УДК 539.12.08

ПРО ТОЧНІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ АКТИВНОСТІ ТВЕРДИХ РАДІОАКТИВНИХ ВІДХОДІВ ГАММА-СПЕКТРОМЕТРАМИ З ТЕОРЕТИЧНИМ РОЗРАХУНКОМ ЕФЕКТИВНОСТІ

М.І.Панасюк, *кандидат технічних наук, завідуючий сектором Інституту проблем безпеки атомних електростанцій НАН України, м. Чорнобиль*

А.Д.Скорбун, *кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту проблем безпеки атомних електростанцій НАН України, м. Чорнобиль*

Б.М.Сплошной, *провідний інженер Лабораторії метрології РУЗОД, м. Чорнобиль*

Розглянуто питання точності визначення активності твердих радіоактивних відходів (ТРВ) гамма-спектрометрами з теоретичним розрахунком ефективності. Проаналізовано джерела виникнення похибок і запропоновано спосіб оцінки похибки, яка виникає при неточному визначенні характеристик ТРВ. Виконано розрахунки похибки для випадків, коли параметри задачі задано інтервалами чи у вигляді нечітких величин.

The article considers the matters of the accuracy of determining activity of solid radioactive wastes (SRW) using gamma-spectrometers with theoretical calculation of effeciency. The sources of error generation have been analyzed and a way of evaluating the error arising when inaccurately determing SRW characteristics has been proposed. Error calculations for the cases when task parameters are assigned by intervals or in the form of fuzzy quantities have been made.

Вступ

Останнім часом у практику радіаційних вимірювань входять гамма-спектрометри з можливістю теоретичного розрахунку ефективності. Їх використання в лабораторних умовах на строго визначені речовини і геометрії вимірювань показує, що в цих умовах похибка вимірювань активності не перевищує 20 %. Проте розробник у документації рекомендує їх використання також і в польових умовах, коли неможливо строго контролювати речовинний склад і геометрію вимірювань. При цьому виникає додаткова похибка, величина якої невідома. Фактично такий метод можна було б атестувати з визначенням похибки вимірювань лише для заданого типу матеріалу ТРВ після довгих експериментів, що практично неможливо й непотрібно, оскільки на практиці в контейнер може бути завантажено що завгодно. У даній роботі для конкретності розглянуто задачу оцінки похибки вимірювання активності в контейнері з радіоактивними відходами (РАВ).

Постановка задачі

Загальноприйнятий на сьогоднішній день підхід ґрунтується на тому, що більшість реальних ситуацій можна звести до обмеженого числа геометрій (куля, циліндр, паралелепіпед тощо), для яких можна написати точні формули. Що стосується речовинного складу, то задача піддається розв'язку, якщо можна оцінити відносний вміст різних матеріалів. Прикладом такого підходу може бути наведена в [1] контрольна задача з розрахунку гамма-поля від заповненої рідкими РАВ цистерни, усередині якої для міцності розташовані металеві ферми: загальний матеріал розглядається як суміш води та заліза.

Таким чином, теоретично визначення ефективності спектрометра можливе й для ситуації з дуже неоднорідними матеріалами. Тобто навіть насипне будівельне сміття можна описувати усередненими параметрами – густиною і речовинним складом. Такий крок зробили розробники гамма-спектрометричної апаратури, заздалегідь розрахувавши ефективність спектрометра для великого числа конфігурацій джерела, відстаней між детектором і джерелом та інших параметрів. Однак питання про похибку, пов'язану з невизначеністю параметрів об'єкта, залишається відкритим. Для прикладу вкажемо, що в інструкції з експлуатації гамма-спектрометричної системи ISOCS фірми "Canberra" [2] розглянуто розрахунок активності для випадку, коли контейнер "заповнено на три чверті". Це автоматично означає, що висоту заповнення було визначено "на око" і найкраще, що можна про неї сказати, це що похибка її визначення не менша 1/8 висоти контейнера. У даній роботі розглядається похибка, яка обумовлена невизначеністю цих параметрів.

Формула, яка пов'язує активність джерела і створене ним поле, має вигляд

$$M = CA\rho_1 \int\limits_V \frac{\exp(-\mu_1 r_1 \rho_1 - \mu_2 r_2 \rho_2 - \mu_3 r_3 \rho_3)\,dV}{(r_1 + r_2 + r_3)^2}, \quad (1)$$

де A – активність; C – коефіцієнт пропорційності; M – вимірюваний параметр гамма-поля; μ_1, μ_2 і μ_3 – коефіцієнти поглинання для густини 1 г/см^3 в матеріалі РАВ, стінках контейнера (залежать від ефективного атомного номера, тобто від хімічного складу цих матеріалів) та в повітрі; r_1, r_2 і r_3 – шлях, який випромінювання проходить відповідно в матеріалі РАВ, стінці контейнера та в повітрі; ρ_1 – густина матеріалу ТРВ; ρ_2 – густина стінки контейнера; ρ_3 – густина повітря; V – об'єм джерела (контейнера). Відстань між детектором і контейнером d не входить у формулу, але використовується при розрахунку $r_1+r_2+r_3$.

