или опровергнуть факт существования мировых констант;

– невозможно сделать абсолютно точный прогноз будущего по данным настоящего и прошлого.

Этот перечень можно продолжить и далее. Каждый его пункт требует всестороннего исследования и осмысления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леман Е.* Проверка статистических гипотез / Пер. с англ. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1971. – 375 с.
2. *Королюк В.С.* и др. Справочник по теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1985. – 637 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1976. – Т. 3. – 285 с.
4. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П. А. –М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
5. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. – М.: Советское радио, 1972. – Т. 1. – 743 с.; 1975. – Т. 2. – 343 с.; 1977. – Т. 3. – 662 с.
6. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984. – 303 с.
7. *Кнопов П.С., Голодников А.Н., Пепеляев В.А.* Оценивание параметров надежности при наличии неполной первичной информации // Компьютерная математика. – 2003. – № 1. – С. 36 – 37.
8. *Кравцов Ю.А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 158, Вып. 1. – С. 93–122.
9. *Zadeh L.A. and Kacprzyk J. Fuzzy logic for the* management of uncertainty. – New York: John Wiley & Sons, 1992. – 256 p.
10. *Hagan M.T., Demuth H.B., Beale M.H.* Neural network design. – Boston, MA: PWS Publishing, 1996. – 252 p.
11. *Crownover R.M.* Introduction to fractals and chaos. –Boston – London: Jones and Bartlett Pub., Inc., 1995. – 195 p.
12. *Гринченко В.Т., Мацапура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. – К.: Наукова думка, 2005. – 263 с.
13. *Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.* Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56, №7. – С. 76–81.
14. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
15. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления и их описание // Акустичний вісник. – 2005. – Т. 8, № 1 – 2. – С. 16–27.
16. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.
17. *R. von Mises.* Mathematical theory of probability and statistics / Edited and complemented by H. Geiringer. – N.Y. and London: Acad. Press, 1964. – 232 p.

18. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 406 с.

19. *Горбань И.И.* Гиперслучайные функции и их описание // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – № 1. – С. 3–15.

20. *Горбань И.И.* Методы описания гиперслучайных величин и функций // Акустичний вісник. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 24 – 33.

21. *Горбань И.И.* Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин // Математичні машини і системи. – 2006. – № 2. – С. 3–14.

22. *Горбань И.И.* Представление физических явлений гиперслучайными моделями // Математичні машини і системи. – 2007. – № 1. – С. 34–41.

23. *Горбань И.И.* Стационарные и эргодические гиперслучайные функции // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – № 6. – С. 54 – 70.

24. *Горбань И.И.* Оценки характеристик гиперслучайных величин // Математичні машини і системи. – 2006. – № 1. – С. 40 –48.

25. *Горбань И.И.* Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизація, сертифікація, якість. – 2005. – № 3. – С. 41–48.

26. *Горбань І.І.* Гіпервипадкові явища: визначення та опис // Науково-технічний вісник ДП «УкрНДНЦ». – 2006.– Вип. 3. – С. 96 – 112.

27. *Горбань І.І.* Математичний опис фізичних явищ у статистично нестабільних умовах. // Стандартизація, сертифікація, якість – 2006. – № 6. – С. 26–33.

28. *Кунцевич В.М.* Управление вы условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К.: Наукова думка, 2006. – 261 с.

29. *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E.* Eds. Bounding approaches to system identification. – New York: Plenum Press, 1996. 248 p.

30. *Левин В.И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. – 1998. – № 6. (Федеральный портал «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. 5 мая 2005. www.techno.edu.ru).

31. *Горбань І.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. – К.: Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, 2003. – 245 с.

32. *Орлов А.И.* Эконометрика. – М.: Экзамен, 2002. – 576 с.

33. *Тюрин Н.И.* Введение в метрологию. – М.: Издательство стандартов, 1973. – 279 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Операторы:

$\mathrm{D}[X]$ – дисперсия случайной величины X;

$\mathrm{D}_I[X]$, $\mathrm{D}_S[X]$ – дисперсии нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X;

$\mathrm{M}[X]$ – математическое ожидание случайной величины X;

$\mathrm{M}_i[X]$, $\mathrm{M}_s[X]$ – нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X;

$\mathrm{M}_I[X]$, $\mathrm{M}_S[X]$ – математические ожидания нижней и верхней границ распределения гиперслучайной величины X;

$\mathrm{M}_S[X]$ – математическое ожидание верхней границы распределения гиперслучайной величины X;

$\mathrm{M}_0[X]$ – усредненное математическое ожидание границ распределения гиперслучайной величины X;

$\overline{\mathrm{M}}_T[X(t)]$ – среднее по t на интервале T гиперслучайной функции $X(t)$;

$P\{A\}$ – вероятность выполнения условия A;

$P(A)$ – вероятность события A;

$P_I(A)$, $P_S(A)$ – нижняя и верхняя границы вероятности события A;

$P_S(A)$ – верхняя граница вероятности события A.

Специальные математические знаки:

$\inf$, $\sup$ – нижняя и верхняя границы;

$\lim\limits_{N\to\infty} X_N$ – сходимость гиперслучайной величины X_N с вероятностью единица (почти наверное);

$\operatorname*{l.i.m.}\limits_{N\to\infty} X_N$ – сходимость гиперслучайной величины X_N в среднеквадратическом;

$\mathrm{rect}[x]$ – Π-образная функция;

$\forall$ – для всех;

$\bigcap$ – логическое умножение;

$\bigcup$ – логическое сложение;

$\varnothing$ – пустое множество;

θ^* – оценка величины θ.