Оскільки густина матеріалу в контейнері $\rho_1=$ $=m/V$, де m – маса РАВ, а V – їх об'єм, який у свою чергу визначається як функція розміру (для конкретності – для контейнера у формі паралелепіпеда з розмірами t і висотою заповнення h) $V=t\cdot t\cdot h$, то формула (1) набуває вигляду

$$M = C\frac{Am}{htt}\int_V \frac{\exp(-\mu_1 r_1 \frac{m}{htt} - \mu_2 r_2 \rho_2 - \mu_3 r_3 \rho_3)dV}{(r_1 + r_2 + r_3)^2},$$

звідки видно, що результат нелінійно залежить від параметрів.

Стандартний спосіб оцінки похибки для нашого випадку – визначення похибки для функції багатьох змінних (диференційна формула оцінки похибки) [3]. Це досить трудомісткий спосіб, проте головна проблема в тому, що таким методом похибка визначається для конкретних значень параметрів. Тобто таким способом можна оцінити похибку при вибраних значеннях змінних, а потім необхідно повторювати цю процедуру в усьому діапазоні зміни їх значень. Оскільки практично це неможливо зробити при неперервних діапазонах зміни величин, а визначення похибки для крайніх значень діапазонів зміни (невизначеності) параметрів не означає визначення крайніх меж похибки, виникає необхідність застосування спеціальних методів. Крім того, при цьому треба вказувати похибку визначення параметрів, яка в нашій задачі невідома.

У результаті задача виявляється зведеною до ситуації, коли параметри розрахунків не мають певних значень, а задаються інтервалами можливих значень. Існує кілька підходів до виконання розрахунків для таких задач. Інтервальна математика [4, 5] та теорія планування експериментів [6] дають можливість розрахувати крайні діапазони значень шуканої величини. Нарешті, оскільки ряд параметрів задається на основі експертних оцінок, їх можна розглядати як нечіткі дані і скористатися прийомами нечіткої логіки [7].

У даній роботі пропонується підхід, який полягає у прямих розрахунках активності на основі методу Монте-Карло шляхом перебору різних комбінацій значень параметрів у заданих діапазонах їх зміни з наступним статистичним аналізом одержаних результатів. Можливі діапазони змін кожної із величини, які входять у розрахункову формулу, якщо неможливі прямі вимірювання, визначаються методом експертних оцінок [8, 9], у нашому випадку виходячи з очікуваної геометрії вимірювань, літературних даних та практичного досвіду експертів. У табл. 1 наведено середні значення параметрів та інтервали їх змін, використані в подальшому при модельному розрахунку. Ці величини були вибрані при аналізі практичної ситуації: частково заповнений прямокутний контейнер зі стороною t.

Методи розрахунків

При виконанні вимірювань спектрометром із теоретичним розрахунком ефективності оператор після набору спектра вводить у комп'ютер значення вказаних у таблиці параметрів. При цьому дані вводяться точно, незалежно від точності їх визначення. У результаті комп'ютер спектрометра видає результат визначення активності. Це є експериментальний результат. Якщо ввести інші параметри із заданих інтервалів їх зміни, одержимо інший, але так само експериментальний результат того ж самого вимірювання. Таким чином, якщо цю операцію повторити багато разів, вводячи різні значення параметрів, можна одержати уяву про похибку визначення активності, пов'язану з неточністю визначення цих параметрів.

Було виконано два види розрахунків. У першому в заданих інтервалах (див. таблицю) з рівною імовірністю випадково вибиралися значення

Таблиця 1

Параметри розрахунків, визначені з використанням експертних оцінок

Параметр	Позначення	Середня величина	Діапазон варіювання параметра
Площа спектра	M	80 відн. од.	±15 відн. од.
Відстань між контейнером і детектором	d	398 см	±2 см
Маса ТРВ	m	190000 г	±100 г
Коефіцієнт поглинання ТРВ	μ_1	0,077319 см$^{-1}$	0,000372 см$^{-1}$
Коефіцієнт поглинання матеріалу контейнера (заліза)	μ_2	0,076110 см$^{-1}$	±0,000001 см$^{-1}$
Розмір контейнера	t	40 см	±0,1 см
Товщина стінки контейнера	r_2	0,29 см	±0,01 см
Висота заповнення контейнера	h	65 см	±15 см

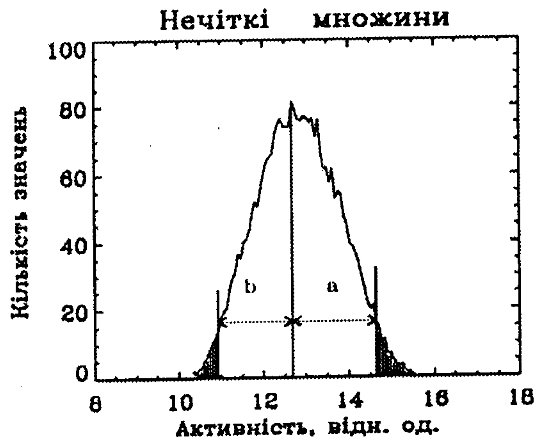
параметрів (інтервальні розрахунки). Далі для різних комбінацій параметрів із вказаних діапазонів їх змін розраховувалася активність *A* для кожної комбінації. У другому випадку вважалося, що найбільш імовірним є значення параметра із середини діапазону, а крайні значення менш імовірні (нечіткі множини). Для простоти розрахунків функція приналежності була вибрана гаусовою. Тобто при розрахунках значення параметрів випадково вибиралися із заданого інтервалу не рівноімовірно, а більш часто вибиралися значення із середини діапазону.

Правильність формул і розрахунків перевірялася шляхом їх порівняння з аналогічними розрахунками за допомогою програми MicroShield фірми "Grove Engineering" при кількох конкретних значеннях параметрів. Результати збігаються з точністю до декількох відсотків. Статистична похибка розрахунків використаним методом Монте-Карло залежить від обсягу вибірки і при кількості точок ільше 50000 становить менше 1 %.

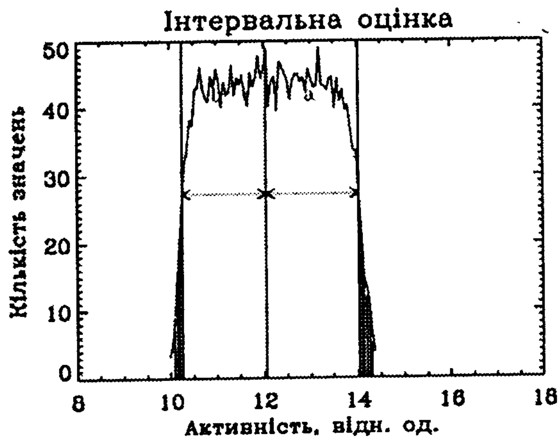
Обговорення результатів

На рисунку показано одержаний масив результатів розрахунку активності при вибраних інтервалах параметрів моделі (див. таблицю) у вигляді гістограм для рівноімовірного та гаусового вибору значень параметрів. Інтервали зміни активності в обох випадках практично збігаються, хоча криві розподілу значно відрізняються. Зауважимо, що одержані результати не є випадковими величинами. Результати розрахунків знаходяться в певному діапазоні і за нього вийти не можуть, яким би великим не був обсяг вибірки. Крім того, обидва використані підходи вибору комбінацій параметрів – рівноімовірний та з гаусовою функцією розподілу – здаються однаково можливими (обґрунтованими). Вибір іншої функції розподілу (наприклад, трикутної, яка широко використовується в теорії нечітких даних), або зміна довільно вибраних параметрів використаних гаусових функцій призведе до зміни виду гістограм з рисунку, тобто вид гістограм залежить від способу описування даних, хоча самі інтервали при цьому не змінюються.

Шлях до оцінки похибки в таких ситуаціях дає "Керівництво по вираженню невизначеності вимірювань" [10], в якому рекомендуються неформалізовані способи оцінки невизначеності у випадках, коли дані не є результатом багаторазових вимірювань. У цьому випадку рекомендується представляти невизначеність (похибку) у вигляді меж відхилення значення вимірюваної величини від її оцінки. Якщо все-таки припустити, як це прийнято робити на практиці, що крайні значення малоімовірні, можна їх відкинути і підрахувати похибку як відношення половини інтервалу решти значень розрахованої активності до середнього, медіани або найбільш імовірного (в максимумі гістограми). Таку оцінку показано на рисунку. Задамо довірчий інтервал, наприклад, 95 %. Проведемо на рисунку горизонтальну лінію, нижче якої будуть знаходитися вибрані приблизно 5 % значень, які найбільше відхиляються від середнього зліва і справа (заштриховані області). Ці точки входять у межі 5 % малоімовірних значень і з подальшого розгляду викидаються. Для решти точок приймемо за найбільш



а



б

Функції розподілу розрахованих значень активності: *а* – для заданого гаусовою функцією вибору значень в інтервалі; *б* – для рівноімовірного вибору значень в інтервалі

Таблиця 2

Розрахунок похибок для показаних на рисунку результатів

Метод	Число комбінацій	Найбільш імовірне значення активності, відн. од.	Ліва похибка, %	Права похибка, %	Довірчий інтервал, %
Інтервали	10×3000	12,1	16,7	17,5	93,6
Нечіткі дані	10×3000	12,8	13,8	15,4	94,6

імовірне максимум A_{max} (можна було б вибрати й точку середньоарифметичного значення або медіану – загальний інтервал невизначеності при цьому не міняється). Горизонтальними стрілками вказано максимальні відхилення від найбільш імовірного вліво та вправо. Лівою похибкою (у відсотках) назвемо величину $(a/A_{max})\cdot 100$, а правою похибкою – величину $(b/A_{max})\cdot 100$. Одержаний результат наведено в табл. 2.

Як видно, величина похибки залежить від способу описування даних, тому використання середньоквадратичного відхилення, яке дає значно меншу оцінку похибки, є некоректним, і найбільш правильним було б в якості похибки просто вказувати межі зміни активності.

Висновки

Проаналізовано складову похибки вимірювання активності контейнерів з РАВ гамма-спектрометричним методом, яка пов'язана з неточним знанням параметрів розрахунку. Проведений аналіз показує, що ця похибка не може бути визначена шляхом збільшення числа вимірювань та загальноприйнятими методами розрахунку похибок. Причому проблема визначення такої похибки не залежить від її абсолютної величини: навіть коли її можна зменшити шляхом звуження інтервалів невизначеності параметрів, однаково повинен існувати спосіб її оцінки. Запропонований спосіб оцінки похибки вимірювання активності при використанні гамма-спектрометричних систем із можливістю теоретичного розрахунку ефективності, яка виникає через неточне визначення параметрів ТРВ у контейнері, і проведений за допомогою цього способу аналіз показують, що ця похибка взагалі є інтервальною величиною. Указану в таблиці її величину порядку ±20 % можна вважати консервативною оцінкою для конкретного об'єкта – стандартного контейнера. При інших співвідношеннях між значеннями параметрів та інтервалами їх зміни вона може значно змінитися.