Функции:

D_{ix}, D_{sx} – нижняя и верхняя границы дисперсии гиперслучайной величины X;

D_{Ix}, D_{Sx} – дисперсии нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X;

$f(x)$ – плотность распределения случайной величины X;

$f(x/g)$ – плотность распределения гиперслучайной величины X в условиях g;

$f_I(x)$, $f_S(x)$ – плотности распределения нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X;

$f_0(x)$ – среднее плотностей распределения границ гиперслучайной величины X;

$F(x)$ – функция распределения случайной величины X;

$F_I(x)$, $F_S(x)$ – нижняя и верхняя границы функции распределения гиперслучайной величины X;

$F(x/g)$ – условная функция распределения гиперслучайной величины X в условиях g;

$F(x/m, D)$ – гауссовская функция распределения с математическим ожиданием m и дисперсией D;

$\Delta F(x)$ – разность границ функции распределения гиперслучайной величины X;

$F_0(x)$ – среднее границ функции распределения гиперслучайной величины X;

$K_{ix}(t_1, t_2)$, $K_{sx}(t_1, t_2)$ – нижняя и верхняя границы корреляционной функции гиперслучайной функции $X(t)$;

$K_{Ix}(t_1, t_2)$, $K_{Sx}(t_1, t_2)$ – корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$;

$K_{Ixy}(t_1, t_2)$, $K_{Sxy}(t_1, t_2)$ – взаимные корреляционные функции нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

m_{ix}, m_{sx} – нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X;

m_{Ix}, m_{Sx} – математические ожидания нижней и верхней границ функции распределения гиперслучайной величины X;

$m_{i\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{s\,\nu_1 \ldots \nu_L}$ – нижняя и верхняя границы начальных моментов порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора;

$m_{I\,\nu_1 \ldots \nu_L}$, $m_{S\,\nu_1 \ldots \nu_L}$ – начальные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора;

$Q(\mathrm{j}\omega_x)$ – характеристическая функция случайной величины X;

$Q(\mathrm{j}\omega_x/g)$ – условная характеристическая функция гиперслучайной величины X в условиях g;

$Q_I(\mathrm{j}\omega_x)$, $Q_S(\mathrm{j}\omega_x)$ – характеристическая функция нижней и верхней границы функции распределения гиперслучайной величины X;

$Q_0(\mathrm{j}\omega_x)$ – среднее характеристических функций распределения границ гиперслучайной величины X;

$r_{ix}(t_1,t_2)$, $r_{sx}(t_1,t_2)$ – нижняя и верхняя нормированные границы ковариационной функции гиперслучайной функции $X(t)$;

$r_{Ix}(t_1,t_2)$, $r_{Sx}(t_1,t_2)$ – нормированные ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$;

$R_{Ix}(t_1,t_2)$, $R_{Sx}(t_1,t_2)$ – ковариационные функции нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$;

$S_{ixx}(f)$, $S_{sxx}(f)$ – нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности гиперслучайной функции $X(t)$;

$S_{Ixx}(f)$, $S_{Sxx}(f)$ – спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайной функции $X(t)$;

$S_{Ixy}(f)$, $S_{Sxy}(f)$ – взаимные спектральные плотности мощности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

δ – дельта функция;

$\gamma^2_{ixy}(f)$, $\gamma^2_{sxy}(f)$ – нижняя и верхняя границы функции частотной когерентности гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$\gamma^2_{Ixy}(f)$, $\gamma^2_{Sxy}(f)$ – функции частотной когерентности нижней и верхней границ гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$\mu_{i\ \nu_1\ldots\nu_L}$, $\mu_{s\ \nu_1\ldots\nu_L}$ – нижняя и верхняя границы центральных моментов порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора;

$\mu_{I\ \nu_1\ldots\nu_L}$, $\mu_{S\ \nu_1\ldots\nu_L}$ – центральные моменты нижней и верхней границ порядка $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_L$ гиперслучайного вектора;

$\Phi(x)$ – гауссовская функция распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

СОДЕРЖАНИЕ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
Институт проблем математических машин и систем

ГОСПОТРЕБСТАНДАРТ УКРАИНЫ
ГП “УкрНДНЦ”

Горбань Игорь Ильич

Теория
гиперслучайных
явлений

Редакционный отдел института проблем
математических машин и систем НАН Украины
03187, Киев – 187, пр. Глушкова, 42

Редактор Тимчик С.Г.

Підписано до друку 27.05.2007. Формат 60х84 1/16.
Папір офсетний. Наклад 500 прим. Зам. 07-077.

Офс. друк. Ум. друк. арк. 11, 4.
Ум. фарбо-відб. 11,4.
Обл.-вид. арк. 10,4.

Підготовлено і надруковано СМП "Аверс"
04214, Київ, пр. Оболонський, 36.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 586 від 05.09.2001 р.

Горбань Игорь Ильич,
доктор технических наук,
профессор

Научные интересы:

- пространственно-временная обработка гидроакустических и радиолокационных сигналов в сложных динамических условиях;
- быстрая многоканальная цифровая обработка сигналов;
- акустические эффекты в динамических условиях;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математическое моделирование физических процессов и полей.