Список літератури

1. MicroShield. Version 5.User's Manuel. Grove Engineering Inc.
2. Программа калибровки ISOCS. Версия 4.0. Руководство пользователя. Canberra, 2003.
3. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. -М.: Наука, 1969. -С. 344.
4. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. -Новосибирск: Наука, 1981. -112 с.
5. Ferson S., Ginzburg L., Kreinovich V et al. //Reliable computing. -2005. -V. 11, No 3. -P. 207–233.
6. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента. -М.: Радио и связь, 1983. -С. 249.
7. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. -М.: Радио и связь, 1982. -432 с.
8. Орлов А.И. //Заводская лаборатория. -1996. -Т. 62, № 1. -С. 54 –60.
9. Орлов А.И. Нечисловая статистика. -М.: МЗ-Пресс, 2004. -345 с.
10. Рекомендации по межгосударственной стандартизации РМГ 43-2001. Применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". -Минск: МГС, 2001.

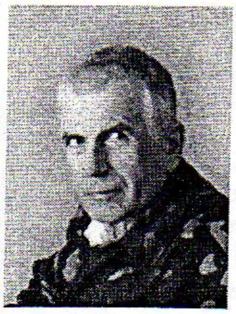
УДК 389.1

№ 31

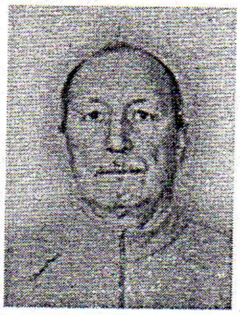
КОМЕНТАР ДО СТАТТІ ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ ПРИ НЕВІДОМІЙ АНАЛІТИЧНІЙ ЗАЛЕЖНОСТІ ФУНКЦІЇ ВИХОДУ ВІД ПАРАМЕТРІВ ВХОДУ

А.Д.Скорбун, *кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту проблем безпеки атомних електростанцій НАН України, м. Чорнобиль*

Б.М.Сплошной, *провідний інженер Лабораторії метрології ДСП РУЗОД, м. Чорнобиль*



А.Д.Скорбун



Б.М.Сплошной

Показано, що задача знаходження частинних похідних функції багатьох аргументів на основі виразу для її диференціалу зводиться до некоректної задачі.

Проаналізовано причини можливих грубих похибок при розв'язуванні задачі визначення частинних похідних для невідомої аналітичної функції і запропоновано метод вирішення задачі, що базується на статистичній обробці результатів розрахунків, проведених із використанням методів Монте-Карло.

Оцінено необхідну кількість вимірювань для одержання достовірного результату.

It is shown, that a task of estimation of partial derivatives of a multivariable function on the base of its differential is reduced to ill-posed problem.

The cause of possible crude errors in such a situation have been analyzed, and the method for solving this problem, that is based on statistical treatment of calculation results, that uses Monte Carlo methods, have been developed.

The necessary number of measurements to receive a reliable result has been estimated.

Вступ

У роботі [1] розглянуто задачу оцінки похибки вимірювання при невідомій аналітичній залежності функції виходу від параметрів входу на прикладі добре відомої [2] задачі бомбометання, в якій функція виходу відома, а саме (у позначеннях [1]):

$$X(h,C,v) = v\sqrt{\frac{2h}{g}(1-1{,}8\cdot 10^{-5}Ch)}, \qquad (1)$$

де v – швидкість літака; h – його висота; C – поправочний коефіцієнт; g – прискорення вільного падіння. Ці величини відомі з певною точністю. Їх середні значення і стандартні відхилення відповідно: швидкість $v_0=152$ м/с, $\sigma_v=1$ м/с; висота $h_0=3950$ м, $\sigma_h=$ $=40$ м; коефіцієнт $C_0=1$, $\sigma_c=0{,}1$. Ставиться задача знайти похибку визначення X – величини відносу бомби від точки її скидання.

Стандартна формула для оцінки похибки для функції багатьох змінних – диференційна формула оцінки похибки [3] – у нашому випадку має вигляд

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial h}\right)^2\sigma_h^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\sigma_v^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial C}\right)^2\sigma_C^2}. \qquad (2)$$

Прямим диференціюванням (1) одержимо

$$\frac{\partial X}{\partial h} = 0{,}429;\ \frac{\partial X}{\partial v} = 26{,}4;\ \frac{\partial X}{\partial C} = -307. \qquad (3)$$

Розрахована за наведеними параметрами похибка $\varepsilon=31{,}47$.

Тобто для оцінки похибки необхідно знати частинні похідні функції X. При невідомому вигляді цієї функції їх пропонується визначати з формул для її скінченних приростів [4 , с. 390]:

$$\begin{aligned}
\Delta X_1 &= \frac{\partial X}{\partial v}\Delta v_1 + \frac{\partial X}{\partial h}\Delta h_1 + \frac{\partial X}{\partial C}\Delta C_1;\\
\Delta X_2 &= \frac{\partial X}{\partial v}\Delta v_2 + \frac{\partial X}{\partial h}\Delta h_2 + \frac{\partial X}{\partial C}\Delta C_2;\\
\Delta X_3 &= \frac{\partial X}{\partial v}\Delta v_3 + \frac{\partial X}{\partial h}\Delta h_3 + \frac{\partial X}{\partial C}\Delta C_3.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Прирости Δv, Δh, ΔC у формулі (4) можуть приймати довільні значення за умови їх малості порівняно із самою змінною, відповідні величини ΔX знаходять з експерименту.

Моделюючи експеримент, автор [1] задається наведеними в перших трьох рядках таблиці значеннями Δh_i, Δv_i, ΔC_i і розраховує для них за формулою (1)

Номер експерименту	Δh_i	Δv_i	ΔC_i
1	40	3	0,15
2	40	2	0,10
3	40	1	0,20
4	–80,0	2,0	0,15
5	–40,0	1,0	0,10
6	–120,0	3,0	0,20

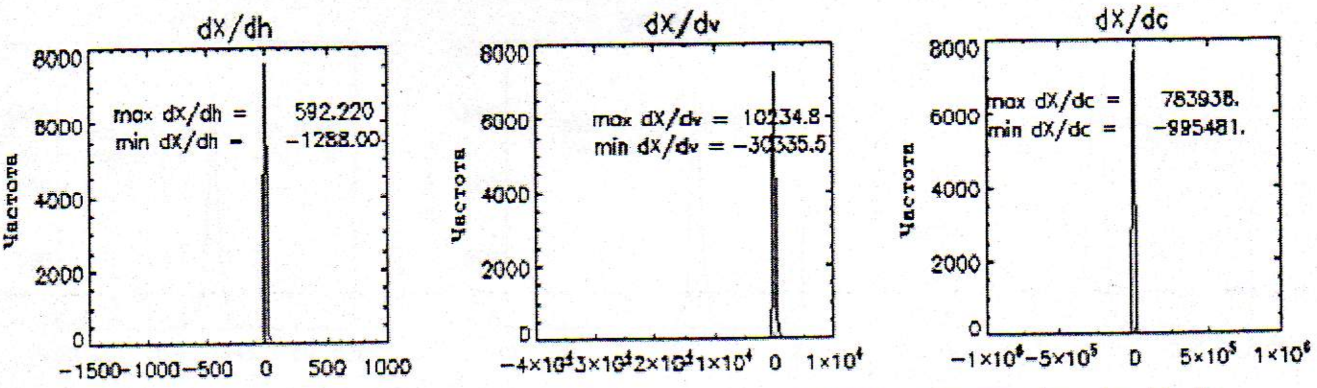


Рис. 1. Гістограми розподілу значень частинних похідних для випадкових значень приростів змінних Δv_i, Δh_i, Δc_i при розв'язуванні методом Крамера

ΔX_i. Система рівнянь (4) є системою трьох рівнянь з трьома невідомими, яка елементарно розв'язується. Одержаний результат ($\partial X/\partial h$=0,4375; $\partial X/\partial v$= =26,1; $\partial X/\partial C$=–314) близький до наведених вище теоретичних значень частинних похідних (3), які одержуються прямим диференціюванням (1).

На перший погляд здається, що задачу справді розв'язано і метролог-практик може використовувати описаний підхід. Однак слід пам'ятати, що параметри системи (4) Δx_i, Δy_i, Δz_i у межах своїх змін можуть приймати довільні значення, тобто не тільки ті, які використано в таблиці. Хоча одержаний для вказаних параметрів результат і відхиляється від "точного" на ~2 %, залишилося невідомим, яке може бути максимальне відхилення за інших комбінацій параметрів. І, наприклад, якщо систему рівнянь скласти з параметрів, які наведено в рядках 4–6 таблиці, то така система не має розв'язку в звичайному розумінні – її матриця сингулярна. Не важко підібрати параметри, при яких результат не буде мати нічого спільного з (3).

Таким чином використання описаного вище методу для визначення частинних похідних може дати неконтрольований результат.

Продемонструємо цю проблему прямими розрахунками. Будемо випадковим чином генерувати прирости Δv_i, Δh_i, ΔC_i , i=1, 2, 3, з діапазонів значень їх $\pm\sigma_i$, розраховувати для них ΔX_i і розв'язувати систему (4) методом Крамера [5]. Одержані значення частинних похідних показано у вигляді гістограм їх розподілу на рис. 1, де вказано також максимальні і мінімальні значення, які були присутні у вибірці. Відповідно, похибки, розраховані за формулою (2), в яку підставлялися змінні значення частинних похідних, показано на рис. 2. При цих розрахунках значення приростів бралося з машинною точністю, що дозволило уникнути ситуацій, коли детермінант системи точно дорівнював нулю, і таким чином провести розрахунки і побудувати графіки. Якщо брати прирости з точністю вимірювань, тобто до двох знаків після коми, провести такий аналіз методом Крамера практично неможливо, оскільки комбінації параметрів, які дають нульовий детермінант, зустрічаються досить часто. На графіках по осі абсцис, наприклад, для $\partial X/\partial h$, показано діапазон значень від –1500 до 1000. Це означає, що серед розрахованих значень зустрічаються і такі величини, хоча і рідко, тоді як максимуму гістограми відповідає значення $\partial X/\partial h \cong 0{,}43$. Одержані значення частинних похідних мають досить великий розкид, що веде до великих розкидів розрахованої похибки. Проте їх гістограми мають максимум при значеннях, близьких до теоретичних значень (2), наведених вище. Це відкриває шлях до вирішення проблеми.

Метод розв'язування та оцінка його точності

Проблема полягає в тому, що система рівнянь (4) записана для так званої прямої задачі: розрахунків величини ΔX за відомими частинними похідними, а знаходження частинних похідних з системи рівнянь (3) є вже оберненою задачею. Оскільки величини приростів Δv_i, Δh_i, Δc_i можуть приймати довільні значення, система (4) має нескінченне число рівнянь для трьох невідомих, величини яких відомі лише з певною точністю. Така задача відноситься до класу некоректних задач [6], в яких невеликим змінам параметрів можуть відповідати великі зміни результату, що ми й спостерігаємо. Близькі до нуля значення детермінанта в даній ситуації фактично означають його рівність нулю в межах точності розрахунків, тобто систему (4) не можна розв'язувати методом Крамера.

Для розв'язання системи (3) використаємо метод урахування сингулярних значень (singular va-

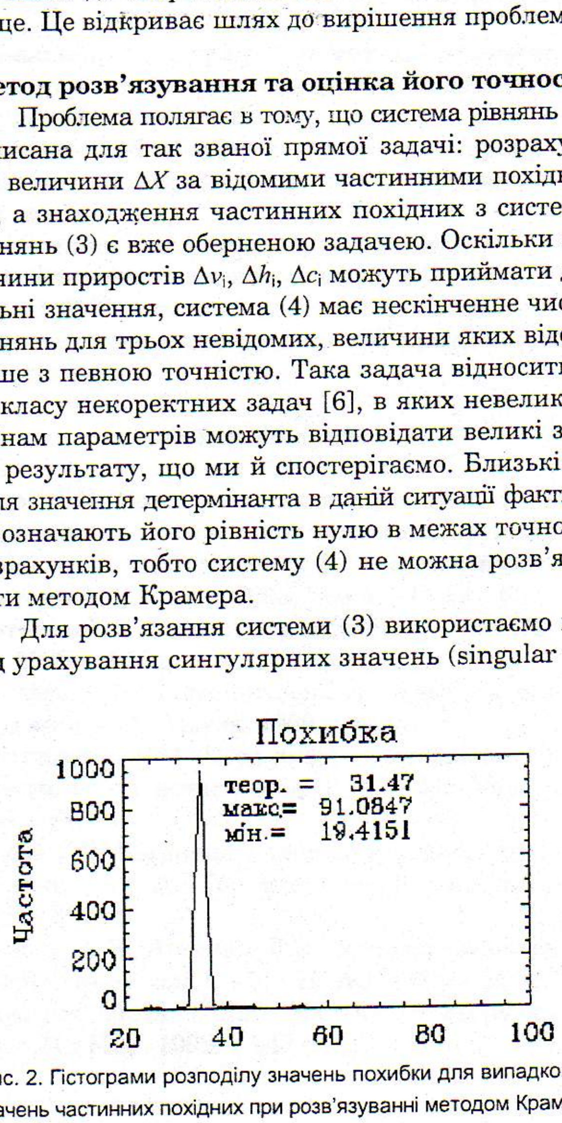


Рис. 2. Гістограми розподілу значень похибки для випадкових значень частинних похідних при розв'язуванні методом Крамера

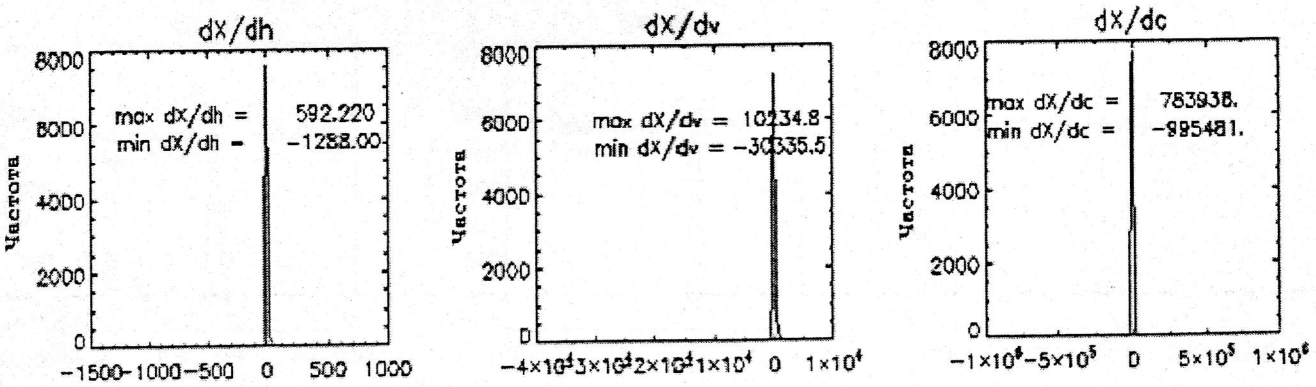


Рис. 1. Гістограми розподілу значень частинних похідних для випадкових значень приростів змінних Δv_i, Δh_i, Δc_i при розв'язуванні методом Крамера

ΔX_i. Система рівнянь (4) є системою трьох рівнянь з трьома невідомими, яка елементарно розв'язується. Одержаний результат ($\partial X/\partial h$=0,4375; $\partial X/\partial v$==26,1; $\partial X/\partial C$=–314) близький до наведених вище теоретичних значень частинних похідних (3), які одержуються прямим диференціюванням (1).

На перший погляд здається, що задачу справді розв'язано і метролог-практик може використовувати описаний підхід. Однак слід пам'ятати, що параметри системи (4) Δx_i, Δy_i, Δz_i у межах своїх змін можуть приймати довільні значення, тобто не тільки ті, які використано в таблиці. Хоча одержаний для вказаних параметрів результат і відхиляється від "точного" на ~2 %, залишилося невідомим, яке може бути максимальне відхилення за інших комбінацій параметрів. І, наприклад, якщо систему рівнянь скласти з параметрів, які наведено в рядках 4–6 таблиці, то така система не має розв'язку в звичайному розумінні – її матриця сингулярна. Не важко підібрати параметри, при яких результат не буде мати нічого спільного з (3).

Таким чином використання описаного вище методу для визначення частинних похідних може дати неконтрольований результат.

Продемонструємо цю проблему прямими розрахунками. Будемо випадковим чином генерувати прирости Δv_i, Δh_i, ΔC_i , i=1, 2, 3, з діапазонів значень їх $\pm\sigma_i$, розраховувати для них ΔX_i і розв'язувати систему (4) методом Крамера [5]. Одержані значення частинних похідних показано у вигляді гістограм їх розподілу на рис. 1, де вказано також максимальні і мінімальні значення, які були присутні у вибірці. Відповідно, похибки, розраховані за формулою (2), в яку підставлялися змінні значення частинних похідних, показано на рис. 2. При цих розрахунках значення приростів бралося з машинною точністю, що дозволило уникнути ситуацій, коли детермінант системи точно дорівнював нулю, і таким чином провести розрахунки і побудувати графіки. Якщо брати прирости з точністю вимірювань, тобто до двох знаків після коми, провести такий аналіз методом Крамера практично неможливо, оскільки комбінації параметрів, які дають нульовий детермінант, зустрічаються досить часто. На графіках по осі абсцис, наприклад, для $\partial X/\partial h$, показано діапазон значень від –1500 до 1000. Це означає, що серед розрахованих значень зустрічаються і такі величини, хоча і рідко, тоді як максимуму гістограми відповідає значення $\partial X/\partial h \cong 0{,}43$. Одержані значення частинних похідних мають досить великий розкид, що веде до великих розкидів розрахованої похибки. Проте їх гістограми мають максимум при значеннях, близьких до теоретичних значень (2), наведених вище. Це відкриває шлях до вирішення проблеми.

Метод розв'язування та оцінка його точності

Проблема полягає в тому, що система рівнянь (4) записана для так званої прямої задачі: розрахунків величини ΔX за відомими частинними похідними, а знаходження частинних похідних з системи рівнянь (3) є вже оберненою задачею. Оскільки величини приростів Δv_i, Δh_i, Δc_i можуть приймати довільні значення, система (4) має нескінченне число рівнянь для трьох невідомих, величини яких відомі лише з певною точністю. Така задача відноситься до класу некоректних задач [6], в яких невеликим змінам параметрів можуть відповідати великі зміни результату, що ми й спостерігаємо. Близькі до нуля значення детермінанта в даній ситуації фактично означають його рівність нулю в межах точності розрахунків, тобто систему (4) не можна розв'язувати методом Крамера.

Для розв'язання системи (3) використаємо метод урахування сингулярних значень (singular va-

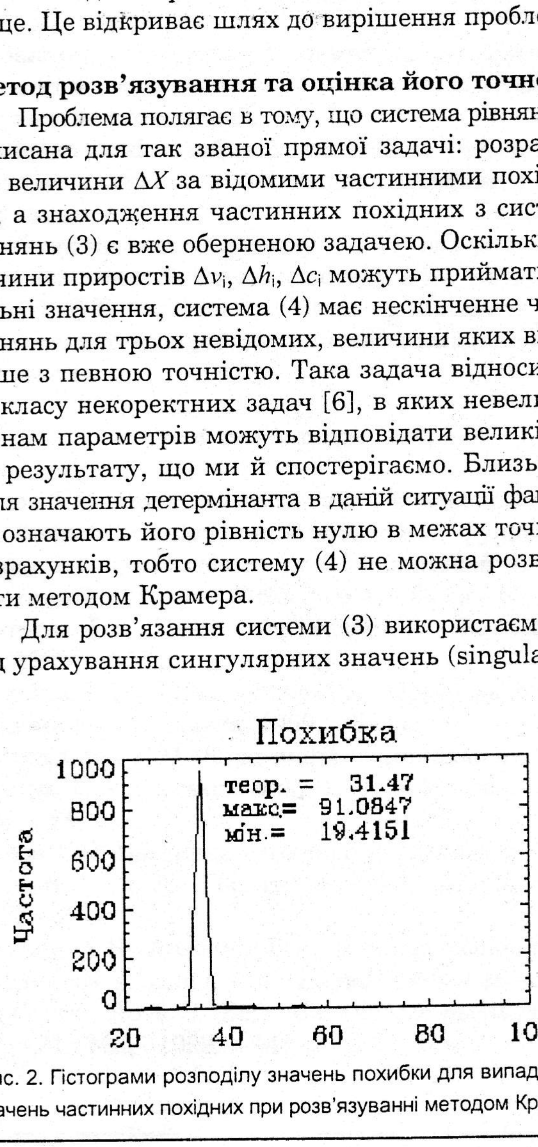


Рис. 2. Гістограми розподілу значень похибки для випадкових значень частинних похідних при розв'язуванні методом Крамера

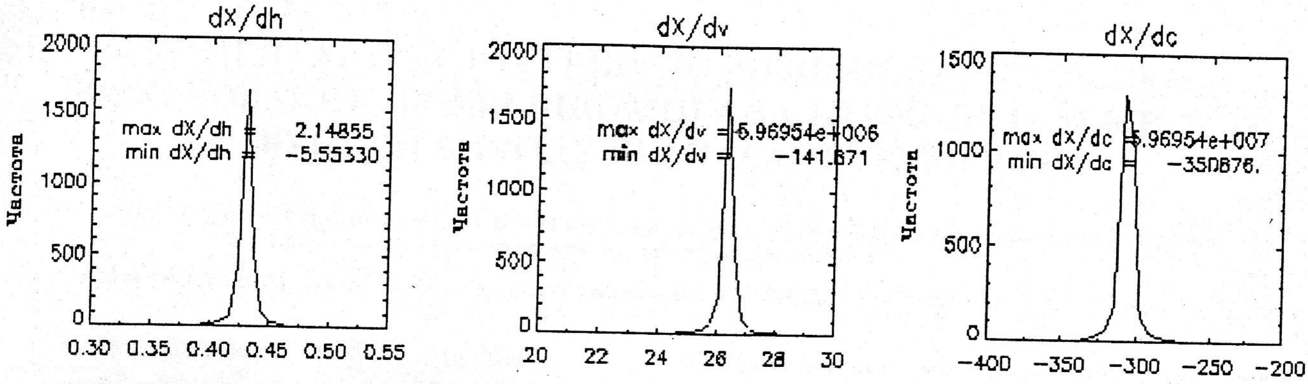


Рис. 3 Гістограми розподілу значень частинних похідних для випадкових значень приростів змінних Δx_i, Δy_i, Δz_i при розв'язуванні методом SVD

lue determination (SVD)) [7]. Оскільки, як відомо [6, 7], некоректні задачі розв'язуються наближено, ми ставимо за мету не тільки дати спосіб оцінки частинних похідних, а й оцінити межі похибки, обчисленої за формулою (2) за умови, що значення частинних похідних задаються в певних діапазонах.

Розрахунки, проведені за описаною вище схемою, але не методом Крамера, а методом SVD, дали результат, аналогічний показаному на рис. 1, проте розв'язку піддаються будь-які комбінації параметрів. Максимуми гістограм відповідають теоретичним значенням, тому найпростіший шлях вирішення задачі знаходження похідних – взяти їх значення в максимумах гістограм. Результат побудови гістограм розв'язків, одержаних методом SVD, наведено на рис. 3 (тут крайні значення не показано). Одержані в максимумах гістограм значення $\partial X/\partial h = 0{,}43$, $\partial X/\partial v = 26{,}42$, $\partial X/\partial C = -309{,}14$ в межах 2 % збігаються з результатами [1]. При цьому підкреслимо, що, оскільки ці величини визначаються з максимуму гістограми, природно вважати, що невизначеність цих величин визначається шириною гістограми.

Оцінка необхідної кількості вимірювань

При виконанні повірки реально виконується обмежене число вимірювань, тоді як для побудови гістограм потрібен досить великий масив даних, тобто велике число вимірювань.

За результатами вимірювань складається система (4), яка стає системою багатьох рівнянь з трьома невідомими. Оскільки при розрахунках похідних використовується по три рівняння, то для незалежних розрахунків можна використовувати різні комбінації по три рівняння з розширеної системи (4). Виявилося, що якісні гістограми з чітким максимумом утворюються, вже коли (4) містить 13–15 рівнянь. Одержане відхилення від табличних даних (2) не перевищує 2 %. Зауважимо, що оскільки при цьому гістограма вимальовується достатньо чітко, подальше збільшення числа вимірювань не веде до зменшення похибки.

Висновки

Запропоновано метод оцінки похибки вимірювань для ситуації, коли результат є функцією багатьох змінних, проте сам вигляд функціональної залежності невідомий.

Показано, що в цій ситуації визначення частинних похідних, знання яких є необхідним для розрахунку похибки, веде до некоректної математичної задачі, що вимагає особливих підходів до її розв'язання.

Показано, що одержати коректний результат можливо шляхом застосування статистичної обробки результатів розрахунків.

Оцінено межі похибки результату та мінімальне число вимірювань, необхідне для одержання надійних даних.

Зауважимо, що, на відміну від методів розв'язування некоректних задач, описаних в [6], методи Крамера і SVD включені до багатьох математичних пакетів і тому є доступними для практичного використання.

Список літератури

1. Ленюк Г.К. Визначення похибки вимірювання при невідомій аналітичній залежності функції виходу від параметрів входу // Український метрологічний журнал. – 2008. – № 4. – С. 59 – 60.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 607 с.
5. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. – М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1952. – 384 с.
6. Тихонов А.Н, Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
7. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.